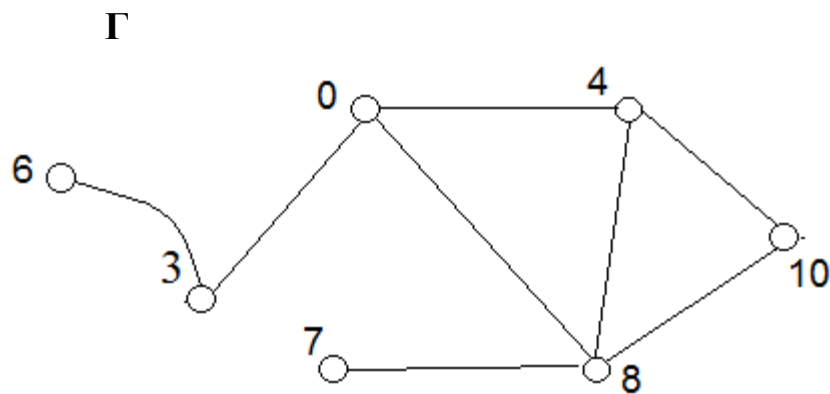


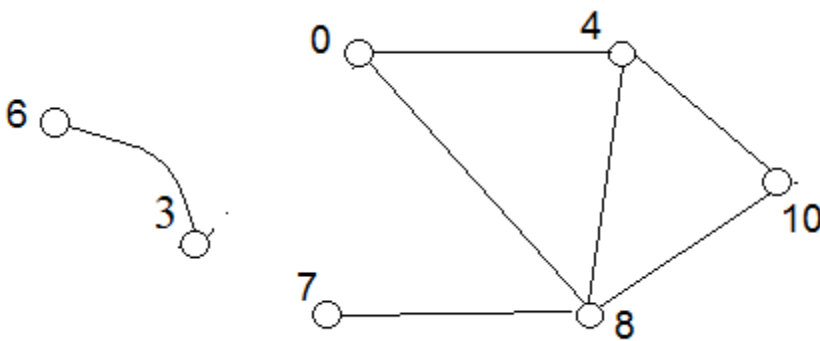
Γέφυρα μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Μία ακμή e του μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ ονομάζεται *γέφυρα* του G , όταν αληθεύει μία από τις παρακάτω *ισοδύναμες* συνθήκες:

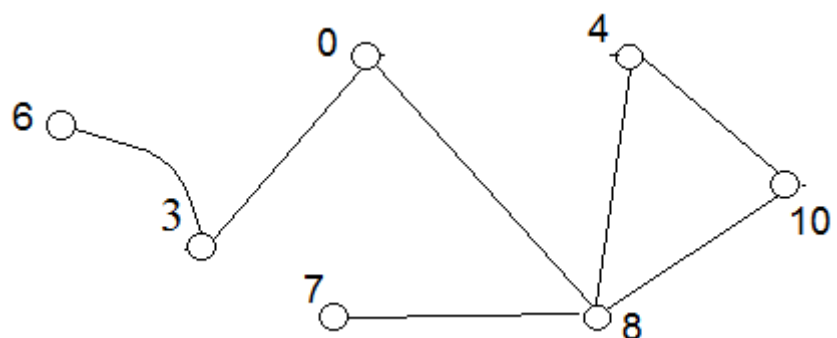
- A** Το γράφημα $G - e = (V, E - \{e\})$ δεν είναι συνεκτικό.
- B** Υπάρχουν κορυφές x, y του G ώστε: η ακμή e να εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή του G που έχει άκρα τις x, y .
- Γ** Δεν υπάρχει κύκλος του G όπου να εμφανίζεται η ακμή e .
Η ακμή $e = \{u, v\}$ είναι το *μοναδικό μονοπάτι* με άκρα u, v .



