Δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> <u>του G</u> ,
ένα *επαγόμενο υπο-γράφημα* <u>Η</u> = (W, Z) του G το οποίο:

(1) είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, **και**

(2) δεν υπάρχει <u>επέκταση</u> του <u>Η</u> με *οποιεσδήποτε* κορυφές και ακμές του G , που να είναι υπο-γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

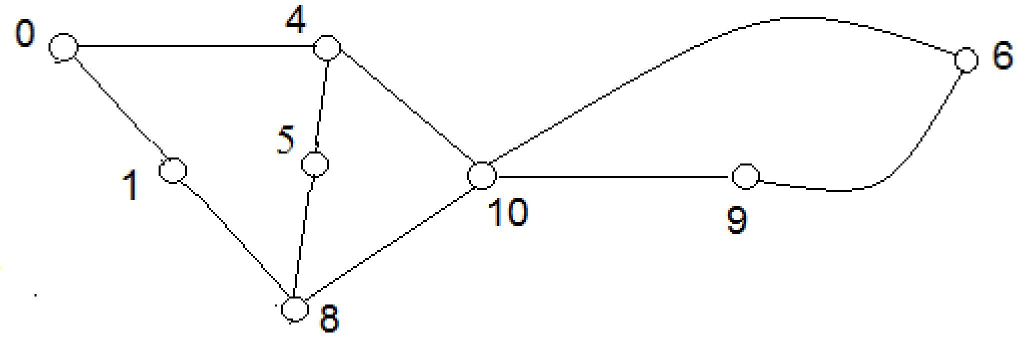
Παραδείγματα

Σύμφωνα με τον *ΟΡΙΣΜΟ* :

1. Τα επαγόμενα υπο-γραφήματα με κορυφές {0, 1, 4, 5, 8, **10**} είτε {6, 9, **10**}
είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές του G .

2. Τα επαγόμενα υπο-γραφήματα με κορυφές {4, 5, 8, 10} είτε {9}
δεν είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές του G .

G



1ος ***Λάθος*** *" ΟΡΙΣΜΟΣ "*

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G</u> ,
ένα *επαγόμενο υπο-γράφημα* <u>H</u> = (W, Z) του G το οποίο:

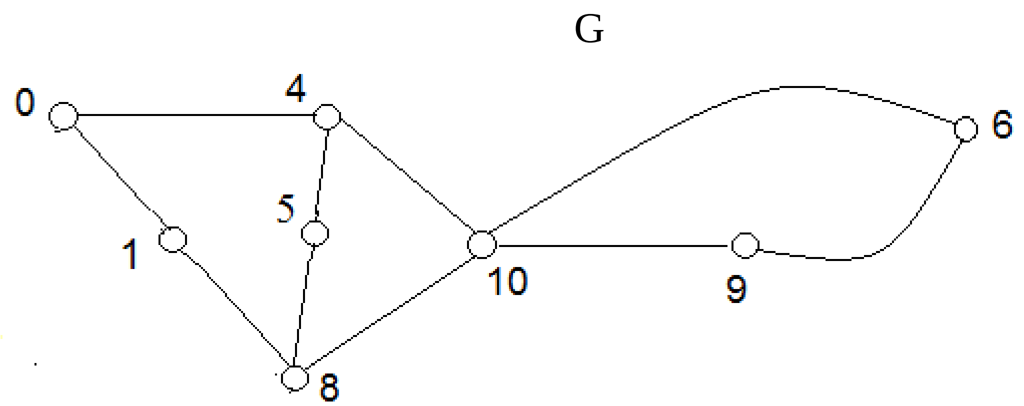
(1) είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, **και**

(2) δεν υπάρχει <u>κύκλος</u> του G που να συνδέει κορυφή του W με κορυφή εκτός του W .

Παραδείγματα 1

Σύμφωνα με τον *1ο " ΟΡΙΣΜΟ "* , το επαγόμενο υπο-γράφημα με κορυφές {0, 1, 4, 5, 8, 10} *δεν είναι* δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .

Σύμφωνα με τον *1ο " ΟΡΙΣΜΟ "* , το επαγόμενο υπο-γράφημα με κορυφές {6, 9, 10} *δεν είναι* δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .



2ος ***Λάθος*** *" ΟΡΙΣΜΟΣ "*

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G</u> ,
ένα *επαγόμενο υπο-γράφημα* <u>H</u> = (W, Z) του G το οποίο:

(1) είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, **και**

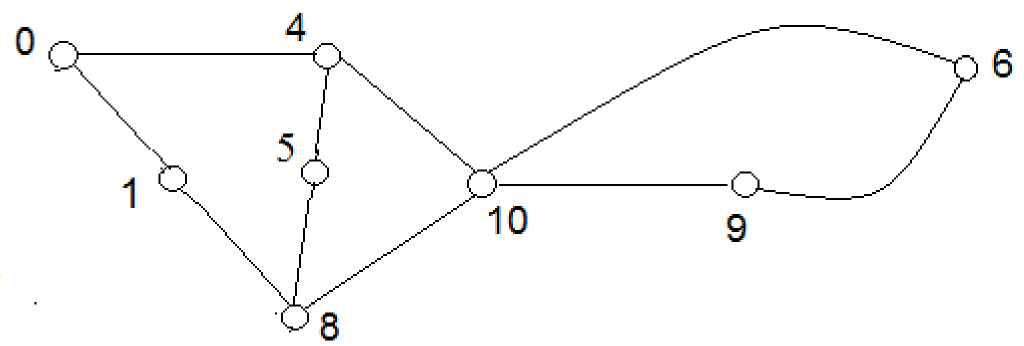
(2) δεν υπάρχει <u>επέκταση</u> του <u>H</u> με *μία μόνο* κορυφή του G ,
που να είναι υπο-γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

Παραδείγματα 2

Σύμφωνα με τον *2ο " ΟΡΙΣΜΟ "* , το επαγόμενο υπο-γράφημα με κορυφές {4, 5, 8, 10} *είναι* δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .

Σύμφωνα με τον *2ο " ΟΡΙΣΜΟ "* , το επαγόμενο υπο-γράφημα με κορυφές {9} *είναι* δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .

G



Η σχέση $S_κ$ μεταξύ ακμών

Για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E)
ορίζουμε την παρακάτω σχέση $\mathbf{S_κ}$ πάνω στο σύνολο E :

Για e , e' $\in$ E , $\mathbf{S_κ}$(e , e') = true όταν:
υπάρχει κάποιος *κύκλος* όπου
εμφανίζονται οι ακμές e , e' .

1 *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G = (V, E) ,
η σχέση $S_κ$ *για το* G *είναι συμμετρική*.

2 *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G = (V, E) ,
η σχέση $S_κ$ *για το* G *είναι μεταβατική*.

ΛΗΜΜΑ Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα
με δύο τπυλάχιστον ακμές, που *δεν έχει κομβικά σημεία*.

Χρησιμοποιώντας την μεταβατικότητα της σχέσης $S_κ$ *για το* G
επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

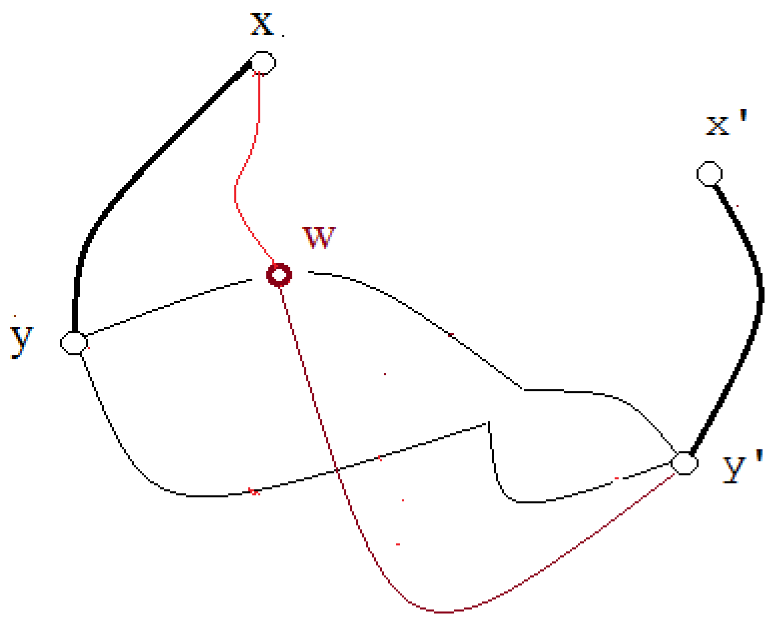
Έστω G , Γ μη-κατευθυνόμενα γραφήματα που *έχουν δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές* και είναι δισυνεκτικά ως προς κορυφές.

α Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των G , Γ
δεν έχει κομβικά σημεία.

β Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των G , Γ
είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και e = {x, y} , e' = {x', y'} δύο ακμές του G : θα είναι $S_κ$(e , e') = true .



C ένας κύκλος που περιέχει τις **y , y′**

μ ένα μονοπάτι από την **x** στην **y′** , που *δεν περιέχει* την **y** (θα υπάρχει επειδή η y δεν είναι κομβικό σημείο)

w η *πρώτη* κορυφή του **μ** που ανήκει και στον **C**

<u>κύκλος</u> με την e = {x, y} και την y′ :

ακολουθώ το **μ** από την **x** ως την **w** ,
συνεχίζω μέσω του **C** από την **w** μέσω της **y′** ως την **y** ,
μετά διανύω την {x, y}

Δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

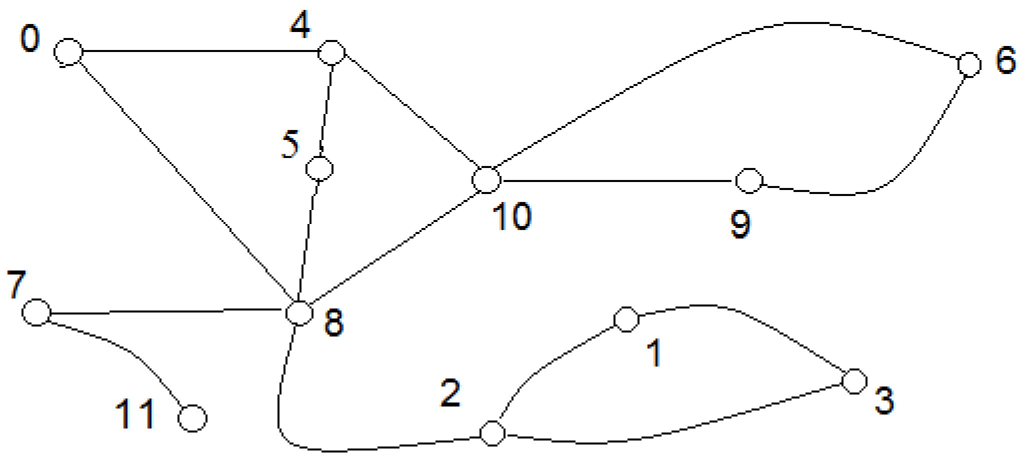
Ένα *επαγόμενο* υπο-γράφημα H = (W, K) ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> του G *μόνο όταν*:

Είτε: για κάποια <u>ακμή</u> e του G που <u>δεν είναι γέφυρα</u>,
K = { e } ∪ { e′ | υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις <u>ακμές</u> e , e′ } ,
W = { u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K } ,

Είτε: για κάποια <u>κορυφή</u> u του G που <u>δεν περιέχεται σε κύκλο</u>,
H = ({u} , ∅)

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Βρείτε τα υπο-γραφήματα του γραφήματος Γ που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές.

Γ



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Για κάθε κορυφή u του παραπάνω γραφήματος Γ , βρείτε το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του Γ με σύνολο κορυφών δ(u) :

δ(u) = { u } ∪ { x | αληθεύει ότι u $\mathbf{R}_\kappa$ x } .

δ(0) = δ(4) = δ(5) = δ(8) = {0, 4, 5, 10, 8}

δ(10) = {0, 4, 5, 10, 8} ∪ {10, 9, 6}

δ(6) = δ(9) = {10, 9, 6}

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω ότι το υπο-γράφημα Η ενός γραφήματος G είναι <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Το Η θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

β Δεν υπάρχει <u>επέκταση</u> του <u>Η</u> με *οποιεσδήποτε* κορυφές και ακμές του G , που να είναι υπο-γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

γ Άν το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, θα είναι Η = G (το G θα είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς κορυφές).

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, x , y δύο διαφορετικές κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G που να περιέχει τις x , y , *άν και μόνο άν* $x\ R_{\kappa}\ y$.

β Οι (μη-τετριμμένες) δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές του G διαμερίζουν τις ακμές που δεν είναι γέφυρες.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Έστω Η1 , Η2 δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν u μία κοινή κορυφή των Η1 , Η2 : η u θα είναι κομβικό σημείο του G .

