

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία κορυφών / ακμών είναι διαδρομή όταν (και **μόνο** όταν):

- 1) Το πρώτο στοιχείο της είναι εμφάνιση κορυφής, και υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία.
- 2) Αν ένα στοιχείο που δεν είναι το τελευταίο είναι εμφάνιση μίας κορυφής u , στο επόμενο θα εμφανίζεται: είτε μία κατευθυνόμενη ακμή (u, v) , είτε μία μη-κατευθυνόμενη ακμή $\{u, v\}$
(επομένως η ακολουθία θα περιέχει τουλάχιστον μία εμφάνιση ακμής).
- 3) Όπου εμφανίζεται μία κατευθυνόμενη ακμή (u, v) , θα περιλαμβάνεται σε υπο-ακολουθία $\dots u, (u, v), v \dots$
Όπου εμφανίζεται μία μη-κατευθυνόμενη ακμή $\{u, v\}$, θα περιλαμβάνεται σε υπο-ακολουθία $\dots u, \{u, v\}, v \dots$ ή σε υπο-ακολουθία $\dots v, \{u, v\}, u \dots$
(επομένως το τελευταίο στοιχείο θα είναι εμφάνιση κορυφής).

Μήκος μίας διαδρομής είναι: ο αριθμός εμφανίσεων ακμών (πάντα ≥ 1)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα γράφημα και $\{u, v\}$ μία μη-κατευθυνόμενη ακμή του Γ .

Έστω Γ_2 το γράφημα $(V, (E - \{\{u, v\}\}) \cup \{(u, v), (v, u)\})$,

όπου η ακμή (u, v) του Γ έχει αντικατασταθεί από δύο κατευθυνόμενες ακμές.

- A** Αν το Γ έχει μία διαδρομή από την κορυφή x στην κορυφή y ,
Τότε το Γ_2 θα έχει μία διαδρομή από την x στην y .
- B** Αν το Γ_2 έχει μία διαδρομή από την κορυφή x στην κορυφή y ,
Τότε το Γ θα έχει μία διαδρομή από την x στην y .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΟΥΜΕ ΟΤΙ :

Αν το Γ έχει μία διαδρομή από την κορυφή x στην κορυφή y ,
Τότε το Γ_2 θα έχει μία διαδρομή από την x στην y .

I) Δεδομένα

$\Gamma = (V, E)$ δεδομένο γράφημα

$\{u, v\}$ δεδομένη μη-κατευθυνόμενη ακμή του Γ

$\Gamma_2 = (V, (E - \{ \{u, v\} \}) \cup \{ (u, v), (v, u) \})$

δ δεδομένη διαδρομή του Γ από την κορυφή x στην κορυφή y

II) Ζητούμενο

Διαδρομή δ_2 του Γ_2 από την κορυφή x στην κορυφή y

III) Εύρεση του ζητούμενου χρησιμοποιώντας τα δεδομένα

α Η ακμή $\{u, v\}$ δεν εμφανίζεται στην διαδρομή δ : δ_2 είναι η δ .

β Η ακμή $\{u, v\}$ εμφανίζεται στην διαδρομή δ :

Για κάθε μία υπο-ακολουθία $\dots u, \{u, v\}, v \dots$ της διαδρομής δ ,
αντικαθιστούμε την εμφάνιση της $\{u, v\}$
με εμφάνιση της (u, v) .

Για κάθε μία υπο-ακολουθία $\dots v, \{u, v\}, u \dots$ της διαδρομής δ ,
αντικαθιστούμε την εμφάνιση της $\{u, v\}$
με εμφάνιση της (v, u) .

IV) Επαλήθευση του αποτελέσματος στη γενική περίπτωση

Επαληθεύουμε, χρησιμοποιώντας το ότι η ακολουθία δ είναι διαδρομή (δεδομένο), ότι:

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ της διαδρομής ισχύει για την ακολουθία δ_2 .

Για την επαλήθευση, εξετάζουμε πώς η ακολουθία δ_2 διαφέρει από την ακολουθία δ , για την οποία γνωρίζουμε (από τα δεδομένα) ότι ισχύει ο ΟΡΙΣΜΟΣ της διαδρομής.

B ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΟΥΜΕ ΟΤΙ :

Αν το Γ_2 έχει μία διαδρομή από την κορυφή x στην κορυφή y ,
Τότε το Γ θα έχει μία διαδρομή από την x στην y .

I) Δεδομένα

$\Gamma = (V, E)$ δεδομένο γράφημα

$\{u, v\}$ δεδομένη μη-κατευθυνόμενη ακμή του Γ

$\Gamma_2 = (V, (E - \{ \{u, v\} \}) \cup \{ (u, v), (v, u) \})$

δ δεδομένη διαδρομή του Γ_2 από την κορυφή x στην κορυφή y

II) Ζητούμενο

Διαδρομή δ_2 του Γ από την κορυφή x στην κορυφή y

III) Εύρεση του ζητούμενου χρησιμοποιώντας τα δεδομένα

α Οι ακμές (u, v) , (v, u) δεν εμφανίζονται στην διαδρομή δ : δ_2 είναι η δ .

β Μία τουλάχιστον από τις (u, v) , (v, u) εμφανίζεται στην διαδρομή δ :

Για κάθε μία υπο-ακολουθία $\dots u, (u, v), v \dots$ της διαδρομής δ ,
αντικαθιστούμε την εμφάνιση της (u, v)
με εμφάνιση της $\{u, v\}$.

Για κάθε μία υπο-ακολουθία $\dots v, (v, u), u \dots$ της διαδρομής δ ,
αντικαθιστούμε την εμφάνιση της (v, u)
με εμφάνιση της $\{u, v\}$.

IV) Επαλήθευση του αποτελέσματος στη γενική περίπτωση

Επαληθεύουμε, χρησιμοποιώντας το ότι η ακολουθία δ είναι διαδρομή
(δεδομένο), ότι:

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ της διαδρομής ισχύει για την ακολουθία δ_2 .

Για την επαλήθευση, εξετάζουμε πώς η ακολουθία δ_2 διαφέρει από την
ακολουθία δ , για την οποία γνωρίζουμε (από τα δεδομένα) ότι ισχύει ο
ΟΡΙΣΜΟΣ της διαδρομής.

ΕΡΩΤΗΜΑ Έστω δ μία ακολουθία που είναι διαδρομή ενός γραφήματος Γ ,
και έστω η μία υπο-ακολουθία της ακολουθίας δ : το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο
της ακολουθίας η είναι εμφανίσεις κορυφών του Γ .

Επιβεβαιώστε ότι: η ακολουθία η θα είναι διαδρομή του γραφήματος Γ .