Γ - {0,3}



Γ - {0,4}

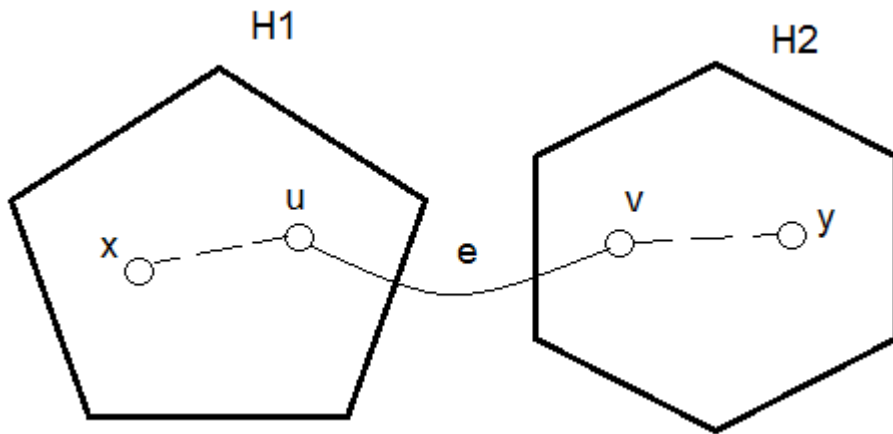


ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι: Αν η ακμή e είναι γέφυρα του συνεκτικού γραφήματος G , το γράφημα $G - e$ θα έχει μόνο δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Γενική μορφή συνεκτικού γραφήματος G με γέφυρα e

$H1, H2$ συνεκτικά, ξένα μεταξύ τους

e μοναδική ακμή του G που συνδέει τα $H1, H2$



$H1, H2$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - e$

Όταν $x \in H1, y \in H2$: η ακμή e θα εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή που συνδέει τις x, y .

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Έστω $H1, H2$ ξένα μεταξύ τους συνεκτικά γραφήματα. Συνδέουμε τα $H1, H2$ με μία μόνο ακμή $e = \{u, v\}$, όπου $u \in H1, v \in H2$.

Ελέγξτε ότι το γράφημα $G = H1 \cup H2 \cup \{u, v\}$ θα είναι συνεκτικό, και ότι η ακμή e θα είναι γέφυρα του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, e μία γέφυρα του G , και $H1, H2$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - e$.

α Επιβεβαιώστε ότι: αν $x \in H1, y \in H2$, η ακμή e θα εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή που συνδέει τις x, y .

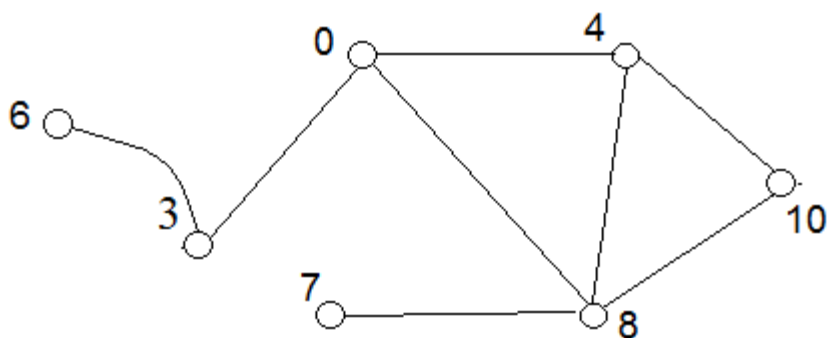
β Επιβεβαιώστε ότι οι γέφυρες του G θα είναι: οι γέφυρες των $H1, H2$ και η ακμή e .

