Ισχυρή προσβασιμότητα

Για ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζουμε *ισχυρή προσβασιμότητα για το* G ,
την παρακάτω σχέση $\mathbf{R}_{\delta\delta}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $\mathbf{R}_{\delta\delta}(a, b)$ = true όταν:
$a \ R_\delta \ b$ και $b \ R_\delta \ a$

Συμβολισμός: $a \ \mathbf{R}_{\delta\delta} \ b$ σημαίνει $\mathbf{R}_{\delta\delta}(a, b)$ = true

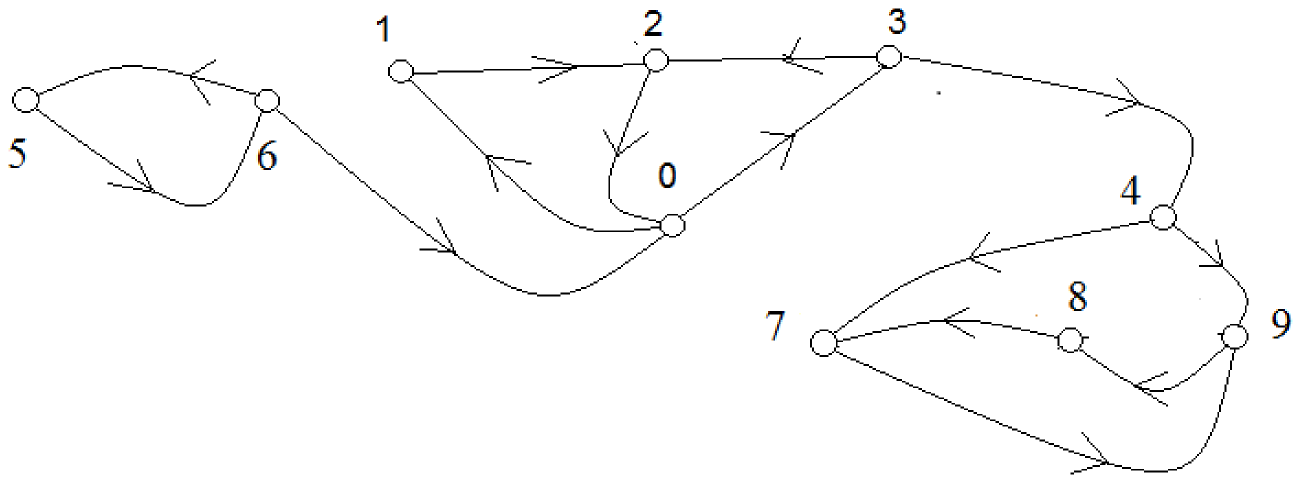
ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε γράφημα:

$a \ \mathbf{R}_{\delta\delta} \ b$ *άν και μόνο άν*
υπάρχει κάποια *κλειστή διαδρομή* όπου εμφανίζονται οι a , b .

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Βρείτε ζεύγη κορυφών όπου αληθεύει / δεν αληθεύει η ισχυρή προσβασιμότητα.

Γ1



$R_{\delta\delta}(6, 5) = R_{\delta\delta}(3, 1) = R_{\delta\delta}(8, 8)$ = true

$R_{\delta\delta}(8, 4)$ = false

σε οποιαδήποτε διαδρομή με αρχή την κορυφή 8,
μπορούν να εμφανιστούν *μόνο* οι κορυφές 7, 8, 9.

$R_{\delta\delta}(4, 4)$ = false $R_{\delta\delta}(3, 6)$ = false

1 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) *, η ισχυρή προσβασιμότητα για το* G *είναι συμμετρική.*

<u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο V: $u\ R_{\delta\delta}\ v$ *implies* $v\ R_{\delta\delta}\ u$

Άν υπάρχει κάποια κλειστή διαδρομή όπου εμφανίζονται οι u και v , *η ίδια* κλειστή διαδρομή θα περιέχει τις κορυφές v και u .

