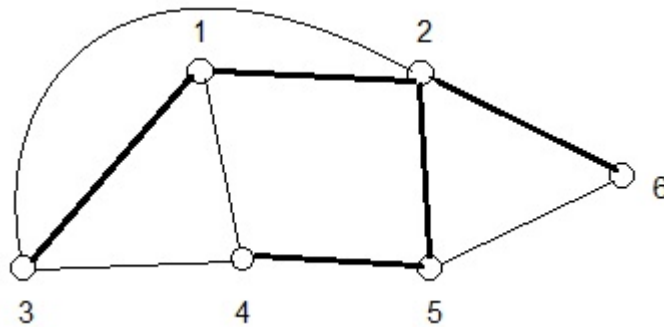


ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Ονομάζουμε **δέντρο επικάλυψης** ενός συνεκτικού γραφήματος G , ένα υπο-γράφημα του G που είναι δέντρο (συνεκτικό και άκυκλο) και περιέχει κάθε κορυφή του G .

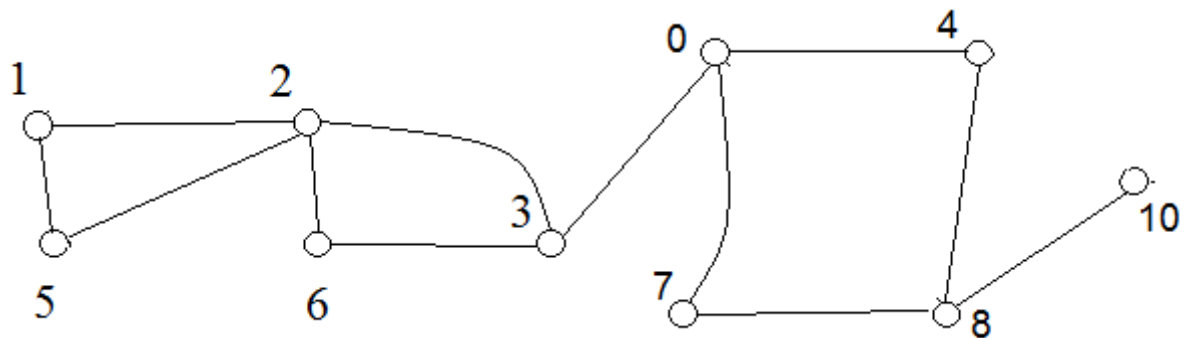


Ονομάζουμε **δάσος επικάλυψης** ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G : ένα άκυκλο υπο-γράφημα του G που αποτελείται από ακριβώς ένα δέντρο επικάλυψης για κάθε μία συνεκτική συνιστώσα του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Βρείτε τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά δέντρα επικάλυψης του γραφήματος Γ .

Γ



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: Αν η ακμή e είναι γέφυρα του συνεκτικού γραφήματος G , θα περιέχεται σε κάθε δέντρο επικάλυψης του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι:
Αν το γράφημα $G = (V, E)$ είναι δέντρο, το G θα είναι το μοναδικό δέντρο επικάλυψης του G .

Αν το $T = (V, Z)$ είναι δέντρο επικάλυψης του G :
 $Z \subseteq E$, και $|Z| = |V| - 1 = |E|$. Άρα $Z = E$ και $T = G$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το γράφημα $G = (V, E)$ είναι δέντρο, και x, y είναι κορυφές του G :
θα υπάρξει μοναδικό μονοπάτι με άκρα τις x, y .

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

α Αν $|E| = |V| - 1$, το G θα είναι δέντρο.

Έστω $T = (V, Z)$ ένα δέντρο επικάλυψης του G :
 $Z \subseteq E$, και $|Z| = |V| - 1 = |E|$. Άρα $Z = E$ και $T = G$.

β Αν $|E| = |V|$, το G θα περιέχει ακριβώς ένα κύκλο.

Αν $|E| = |V| + 1$: Το G θα περιέχει τουλάχιστον δύο κύκλους.

Έστω $T = (V, Z)$ ένα δέντρο επικάλυψης του G : $|Z| = |V| - 1$.
Κάθε ακμή του G που δεν είναι ακμή του T
θα σχηματίζει ακριβώς ένα κύκλο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

Αν $|E| = |V| + 1$, το G θα περιέχει το πολύ τρεις κύκλους.

Υπολογισμός δέντρου επικάλυψης συνεκτικού γραφήματος G μέσω αναζήτησης

$Active \leftarrow \{ s \}$ % s τυχαία κορυφή του G

$Finished \leftarrow \{ \}$

$Tree-edges \leftarrow \{ \}$

L1: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΚΟΡΥΦΗ $u \in Active$

$Finished \leftarrow Finished \cup \{ u \}$

$Active \leftarrow Active - \{ u \}$

L2: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ $\{u, v\}$ του G

 If $v \notin Active \cup Finished$

 then $Active \leftarrow Active \cup \{ v \}$

$Tree-edges \leftarrow Tree-edges \cup \{ \{u, v\} \}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Τροποποιείστε τον παραπάνω αλγόριθμο ώστε:
για δεδομένη κορυφή s του G , να υπολογίζει μία *δεντρική δομή με ρίζα s*
που να περιέχει όλες τις κορυφές του G .

