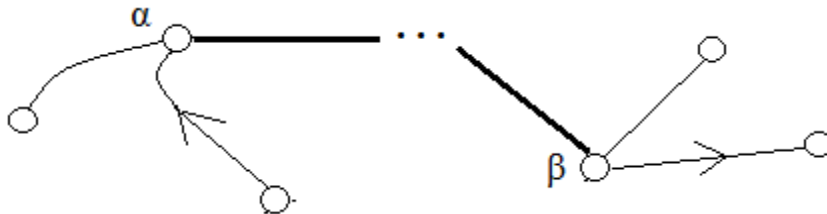


Μη-επεκτάσιμο μονοπάτι

Το μονοπάτι $\mu = (\alpha, \dots, \beta)$ του γραφήματος G ονομάζεται *επεκτάσιμο από το άκρο α* όταν: υπάρχει ακμή e του G , $e = (x, \alpha)$ είτε $e = \{\alpha, x\}$, ώστε η ακολουθία $(x, e, \alpha, \dots, \beta)$ να είναι μονοπάτι.

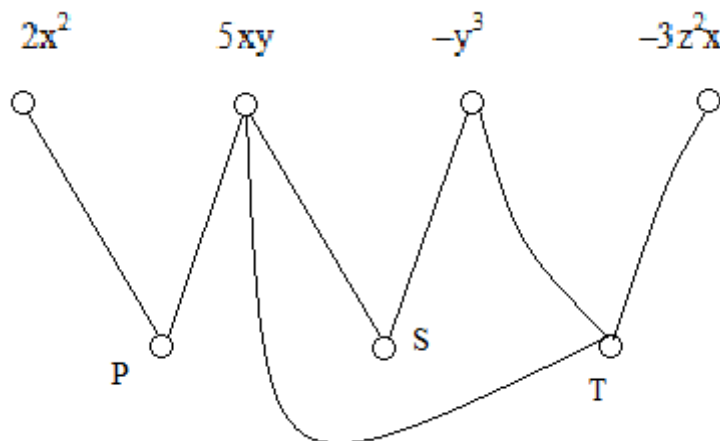
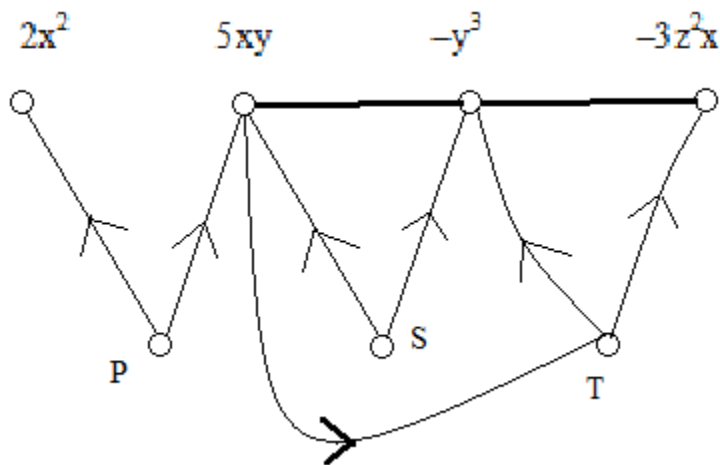
Το μονοπάτι $\mu = (\alpha, \dots, \beta)$ του G ονομάζεται *επεκτάσιμο από το άκρο β* , όταν: υπάρχει ακμή του G , $e = (\beta, x)$ είτε $e = \{\beta, x\}$, ώστε η ακολουθία $(\alpha, \dots, \beta, e, x)$ να είναι μονοπάτι.



Το μονοπάτι μ ονομάζεται *μη-επεκτάσιμο*, όταν δεν είναι επεκτάσιμο από κάποιο από τα άκρα του.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Γιά κάθε ένα από τα παρακάτω γραφήματα: βρείτε ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι, που να μην έχει μέγιστο μήκος για το γράφημα.



ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Ελέγξτε ότι: ένα μονοπάτι που έχει μέγιστο μήκος, θα είναι μη-επεκτάσιμο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

α Έστω G ένα γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή $e = (s, u)$ είτε $e = \{s, u\}$. Βρείτε μια μέθοδο για να υπολογιστεί ένα μονοπάτι $(s, e, u, \dots \beta)$, που να μην είναι επεκτάσιμο από το άκρο β .