Κομβικό σημείο μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

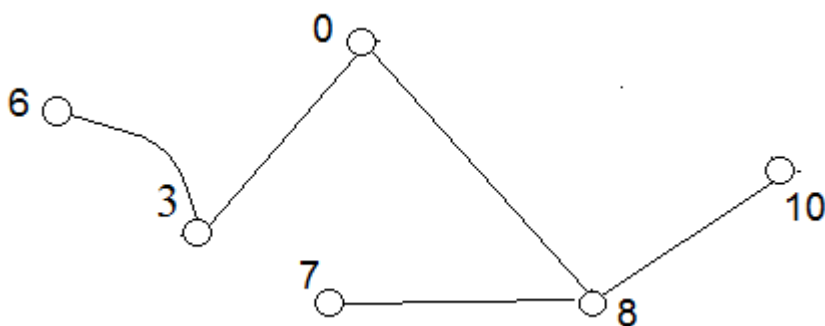
Μία κορυφή u του μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ ονομάζεται *κομβικό σημείο* του G , όταν αληθεύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

- A** Το γράφημα $G - u = (V - \{u\}, E - \{e \mid \text{η ακμή } e \text{ προσπίπτει στην } u\})$ δεν είναι συνεκτικό.
- B** Υπάρχουν κορυφές x, y του G , ώστε: η κορυφή u εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή του G που συνδέει τις x, y .
- Γ** Υπάρχουν δύο ακμές του G με άκρο την u τέτοιες ώστε: δεν υπάρχει κύκλος του G όπου να εμφανίζονται και οι δύο αυτές ακμές.

