Διμερής σχέση θ : <u>μπουλιανή συνάρτηση δύο μεταβλητών</u>

ΓΡΑΦΗΜΑ **Γ** = (V , E) *συμβολίζει* μία (διμερή) <u>σχέση</u> $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$

<u>Πεδίο ορισμού της</u> $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ είναι το V

$\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ (x ,y) = true : Μόνο άν υπάρχει *κατευθυνόμενη* ακμή (x , y) ,
είτε υπάρχει *μη-κατευθυνόμενη* ακμή {x, y}

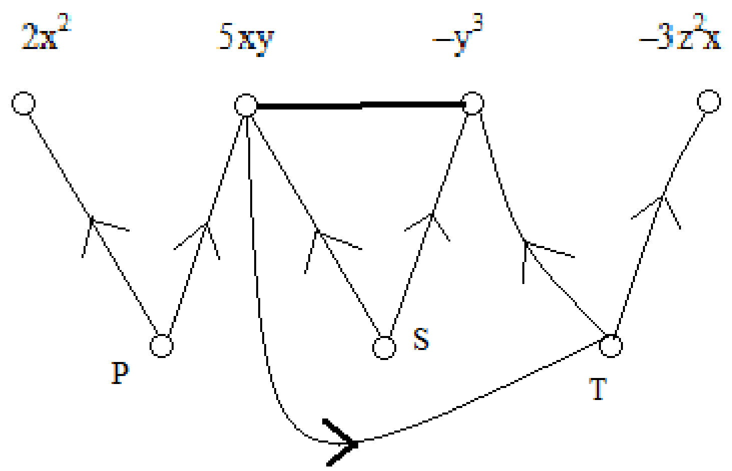
ΓΡΑΦΗΜΑ **Γ** = (V, E) *συμβολίζει την* <u>σχέση</u> <u>προσβασιμότητας</u> $\mathbf{R}_\delta$

<u>Πεδίο ορισμού της</u> $\mathbf{R}_\delta$ είναι το V

$\mathbf{R}_\delta$ (x, y) = true : Μόνο άν στο G υπάρχει (μία τουλάχιστον) *διαδρομή*
με αρχή την x και τέλος την y .

Συμβολισμός: a $\mathbf{R}_\delta$ b σημαίνει $\mathbf{R}_\delta$(a, b) = true

Γ



ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΟΥ **Γ**

(T , (T, $-y^3$) , $-y^3$, **{ 5xy, $-\mathbf{y}^3$ }** , 5xy, **{ 5xy, $-\mathbf{y}^3$ }**, $-y^3$)

$\mathbf{R}_\delta$(P, T) = true $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ (P, T) = false $\mathbf{R}_\delta$(P, P) = false

$\mathbf{R}_\delta$(T, T) = true

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

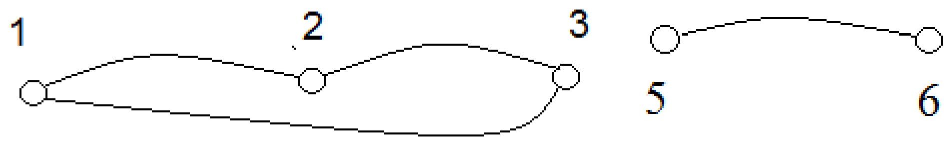
Μπορείτε να βρείτε ένα γράφημα **Γ** όπου, για κάποιες κορυφές a , b ,

$\mathbf{R}_\delta$(a, b) = false και $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ (a, b) = true ;

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Βρείτε τα ζεύγη κορυφών όπου αληθεύει / δεν αληθεύει η προσβασιμότητα.