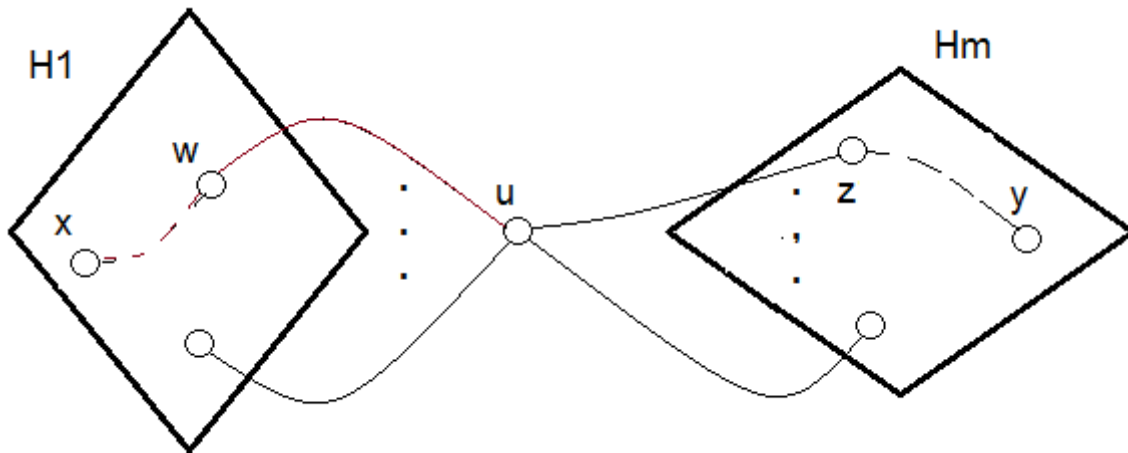
```
 $path \leftarrow (s, e, u)$       % το τρέχον μονοπάτι  
 $used \leftarrow \{s, u\}$       % το σύνολο των κορυφών που εμφανίζονται στο  $path$   
 $last \leftarrow u$       % η τελευταία κορυφή του  $path$ 
```

L: ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ $f = (last, v)$ είτε $f = \{last, v\}$

```
  If  $v \notin used$   
  then  $path \leftarrow$  πρόσθεση της  $f$  ως τελευταίας ακμής στο  $path$   
       $used \leftarrow used \cup \{v\}$   
       $last \leftarrow v$ 
```

β Έστω G ένα γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή. Βρείτε μια μέθοδο για να υπολογιστεί ένα μονοπάτι $(\alpha, \dots \beta)$ του G , που να μην είναι επεκτάσιμο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι: Αν μία κορυφή u ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι κομβικό σημείο, κάθε μονοπάτι του G με άκρο την κορυφή u θα είναι επεκτάσιμο από το u .



Έστω $H_1 \dots H_m$, $m \geq 2$, οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - u$, και $\mu = (x, \dots, w, \{w, u\}, u)$, $x \in H_1$, ένα μονοπάτι του G με άκρο την κορυφή u .

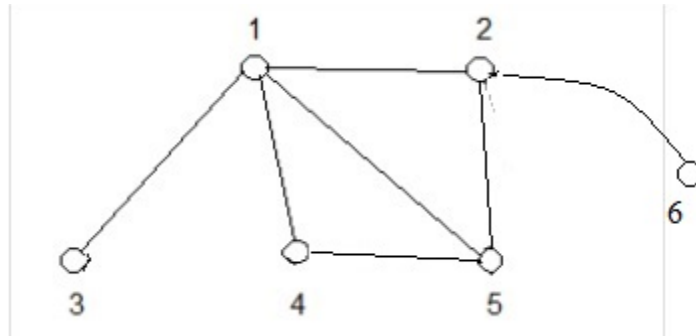
Επειδή δεν υπάρχει ακμή του G που να συνδέει το υπο-γράφημα H_1 με υπο-γράφημα H_k , $k \neq 1$: κάθε κορυφή του μονοπατιού μ εκτός από την u , θα ανήκει στο υπο-γράφημα H_1 .

