

Διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές* για το G , την παρακάτω σχέση R_k πάνω στο σύνολο V :

Για $a \in V, b \in V$, $R_k(a, b) = \text{true}$ όταν:
υπάρχει κάποιος κύκλος όπου εμφανίζονται οι κορυφές a, b .

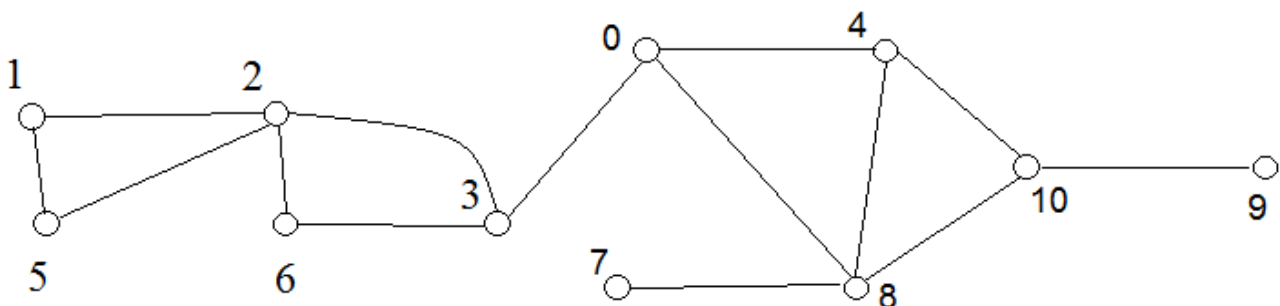
ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι:

- α Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα και κορυφές $a \neq b$,
 $R_k(a, b) = \text{true}$ *άν και μόνο αν* υπάρχουν δύο μονοπάτια με άκρα τις a, b ,
χωρίς κοινές κορυφές εκτός από τις a, b .
- β Αν για τις κορυφές a, b αληθεύει ότι $a R_k b$, θα αληθεύει και ότι $a R_l b$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και a ένα κομβικό σημείο του G . Επιβεβαιώστε ότι, αν οι κορυφές u, v είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - a$: $R_k(u, v) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε κορυφές για τις οποίες:

- α Να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.
- β Να μην αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές,
αλλά να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές.



- 1 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές για το G είναι συμμετρική.

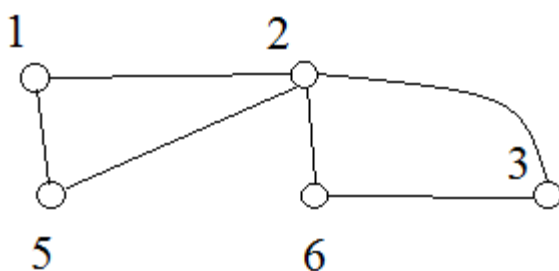
Ισχύει στο V: $u R_k v \text{ implies } v R_k u$

Αν υπάρχει κάποιος κύκλος όπου εμφανίζονται οι u και v ,
ο ίδιος κύκλος θα περιέχει τις κορυφές v και u .

- 2 Υπάρχουν γραφήματα όπου η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές
δεν είναι μεταβατική.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

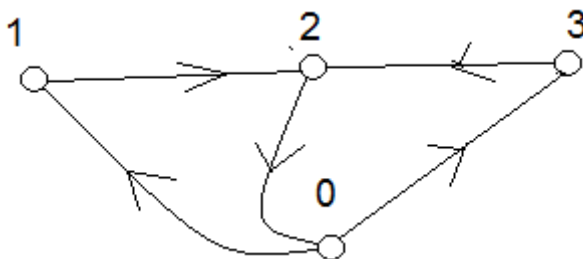
- α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_k δεν είναι μεταβατική.



Αληθεύει ότι $1 R_k 2$ and $2 R_k 3$

Δεν αληθεύει ότι $1 R_k 3$

- β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο ισχυρά συνεκτικό γράφημα
όπου η R_k να μην είναι μεταβατική.

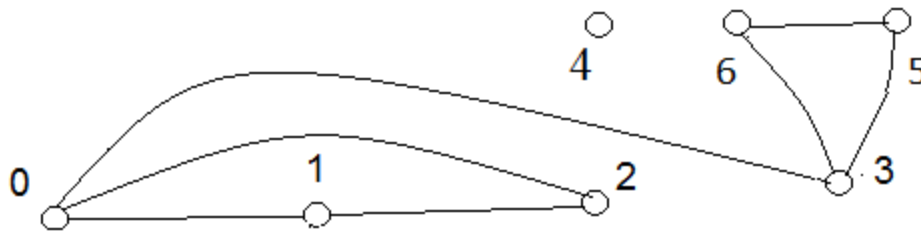


Αληθεύει ότι $1 R_k 2$ and $2 R_k 3$

Δεν αληθεύει ότι $1 R_k 3$

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_K είναι μεταβατική.



$u R_K v$ αν και μόνο αν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

Αν $(u R_K v \text{ and } v R_K w)$: είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_K είναι μεταβατική.