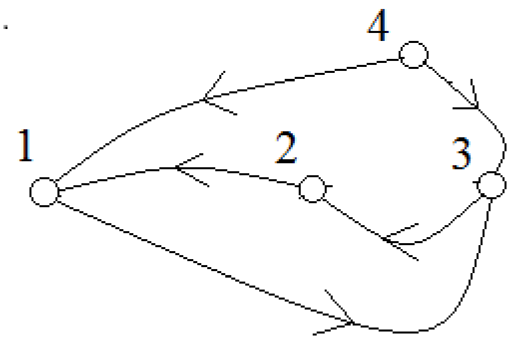
Γ1



$R_\delta(5,\ 3) = R_\delta(5,\ 2) = R_\delta(5,\ 1) =$ false :

σε οποιαδήποτε διαδρομή με αρχή την 5, μπορούν να εμφανιστούν *μόνο* οι κορυφές 6, 5.

Γ2



για οποιαδήποτε κορυφή u , $R_\delta(u,\ 4) =$ false :

δεν υπάρχει ακμή που να καταλήγει στην κορυφή 4.

1 *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G *, η προσβασιμότητα για το* G *είναι συμμετρική.*

Να δείξω ότι <u>ισχύει</u> στο V: $u\ R_\delta\ v$ *implies* $v\ R_\delta\ u$

I) *Υποθέτω ότι αληθεύει* $\alpha\ R_\delta\ \beta$

II) *Θέλω να αληθεύει* $\beta\ R_\delta\ \alpha$

I Έστω ότι <u>δίνεται</u> διαδρομή $\delta = (\ \alpha, e, \ldots, \{x, \beta\}, \beta\ )$

II *Αντιστρέφω* την δ :

<u>προκύπτει</u> μία διαδρομή $\delta 1 = (\ \beta, \{x, \beta\}, x, \ldots, e, \alpha\ )$

2 Για κάθε γράφημα G , *η προσβασιμότητα για το* G *είναι μεταβατική.*

Να δείξω ότι <u>ισχύει</u> στο V: $(\ u\ R_\delta\ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v}\ R_\delta\ w\ )$ *implies* $u\ R_\delta\ w$

I) *Υποθέτω ότι αληθεύει* $\alpha\ R_\delta\ \boldsymbol{\beta}$ *and* $\boldsymbol{\beta}\ R_\delta\ \gamma$

II) *Θέλω να αληθεύει* $\alpha\ R_\delta\ \gamma$

I Έστω ότι <u>δίνονται</u> διαδρομές $\delta_1 = (\alpha, e, \ldots, f, \boldsymbol{\beta})$,

$\delta_2 = (\boldsymbol{\beta}, e', \ldots, f', \gamma)$

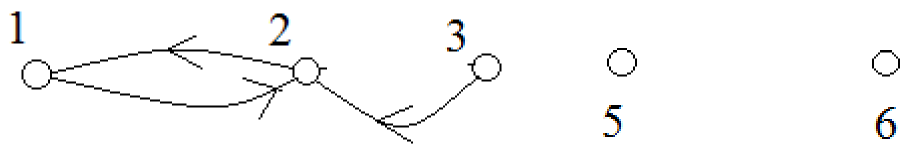
II *Συγχωνεύω* τις δ_1 , δ_2 :

<u>προκύπτει</u> μία διαδρομή $\delta = (\alpha, e, \ldots, f, \boldsymbol{\beta}, e', \ldots, f', \gamma)$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Βρείτε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου

η προσβασιμότητα <u>δεν είναι συμμετρική</u>.

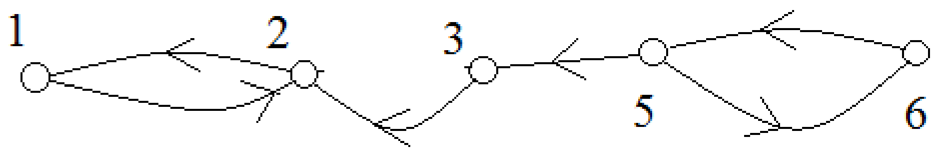
Δ1



$R_\delta(2, 3)$ = false :

σε μία διαδρομή με αρχή την 2, μπορούν να εμφανιστούν *μόνο* οι κορυφές 2, 1 .