Επειδή δεν υπάρχει κορυφή του H_1 που να είναι κοινή με το H_m : το μ μπορεί να επεκταθεί από το άκρο u , προσθέτοντας μία ακμή $\{u, z\}$, $z \in H_m$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Υπαρξη μη-κομβικών σημείων

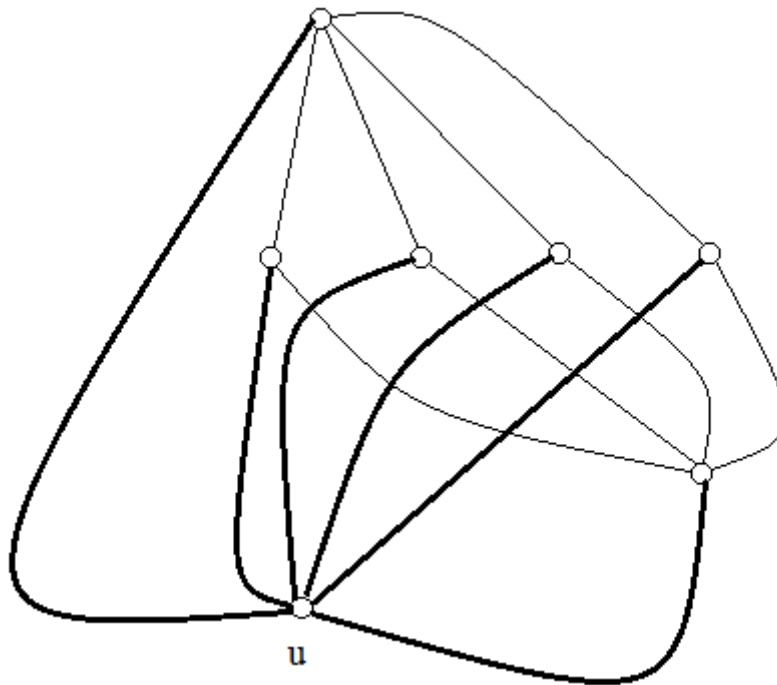
Κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή έχει δύο (τουλάχιστον) κορυφές που δεν είναι κομβικά σημεία, επειδή: τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού θα είναι μη-κομβικά.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Βρείτε όλα τα μη-επεκτάσιμα μονοπάτια που δεν έχουν ως άκρο μία από τις κορυφές 3, 4.



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα Γ και μία κορυφή u που δεν είναι κομβικό σημείο, ώστε: Κάθε μονοπάτι του Γ με άκρο την κορυφή u να είναι επεκτάσιμο από το u .

Γ



1: Υπάρχει μονοπάτι του Γ με άκρο την u που δεν είναι επεκτάσιμο από το u , *άν και μόνο άν* στο $\Gamma - u$ υπάρχει μονοπάτι που περιέχει όλες τις κορυφές του $\Gamma - u$.

2: Στο $\Gamma - u$ δεν υπάρχει μονοπάτι που να περιέχει όλες τις κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Έστω G ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό το πολύ 2.

Επιβεβαιώστε ότι: είτε το G θα είναι ένα μονοπάτι, ή το G θα είναι ένας κύκλος.

Έστω $\mu = (\alpha, \dots, \beta)$ ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι του G :

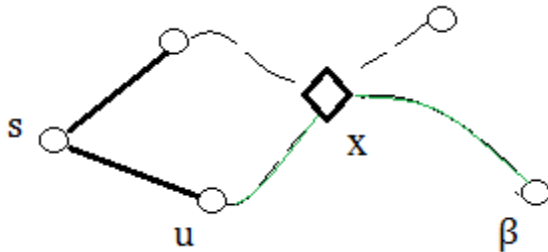
Εξετάζουμε τις ακμές του G που καταλήγουν σε μία από τις κορυφές α, β , και που δεν είναι ακμές του μονοπατιού μ .

Εξετάζουμε αν υπάρχουν κορυφές του G που δεν είναι κορυφές του μονοπατιού μ .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω G ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και s μία κορυφή βαθμού $d \geq 2$.

Επιβεβαιώστε ότι: το G θα έχει τουλάχιστον d κορυφές βαθμού 1.

Για κάθε μία ακμή $e = \{s, u\}$ που προσπίπτει στην κορυφή s , μπορούμε να βρούμε ένα μονοπάτι (s, e, u, \dots, β) του G , που να μην είναι επεκτάσιμο από το άκρο β .



Αν δύο από αυτά τα μονοπάτια είχαν άλλη κοινή κορυφή εκτός από την s , θα σχηματιζόταν κύκλος στο G : αν x η πρώτη κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών μετά την s , στο G θα υπήρχε ο κύκλος $(s, \dots, x, \dots, u, \dots, s)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8

α Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου κάθε κορυφή έχει εισερχόμενες και εξερχόμενες ακμές. Επιβεβαιώστε ότι: το G θα έχει κύκλο.

β Είναι σωστό ότι: κάθε κορυφή του G θα ανήκει σε κάποιο κύκλο;