

## **Μεταβατικότητα**

Η σχέση  $\theta$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται **μεταβατική** μόνο όταν:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ  $u \in A$

ΓΙΑ ΚΑΘΕ  $v \in A$

ΓΙΑ ΚΑΘΕ  $w \in A$

Αν  $\theta(u, v) = \theta(v, w) = \text{true}$  , τότε  $\theta(u, w) = \text{true}$

## **Εύρεση αντιπαραδείγματος της μεταβατικότητας**

Ελέγχουμε αν αληθεύει ότι:

ΥΠΑΡΧΕΙ  $u \in A$

ΥΠΑΡΧΕΙ  $v \in A$

ΥΠΑΡΧΕΙ  $w \in A$

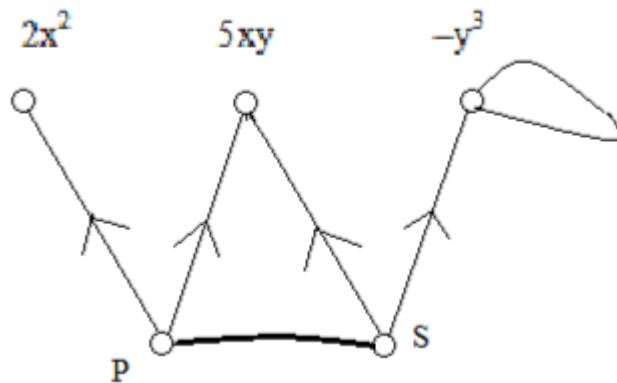
$\theta(u, v) = \text{true}$  and  $\theta(v, w) = \text{true}$  and  $\theta(u, w) = \text{false}$

Μία τριάδα  $(u, v, w)$  όπου  $\theta(u, v) = \text{true}$  and  $\theta(v, w) = \text{true}$  and  $\theta(u, w) = \text{false}$  είναι **αντιπάρδειγμα της μεταβατικότητας**

Μία σχέση είναι μεταβατική *άν και μόνο αν* :

Δεν υπάρχει αντιπάρδειγμα της μεταβατικότητας

Γ



$\theta_\Gamma$  όχι μεταβατική:

$$\theta_\Gamma(P, S) = \text{true} \quad \theta_\Gamma(S, 5xy) = \text{true} \quad \theta_\Gamma(P, 5xy) = \text{true}$$

Η τριάδα  $(P, S, 5xy)$  δεν είναι αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας της  $\theta_\Gamma$

$$\theta_\Gamma(P, S) = \text{true}, \quad \theta_\Gamma(S, -y^3) = \text{true}, \quad \theta_\Gamma(P, -y^3) = \text{false}$$

Η τριάδα  $(P, S, -y^3)$  είναι αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας της  $\theta_\Gamma$

$$\theta_\Gamma(S, -y^3) = \text{true}, \quad \theta_\Gamma(-y^3, -y^3) = \text{true}, \quad \theta_\Gamma(S, -y^3) = \text{true}$$

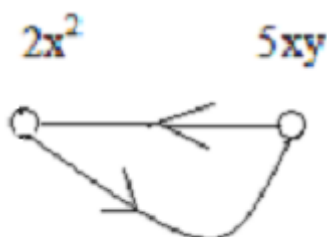
Η τριάδα  $(S, -y^3, -y^3)$  δεν είναι αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας της  $\theta_\Gamma$

**ΕΡΩΤΗΜΑ 0** Είναι δυνατό να υφίσταται αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας μιας σχέσης  $\theta$ , που να είναι τριάδα της μορφής  $(x, x, z)$ ; ή της μορφής  $(x, z, z)$ ; ή της μορφής  $(x, y, x)$ ;

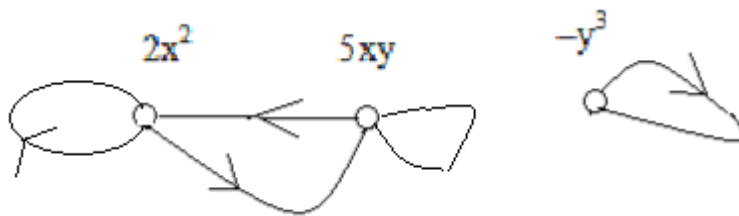
**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Δεν μπορεί να υπάρξει αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας μιας σχέσης  $\theta$ , που να είναι τριάδα της μορφής  $(x, x, z)$  ή της μορφής  $(x, z, z)$ .

Είναι δυνατό να υφίσταται αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας μιας σχέσης  $\theta$ , που να είναι τριάδα της μορφής  $(x, y, x)$ .



$\Delta 2$

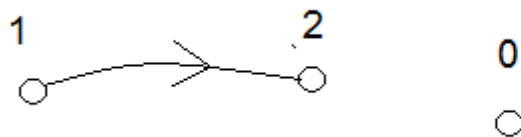


$\theta_{\Delta 2}$  μεταβατική: Ελέγχοντας κάθε δυνατή τριάδα κορυφών, καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας της  $\theta_{\Delta 2}$ .