**Υπολογισμός δέντρου επικάλυψης συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$
μέ αφαίρεση μη-γεφυρών**

$Rest \leftarrow E$

L: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ $e \in Rest$

If e δεν είναι γέφυρα του $(V, Rest)$
then $Rest \leftarrow Rest - \{e\}$

return $(V, Rest)$

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι:

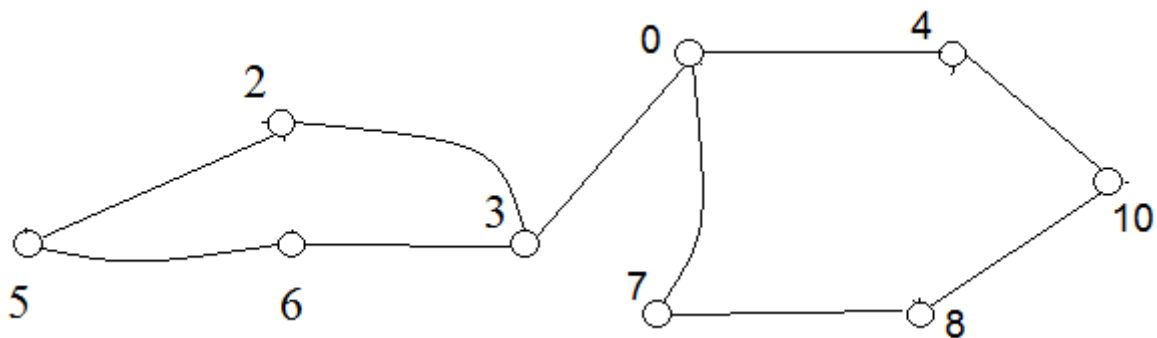
α Αμέσως μετά από κάθε εκτέλεση του βρόχου L ,
το γράφημα $(V, Rest)$ θα είναι συνεκτικό.

β Στο τέλος του βρόχου L , το γράφημα $(V, Rest)$ θα είναι δέντρο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8

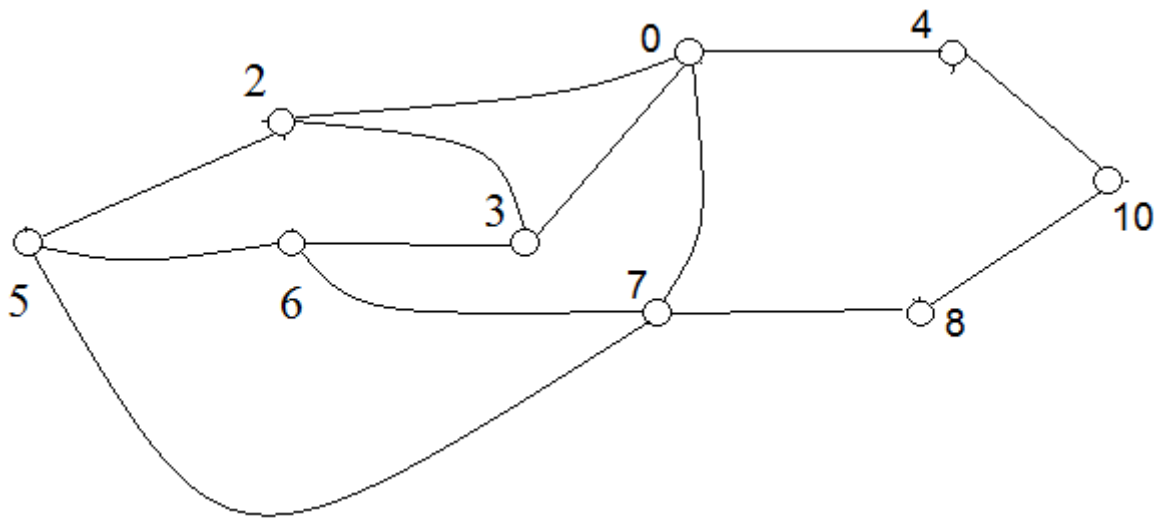
α Έστω Γ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι ένας κύκλος μήκους n .
Βρείτε όλα τα δέντρα επικάλυψης του Γ .

β Βρείτε όλα τα δέντρα επικάλυψης του παρακάτω γραφήματος.



ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα και Γ ένα άκυκλο υπο-γράφημα του G . Περιγράψτε πώς μπορεί να υπολογιστεί ένα δέντρο επικάλυψης του G που να περιέχει τις ακμές του Γ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

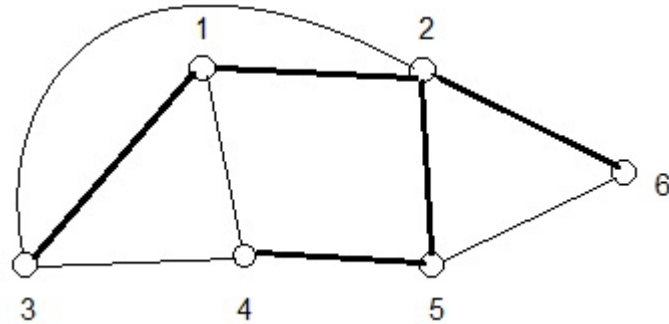


ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΚΥΚΛΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

Ονομάζουμε **χορδή** ενός συνεκτικού γραφήματος G ως προς το δέντρο επικάλυψης T : μία ακμή του G που δεν είναι ακμή του T .

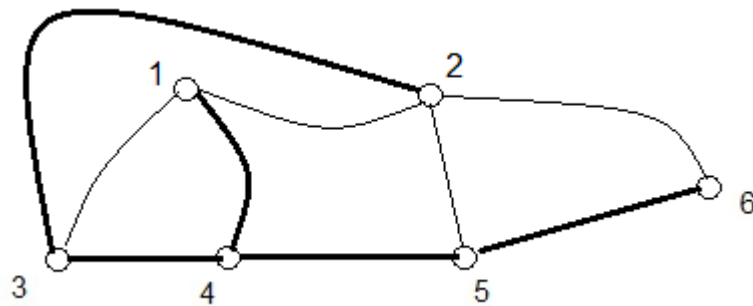
Ονομάζουμε **στοιχειώδη κύκλο** ως προς το δέντρο επικάλυψης T , ένα κύκλο του G που περιέχει μόνο μία χορδή ως προς το T .

Γ



Ο κύκλος $(1, \{1, 4\}, 4, \{4, 3\}, 3, \{3, 1\}, 1)$ δεν είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

Γ



Ο κύκλος $(1, \{1, 4\}, 4, \{4, 3\}, 3, \{3, 1\}, 1)$ είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

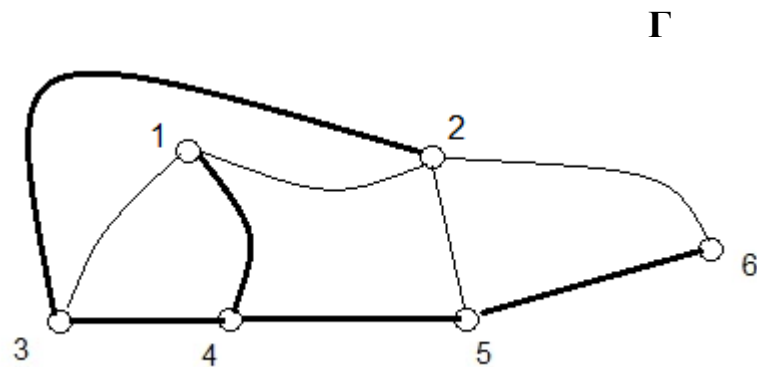
ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

α Αν το T είναι ένα δέντρο επικάλυψης του G , και e είναι μία χορδή του G ως προς το T : θα υπάρχει ακριβώς ένας κύκλος του G που είναι στοιχειώδης ως προς το T και περιέχει την ακμή e .

β Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του G , υπάρχουν ακριβώς $|E| - |V| + 1$ κύκλοι του G που είναι στοιχειώδεις ως προς το T .

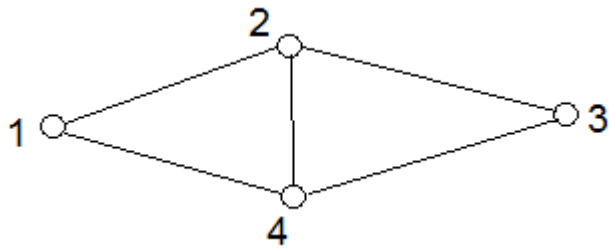
ΕΡΩΤΗΜΑ 11

α Βρείτε ένα δέντρο επικάλυψης T του γραφήματος Γ , ώστε ο κύκλος $(1, _, 2, _, 5, _, 4, _, 3, _, 1)$ να είναι στοιχειώδης ως προς το T .



β Πόσα τέτοια δέντρα επικάλυψης υπάρχουν;

ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Για κάθε έναν από τους κύκλους του παρακάτω γραφήματος, βρείτε ένα δέντρο επικάλυψης ως προς το οποίο ο κύκλος να *μην* είναι στοιχειώδης, και ένα δέντρο επικάλυψης ως προς το οποίο ο κύκλος να *είναι* στοιχειώδης .



ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του παρακάτω γραφήματος, κάθε κύκλος είναι στοιχειώδης ως προς το T .