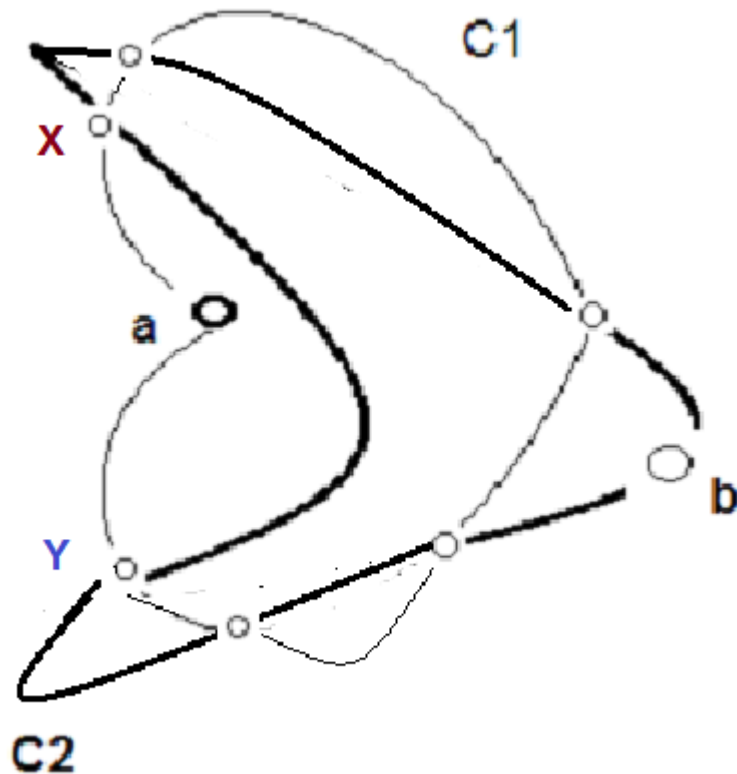


$u R_K v$ αν και μόνο αν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{5, 6\}$

Αν $(u R_K v \text{ and } v R_K w)$: είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{5, 6\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει κύκλους $C1$ και $C2$ που έχουν *τουλάχιστον δύο* κοινές κορυφές. Επιβεβαιώστε ότι:

Για οποιεσδήποτε κορυφές $a \in C1$, $b \in C2$: $R_k(a, b) = \text{true}$.



Αρχίζοντας από το a ακολουθώ τον $C1$ δεξιόστροφα:
έστω X η πρώτη κορυφή του $C2$ που συναντώ.

Αρχίζοντας από το a ακολουθώ τον $C1$ αριστερόστροφα:
έστω Y η πρώτη κορυφή του $C2$ που συναντώ.

Θα είναι $X \neq Y$, αλλιώς θα υπήρχε μόνο μία κοινή κορυφή των $C1$, $C2$.

Έστω μ_1 το μονοπάτι $(X, \dots a, \dots Y)$ που κατασκευάζεται από τον $C1$.

Έστω μ_2 το μονοπάτι $(Y, \dots b, \dots X)$ που κατασκευάζεται από τον $C2$.

Από τα μ_1 , μ_2 κατασκευάζω τον κύκλο $(X, \dots a, \dots Y, \dots b, \dots X)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

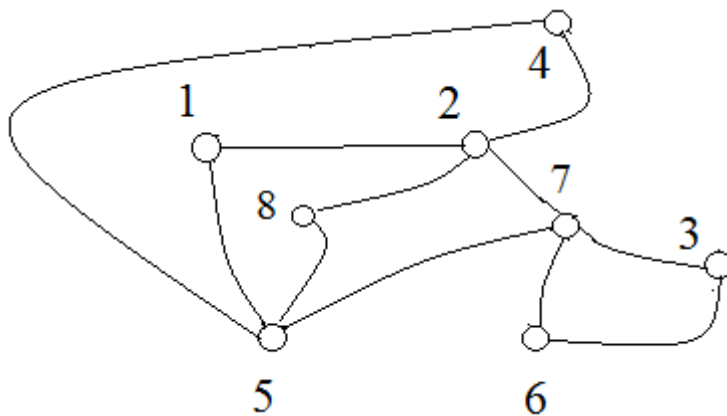
Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $C_1 \dots C_n$ μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος C_j έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο C_{j+1} .

Αν η κορυφή u βρίσκεται στον C_1 και η κορυφή v στον C_n :
θα είναι $R_k(u, v) = \text{true}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $C_1 \dots C_n$ μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος C_j έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο C_{j+1} .

Επιβεβαιώστε ότι: η ένωση των κύκλων $C_1 \dots C_n$ είναι ένα γράφημα που δεν έχει κομβικά σημεία.

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε τα ζεύγη κορυφών για τα οποία αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.



Γράφημα δυσυνεκτικό ως προς κορυφές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **δυσυνεκτικό ως προς κορυφές** μόνο όταν:

Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_k(x, y) = \text{true}$.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

είναι **μη-δυσυνεκτικό ως προς κορυφές** μόνο όταν:

Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V , ώστε: $R_k(x, y) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή, είναι δυσυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που έχει κομβικό σημείο δεν μπορεί να είναι δυσυνεκτικό ως προς κορυφές.