Δ2



$R_\delta(3, 5)$ = false :

σε μία διαδρομή με αρχή την 3, μπορούν να εμφανιστούν *μόνο* οι κορυφές 3, 2, 1 .

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Ποιές από αυτές τις προτάσεις αληθεύουν για κάθε γράφημα **Γ** ;

1α Άν η σχέση $\mathbf{R}_\delta$ είναι συμμετρική, τότε και η σχέση $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ θα είναι συμμετρική.

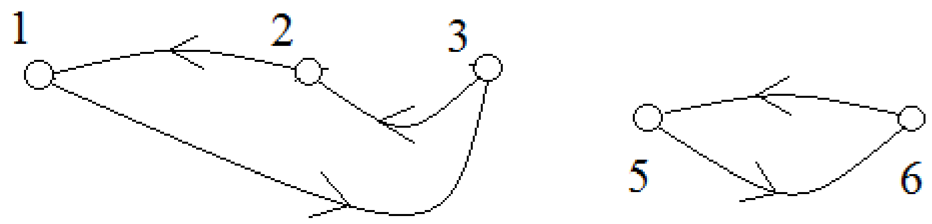
1β Άν η σχέση $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ είναι συμμετρική, τότε και η σχέση $\mathbf{R}_\delta$ θα είναι συμμετρική.

2α Άν η σχέση $\mathbf{R}_\delta$ είναι μεταβατική, τότε και η σχέση $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ θα είναι μεταβατική.

2β Άν η σχέση $\boldsymbol{\theta}_\Gamma$ είναι μεταβατική, τότε και η σχέση $\mathbf{R}_\delta$ θα είναι μεταβατική.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Βρείτε κατευθυνόμενα γραφήματα όπου η προσβασιμότητα <u>είναι συμμετρική</u>.

Ε1

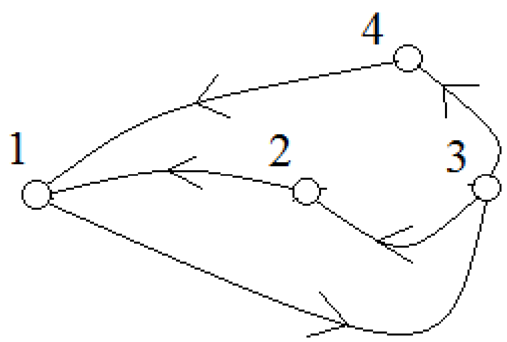


Άν $u \in \{1, 2, 3\}$, $v \in \{5, 6\}$: $R_\delta(u, v) = R_\delta(v, u) = \text{false}$

Άν $u \in \{1, 2, 3\}$, $v \in \{1, 2, 3\}$: $R_\delta(u, v) = R_\delta(v, u) = \text{true}$

Άν $u \in \{5, 6\}$, $v \in \{5, 6\}$: $R_\delta(u, v) = R_\delta(v, u) = \text{true}$

Ε2



ΚΛΕΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΟΥ **Ε2** που περιέχει *όλες* τις κορυφές

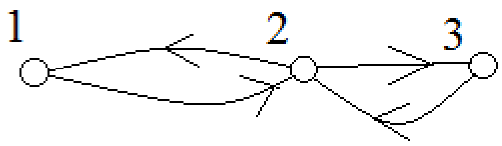
(**4**, (4, 1), **1**, (1, 3), **3**, (3, 2), **2**, (2, 1), **1**, (1, 3), **3**, (3, 4), **4**)

$R_\delta(u, v) = R_\delta(v, u) = \text{true}$ για οποιεσδήποτε u, v

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Επιβεβαιώστε ότι: σε ένα γράφημα όπου υπάρχει μία κλειστή διαδρομή που περιέχει όλες τις κορυφές, $R_\delta(u, v) = R_\delta(v, u) = \text{true}$ για οποιεσδήποτε κορυφές u, v .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι: σε κάθε *κλειστή διαδρομή του* **Ε3** που περιέχει όλες τις κορυφές, θα εμφανίζεται (μία τουλάχιστον) επαναλαμβανόμενη κορυφή.