2 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) *, η ισχυρή προσβασιμότητα για το* G *είναι μεταβατική.*

<u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο V: $(u\ R_{\delta\delta}\ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v}\ R_{\delta\delta}\ w)$ *implies* $u\ R_{\delta\delta}\ w$

I) ***Υποθέτω ότι αληθεύει*** $\alpha\ R_{\delta\delta}\ \boldsymbol{\beta}$ *and* $\boldsymbol{\beta}\ R_{\delta\delta}\ \gamma$

Άρα $\alpha\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}$ *and* $\boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \alpha$ *and* $\boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \gamma$ *and* $\gamma\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}$

οπότε $\underline{\alpha\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}\ \textit{and}\ \boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \gamma}$ *and* $\underline{\gamma\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}\ \textit{and}\ \boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \alpha}$

II) ***Θέλω να αληθεύει*** $\alpha\ R_{\delta\delta}\ \gamma$

Δηλαδή να αληθεύει $\alpha\ R_{\delta}\ \gamma$ *and* $\gamma\ R_{\delta}\ \alpha$

Εφαρμόζω την μεταβατικότητα της R_{δ} στις δηλώσεις:

$\underline{\alpha\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}\ \textit{and}\ \boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \gamma}$ $\underline{\gamma\ R_{\delta}\ \boldsymbol{\beta}\ \textit{and}\ \boldsymbol{\beta}\ R_{\delta}\ \alpha}$

Ισχυρά συνεκτικό γράφημα

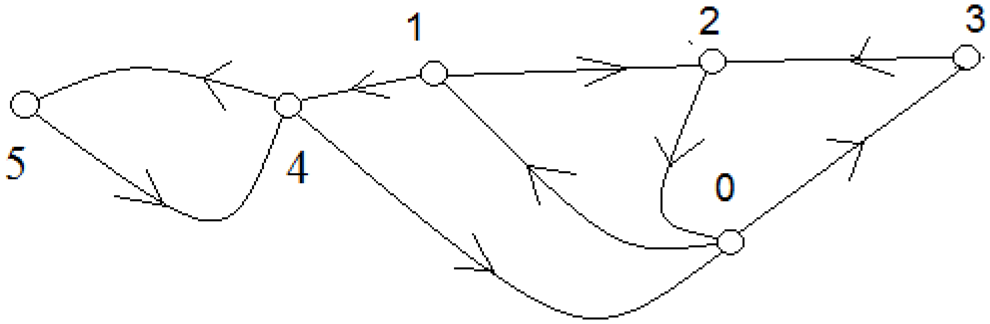
Ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** *μόνο όταν*:

Για οποιαδήποτε <u>διαφορετικά</u> στοιχεία x, y του V : $R_{\delta\delta}(x, y) = true$.

Ένα γράφημα G = (V, E) είναι **μη-ισχυρά συνεκτικό** *μόνο όταν*:

Υπάρχουν δύο <u>διαφορετικά</u> στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_{\delta\delta}(x, y) = false$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Ελέγξτε ότι το παρακάτω γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.



ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα που έχει *μόνο μία κορυφή*, είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό, *άν και μόνο άν* είναι συνεκτικό.

.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε <u>ισχυρά συνεκτική συνιστώσα</u> <u>του G</u> ,
ένα *επαγόμενο υπο-γράφημα* <u>H</u> = (W, Z) του G το οποίο:

(1) είναι ισχυρά συνεκτικό, **και**

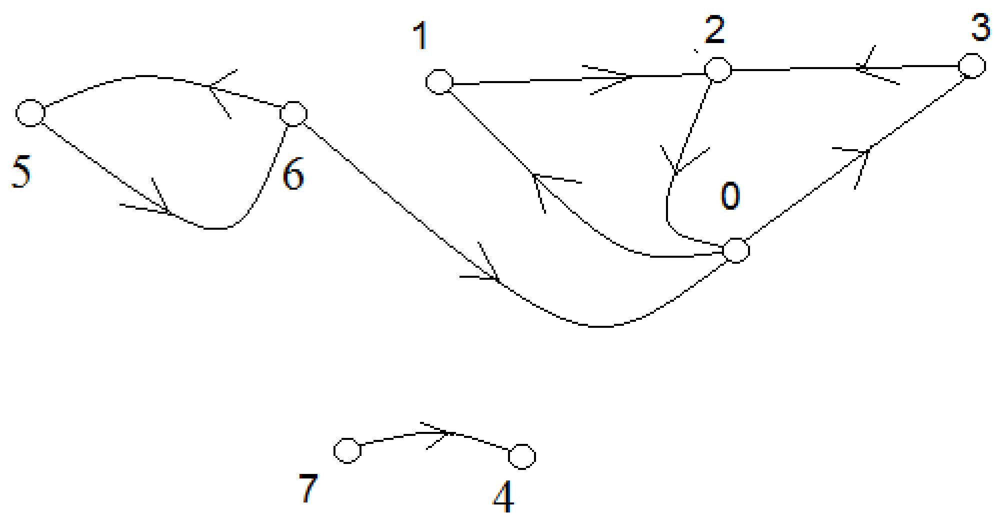
(2) δεν υπάρχει *κλειστή διαδρομή* του G που να συνδέει κορυφή του W με κορυφή εκτός του W .

ΕΡΩΤΗΜΑ 6

α Βρείτε τις *ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες* του γραφήματος Z1 .

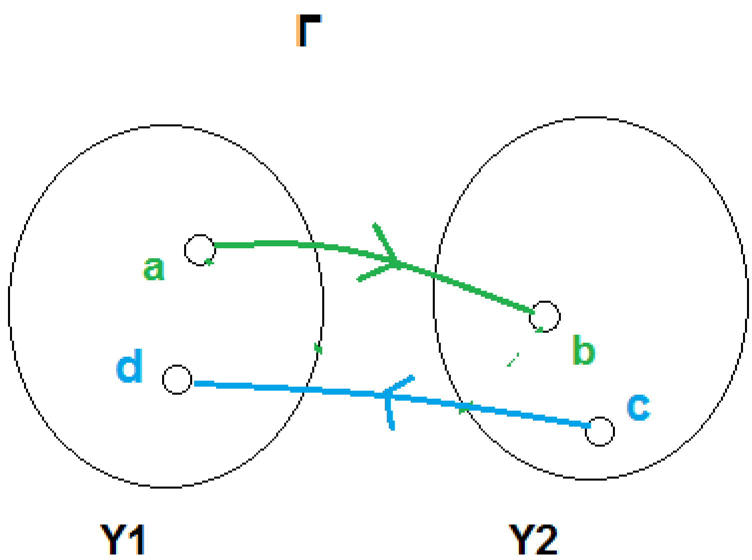
β Βρείτε τις *ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες* του Z1, που *δεν περιέχουν την κορυφή* 2.

Z1



ΠΡΟΤΑΣΗ 1 Έστω Γ = (V, E) ένα *ισχυρά συνεκτικό* γράφημα, και Y1, Y2 δύο <u>μη-κενά</u> <u>ξένα</u> υπο-σύνολα του V ώστε **V = Y1 ∪ Y2** .

Αποδείξτε ότι: Υπάρχει κλειστή διαδρομη του Γ που περιέχει κορυφή του Y1 και κορυφή του Y2.



ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω ένα κατευθυνόμενο ισχυρά συνεκτικό γράφημα G . Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι η *μοναδική* ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G .

Χρησιμοποιείστε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 1.*

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα G, και H1 , H2 δύο *διαφορετικές* ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν x , y είναι κορυφές των H1 , H2 αντίστοιχα, $R_{\delta\delta}(x, y) = \text{false}$.

Χρησιμοποιείστε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 1.*

β Δεν υπάρχει κοινή κορυφή των H1 , H2 . Χρησιμοποιείστε το *α* .

Άν x , y είναι κορυφές των H1 , H2 αντίστοιχα και c είναι κοινή κορυφή των H1 , H2 : από την ισχυρή συνεκτικότητα των H1 , H2 , x $\mathbf{R}_{\delta\delta}$ c και c $\mathbf{R}_{\delta\delta}$ y – και από την μεταβατικότητα της σχέσης $\mathbf{R}_{\delta\delta}$ θα έχουμε x $\mathbf{R}_{\delta\delta}$ y , το οποίο είναι αδύνατο λόγω του α .