Οι δυνατές τριάδες κορυφών του γραφήματος  $\Delta 2$  είναι 27.

Μπορείτε να κάνετε τον έλεγχο συντομότερα;

$\mathbf{E}$



$\theta_{\mathbf{E}}$  μεταβατική:

Δεν μπορεί να υπάρξει αντιπαράδειγμα, επειδή δεν υπάρχει τριάδα  $(u, v, w)$  ώστε  $\theta_{\mathbf{E}}(u, v) = \theta_{\mathbf{E}}(v, w) = \text{true}$  :

άν  $\theta_{\mathbf{E}}(u, v) = \text{true}$ , πρέπει να είναι  $u = 1$  και  $v = 2$

άν  $\theta_{\mathbf{E}}(v, w) = \text{true}$ , πρέπει να είναι  $v = 1$  και  $w = 2$

Άρα, δεν μπορώ να έχω  $\theta_{\mathbf{E}}(u, v) = \text{true}$  και  $\theta_{\mathbf{E}}(v, w) = \text{true}$  ταυτόχρονα.

1 Η σχέση  $\theta(x, y) = \langle x > y \rangle$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο αριθμών  $A$ , είναι μεταβατική.

Αν  $\theta(u, v) = \theta(v, w) = \text{true}$ , τότε  $\theta(u, w) = \text{true}$

Αν:  $u > v$  και  $v > z$  Τότε:  $u > z$

Η σχέση  $\langle x > y \rangle$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\{ 17 \}$ , είναι μεταβατική.

1<sup>ος</sup> τρόπος Αν:  $u > v$  και  $v > z$  Τότε:  $u > z$

2<sup>ος</sup> τρόπος Δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας  
 $\theta(17, 17) = \text{false}$

2 Η σχέση  $\langle x \neq y \rangle$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο αριθμών  $A$  :

Όταν  $A = \{ 6 \}$  ή  $A = \{ \}$ ,  
η σχέση  $\langle x \neq y \rangle$  είναι μεταβατική.

Γράφημα για τη σχέση  $\langle x \neq y \rangle$  όταν  $A = \{ 6 \}$  :



Δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας

Όταν  $A = \{ 4, 7 \}$  ή  $A = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ ,  
η σχέση  $\langle x \neq y \rangle$  δεν είναι μεταβατική.

Γράφημα για τη σχέση  $\langle x \neq y \rangle$  όταν  $A = \{ 4, 7 \}$  :

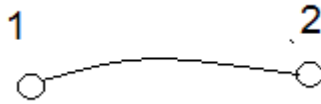


Η τριάδα  $(4, 7, 4)$  είναι αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας:  $4 \neq 7 \neq 4$ , αλλά  $4 = 4$

### ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Είναι σωστό ότι: Αν η σχέση  $\theta$  με πεδίο ορισμού το  $A$  είναι συμμετρική, θα είναι και μεταβατική;

Αντιπαράδειγμα: Η σχέση που συμβολίζει το γράφημα

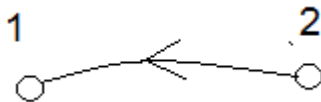


Η σχέση δεν είναι μεταβατική λόγω του αντιπαραδείγματος  $(1, 2, 1)$ .

### ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Είναι σωστό ότι: Αν η σχέση  $\theta$  με πεδίο ορισμού το  $A$  είναι μεταβατική, θα είναι και συμμετρική;

Αντιπαράδειγμα: Η σχέση που συμβολίζει το γράφημα



Δεν υπάρχουν  $u, v, w$  ώστε  $\theta(u, v) = \text{true}$  and  $\theta(v, w) = \text{true}$ , άρα δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα της μεταβατικότητας: η σχέση είναι μεταβατική.

### ΕΡΩΤΗΜΑ 3

Είναι σωστό ότι: Η σχέση «  $x \neq y$  » με πεδίο ορισμού ένα σύνολο αριθμών  $A$  είναι μεταβατική, αν και μόνο αν το  $A$  έχει το πολύ ένα στοιχείο;

### ΕΡΩΤΗΜΑ 4

**α** Έστω ότι το γράφημα  $\Gamma$  συμβολίζει μια μεταβατική σχέση.

Επιβεβαιώστε ότι: Αν στο  $\Gamma$  υπάρχει διαδρομή από κάποια κορυφή  $u$  σε κορυφή  $v$ , θα υπάρχει και ακμή από την  $u$  στην  $v$ .

**β** Έστω ότι για κάποιο γράφημα  $\Gamma$ : Αν υπάρχει διαδρομή από κάποια κορυφή  $u$  σε κορυφή  $v$ , θα υπάρχει και ακμή από την  $u$  στην  $v$ .

Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα  $\Gamma$  συμβολίζει μια μεταβατική σχέση.