Ε3

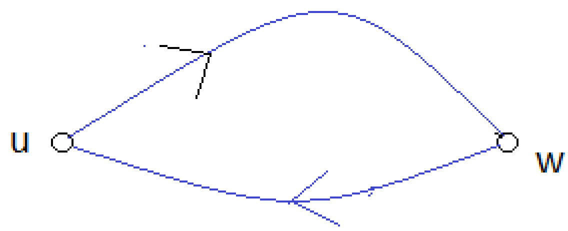


ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Έστω ότι για κάποιο γράφημα Γ:

Άν υπάρχει *μονοπάτι* από κάποια κορυφή u σε κορυφή v,

θα υπάρχει και *ακμή* από την u στην v .

Είναι σωστό ότι: Το γράφημα Γ θα συμβολίζει μια μεταβατική σχέση;

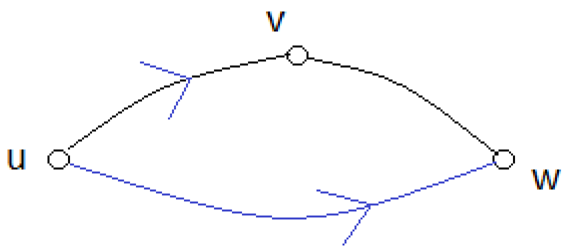


ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Έστω ότι για κάποιο γράφημα Γ:

Άν υπάρχει *διαδρομή* από κάποια κορυφή u σε κορυφή v,

θα υπάρχει και *ακμή* από την u στην v .

Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα Γ συμβολίζει μια μεταβατική σχέση.



Άν $\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}(\mathrm{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathrm{w}) = \mathrm{true}$,

τότε $\mathbf{R}_{\delta}(\mathrm{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}_{\delta}(\mathbf{v}, \mathrm{w}) = \mathrm{true}$, άρα $\mathbf{R}_{\delta}(\mathrm{u}, \mathrm{w}) = \mathrm{true}$

άρα $\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}(\mathrm{u}, \mathrm{w}) = \mathrm{true}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Η σχέση θ με πεδίο ορισμού Α λέγεται **μεταβατική** μόνο όταν:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $u \in A$, $v \in A$, $w \in A$: Άν $\theta(u, \mathbf{v}) = \theta(\mathbf{v}, w) = \text{true}$,
τότε $\theta(u, w) = \text{true}$

Έστω ότι το γράφημα Γ συμβολίζει μια μεταβατική σχέση. Επιβεβαιώστε ότι:

Άν στο Γ υπάρχει *διαδρομή* από κάποια κορυφή u σε κορυφή v,
θα υπάρχει και *ακμή* από την u στην v .

ΔΙΑΔΡΟΜΗ $(u_1, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots, u_K, e_K, u_{K+1}, \dots, e_{N-1}, u_N)$

Επειδή $\theta(u_1, u_2) = \theta(u_2, \mathbf{u_3}) = \text{true}$, θα είναι $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_3}) = \text{true}$

Επειδή $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_3}) = \theta(u_3, \mathbf{u_4}) = \text{true}$, θα είναι $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_4}) = \text{true}$

Επειδή $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_4}) = \theta(u_4, \mathbf{u_5}) = \text{true}$, θα είναι $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_5}) = \text{true}$

. . .

Επειδή $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_K}) = \theta(u_K, \mathbf{u_{K+1}}) = \text{true}$,
θα είναι $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_{K+1}}) = \text{true}$

. . .

Επειδή $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_{N-1}}) = \theta(u_{N-1}, \mathbf{u_N}) = \text{true}$,
θα είναι $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_N}) = \text{true}$