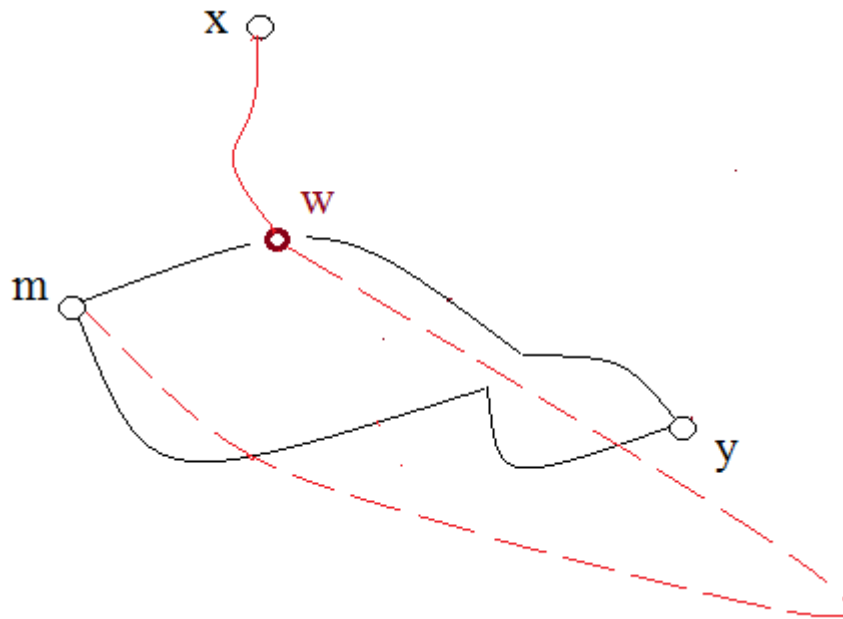
ΠΟΡΙΣΜΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 1

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα

και $C1 \dots Cn$ μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος C_j έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο $C_{(j+1)}$:

Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των $C1 \dots Cn$, είναι δυσυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Το γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και x, m, y είναι διαφορετικές κορυφές του G . Να κατασκευαστεί ένα μονοπάτι του G , με άκρα τις x, y , που να περιέχει την m .



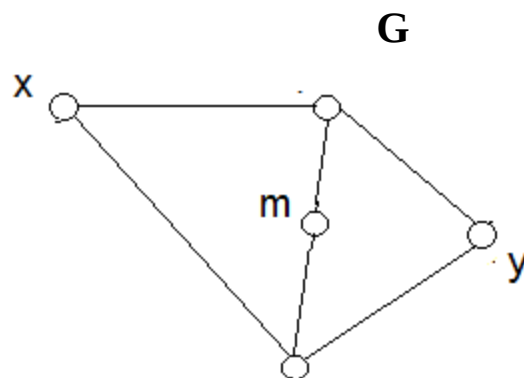
C ένας κύκλος που περιέχει τις m, y

μ ένα μονοπάτι από την x στην m , που δεν περιέχει την y (θα υπάρχει επειδή η y δεν είναι κομβικό σημείο)

w η πρώτη κορυφή του μ που ανήκει και στον C

μονοπάτι N : ακολουθώ το μ από την x ως την w , και συνεχίζω μέσω του C , από την w προς την m και μετά ως την y

ΕΡΩΤΗΜΑ 11 Βρείτε ένα γράφημα G δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και τρεις διαφορετικές κορυφές x, m, y του G , ώστε: να μην υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις κορυφές x, m, y .



ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και C ένας κύκλος που έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με το G .

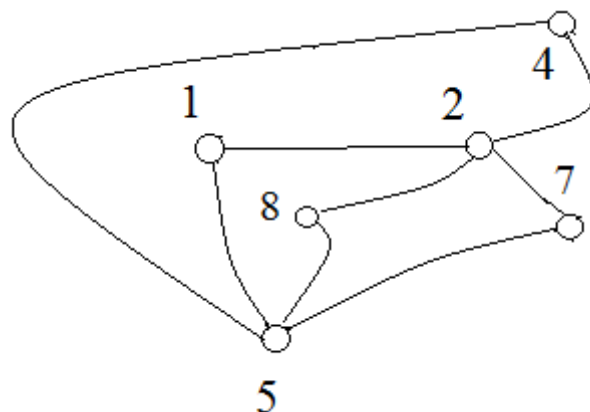
- α Αν η κορυφή u βρίσκεται στο G και η κορυφή v στον C :
θα είναι $R_k(u, v) = \text{true}$.
- β Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των G, C είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.
- γ Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των G, C δεν έχει κομβικά σημεία.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι η ένωση των κύκλων $C_1 \dots C_n$, όπου κάθε κύκλος C_k έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο $C_{(k+1)}$.

Χρησιμοποιώντας το ΘΕΩΡΗΜΑ 2 επιβεβαιώστε ότι:
το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

G



Επιβεβαιώστε ότι στο G δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει όλες τις κορυφές.