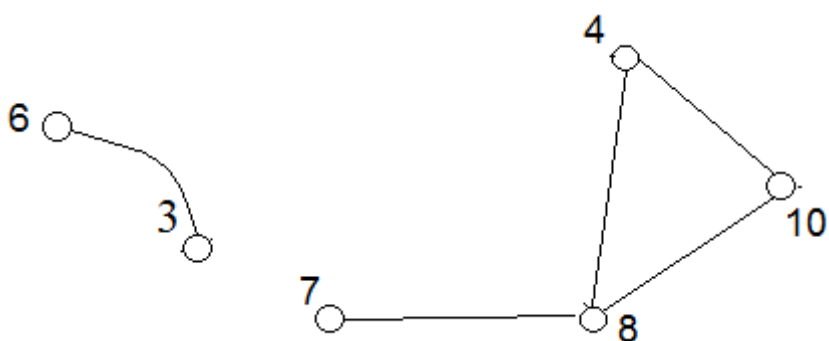
Γ



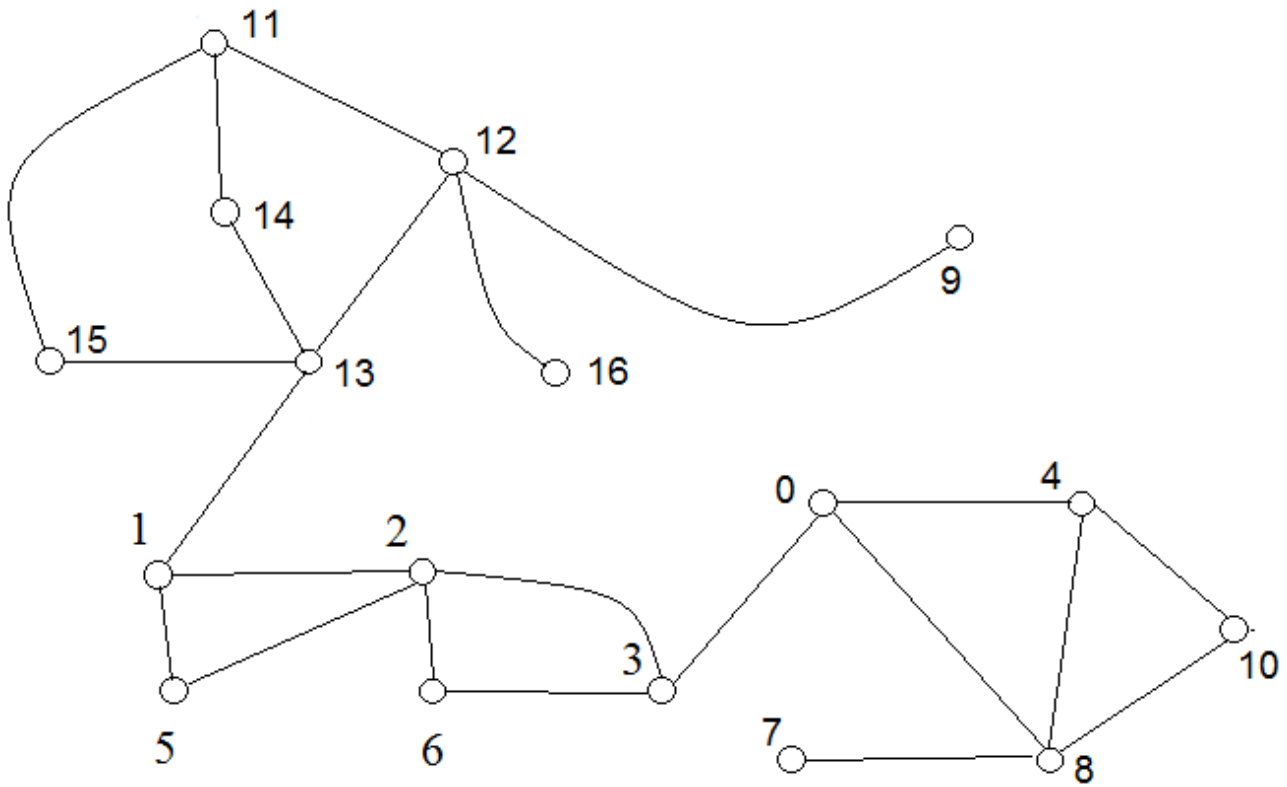
Γ - 4



Γ - 0



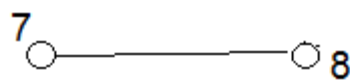
ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Βρείτε τις γέφυρες και τα κομβικά σημεία στο παρακάτω γράφημα.



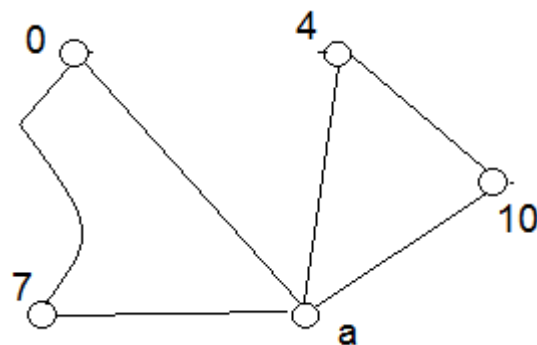
ΕΡΩΤΗΜΑ 5

Επιβεβαιώστε ότι: το άκρο μίας γέφυρας ενός συνεκτικού γραφήματος θα είναι κομβικό σημείο, αν και μόνο αν ο βαθμός του είναι τουλάχιστον 2.

Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα που να έχει γέφυρα και να μην έχει κομβικό σημείο.



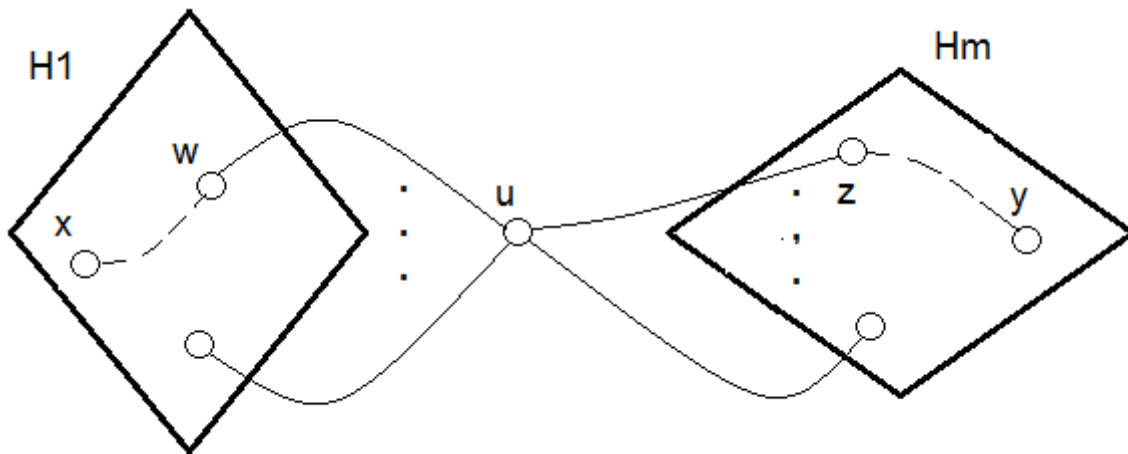
ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G με ένα κομβικό σημείο a όπου: κάθε ακμή με άκρο το a να περιέχεται σε κάποιο κύκλο του G .



ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Ένα συνεκτικό γράφημα G έχει μία κορυφή a βαθμού 2 , που περιέχεται σε κάποιο κύκλο. Ελέγξτε ότι το a δεν μπορεί να είναι κομβικό σημείο του G .

Γενική μορφή συνεκτικού γραφήματος G με κομβικό u :

$H_1 \dots H_m$, $m \geq 2$, συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους



$H_1 \dots H_m$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - u$

Όταν $x \in H_j$, $y \in H_k$, $k \neq j$: η κορυφή u θα εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή του G που συνδέει τις x, y .

Για κάθε ακμές $\{w, u\}$, $\{u, z\}$ όπου $w \in H_j$, $z \in H_k$, $k \neq j$: δεν υπάρχει κύκλος του G όπου να εμφανίζονται και οι δύο αυτές ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Επιβεβαιώστε ότι η κορυφή u του συνεκτικού γραφήματος G είναι κομβικό σημείο *άν και μόνο αν*:

Για κάθε ακμή $\{a, u\}$ του G , υπάρχει κάποια ακμή $\{u, b\}$ ώστε να μην υπάρχει κύκλος όπου να εμφανίζονται οι ακμές $\{a, u\}$, $\{u, b\}$.

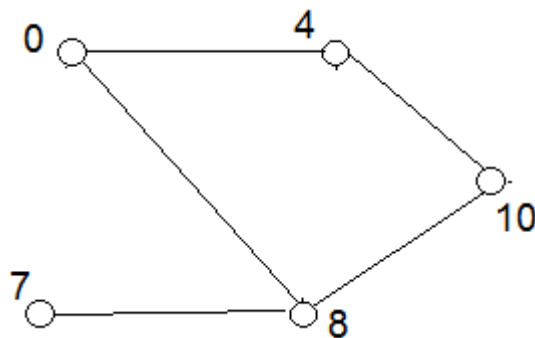
ΕΡΩΤΗΜΑ 9

Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με ένα κομβικό σημείο u , και x, y, z κορυφές του G που καθε μία ανήκει σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του $G - u$. Επιβεβαιώστε ότι :

- α Δεν υπάρχει κύκλος του G που να περιέχει τις κορυφές x, y .
- β Δεν υπάρχει μονοπάτι του G που να περιέχει τις κορυφές x, y, z .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

α Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα G με ένα μοναδικό κομβικό σημείο a , ώστε μία συνεκτική συνιστώσα του $G - a$ να έχει κομβικό σημείο.



β Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, u ένα κομβικό σημείο του G , και $H_1 \dots H_m$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - u$.

Είναι σωστό ότι τα κομβικά σημεία του G θα είναι: τα κομβικά σημεία των $H_1 \dots H_m$ και η κορυφή u ;

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Έστω G ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι :

- α Κάθε ακμή του G είναι γέφυρα.
- β Κάθε κορυφή του G με βαθμό μεγαλύτερο από 1 είναι κομβικό σημείο.