γ Δύο διαφορετικές κορυφές x , y του G είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G , *άν και μόνο άν* $R_{\delta\delta}(x, y) = \text{true}$.

Χρησιμοποιείστε το *α* .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΧΥΡΗ ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Για κάθε *κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ,
υπάρχει διαμερισμός X1 ... Xκ του V , όπου:

(1) Το επαγόμενο υπο-γράφημα που αντιστοιχεί σε κάθε διαμέρισμα X_j , είναι *ισχυρά συνεκτικό*.

(2) Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V σε διαφορετικά διαμερίσματα: $R_{\delta\delta}(x, y)$ = false .

Από τον *ΟΡΙΣΜΟ* της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας και το *ΕΡΩΤΗΜΑ 8* προκύπτει:

Διαμερισμός κατευθυνόμενου γραφήματος σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

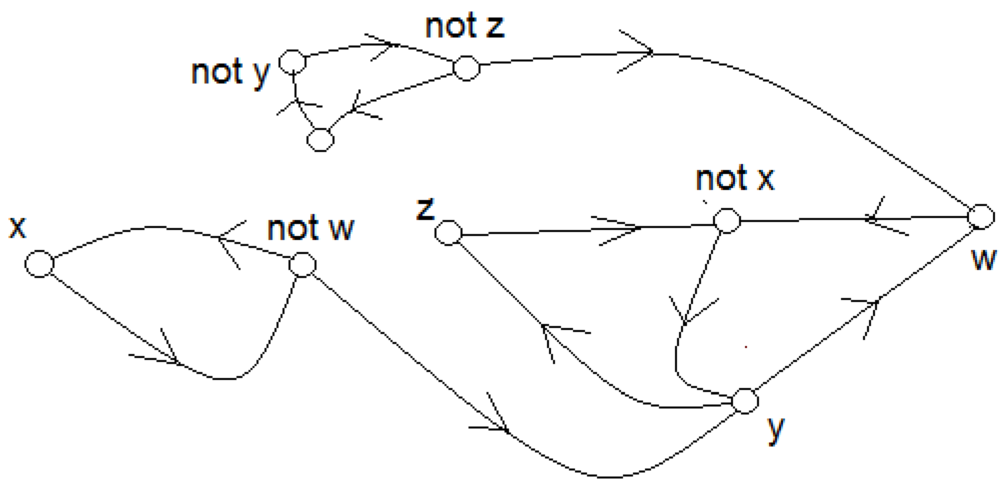
Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα και H1 ... Hλ , λ ≥ 1 οι *διαφορετικές* ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G .

A Τα υπο-γραφήματα H1 ... Hλ του G είναι *ισχυρά συνεκτικά*, και διαμερίζουν τις κορυφές *και τις κλειστές διαδρομές* του G .

Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V σε διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες: $R_{\delta\delta}(x, y)$ = false .

B Τα υπο-γραφήματα H1 ... Hλ του G είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών διαδρομών του G σε ισχυρά συνεκτικά υπο-γραφήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Για το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα:



α Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να είναι ισχυρά συνεκτικά*.

β Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να διαμερίζουν και τις κλειστές διαδρομές*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Α Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και G1 ... Gκ , ένας διαμερισμός των κορυφών *και των κλειστών διαδρομών* του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι <u>ένωση ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών</u> του G .

Β Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και G1 ... Gκ , ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα *ισχυρά συνεκτικά* διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι <u>υπο-γράφημα κάποιας ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας</u> του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Έστω $G1 = (V1, E1)$, $G2 = (V2, E2)$, ισχυρά συνεκτικά κατευθυνόμενα γραφήματα. Επιβεβαιώστε ότι: Άν τα $G1$, $G2$ έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

a Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα,
και δ μία κλειστή διαδρομή που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

b Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα,
και δ μία διαδρομή που τα άκρα της είναι κορυφές του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.