β Τα υπο-γραφήματα Η1 , Η2 μπορούν να έχουν *το πολύ μία* κοινή κορυφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΛΥΨΗΣ *ΓΙΑ ΤΗΝ* $R_κ$

Για κάθε μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G = (V, E) :

Υπάρχει κάλυψη του V με μη-κενά σύνολα X1 ... Xκ , κ ≥ 1 , όπου:

(1) V = X1 ∪ ... ∪ Xκ ,

(2) Για x, y οποιαδήποτε <u>διαφορετικά</u> στοιχεία του V :

όταν υπάρχει σύνολο *που περιέχει τα* x, y, $R_κ$(x, y) = true
όταν δεν υπάρχει σύνολο *που περιέχει τα* x, y, $R_κ$(x, y) = false

(3) Για οποιοδήποτε *διαφορετικά* σύνολα Xj , Xi της κάλυψης:
Xj ⊄ Xi .

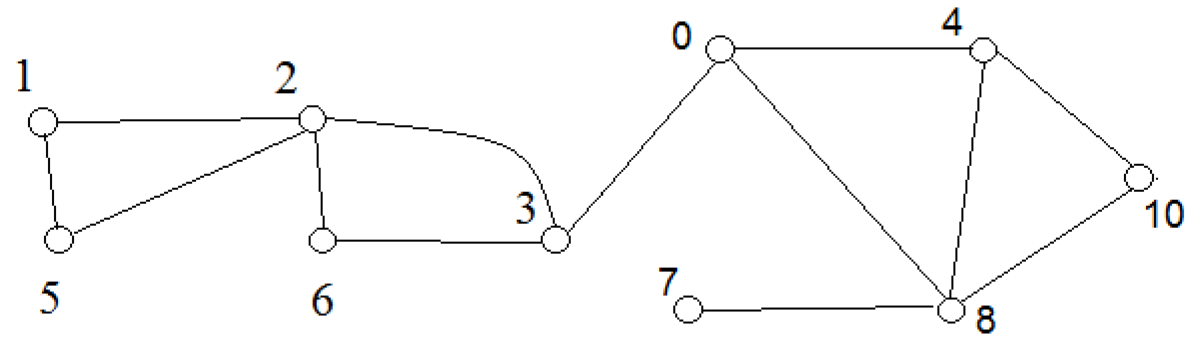
Κάλυψη με δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές

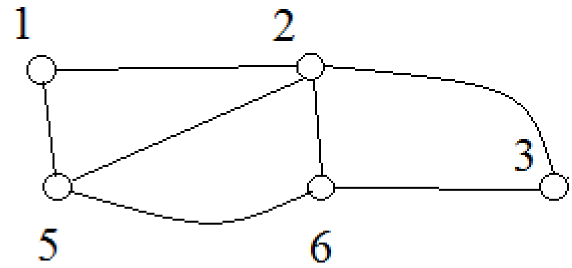
Έστω Γ = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, H(u1) ... H(uλ) , λ ≥ 1 οι δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές.

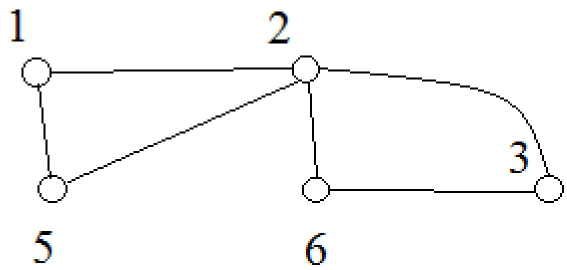
A Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι <u>*δισυνεκτικά ως προς κορυφές*</u>, και καλύπτουν τις κορυφές <u>*και τους κύκλους*</u> του Γ .
Κάθε κύκλος του Γ περιέχεται σε ένα μόνο από τα H(u1) ... H(uλ) .

B Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι η *μοναδική* κάλυψη των κορυφών *και των κύκλων* του G , με υπο-γραφήματα που είναι *δισυνεκτικά ως προς κορυφές*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Βρείτε κάλυψη για την R_κ σε καθένα από τα παρακάτω γραφήματα.







Αναδρομικός υπολογισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς κορυφές

Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $e1 \ldots ek$, $k \geq 0$ *οι γέφυρες* του G .

1 Έστω Θ το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το Γ τις ακμές $e1 \ldots ek$: υπολογίζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες του H , έστω $\Theta 1 \ldots \Theta m$, $m \geq 0$.

2 a Κάθε γράφημα Θk που δεν έχει κομβικό σημείο, είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Γ .
Ειδική περίπτωση: το Θk μπορεί να αποτελείται από μία κορυφή μόνο.

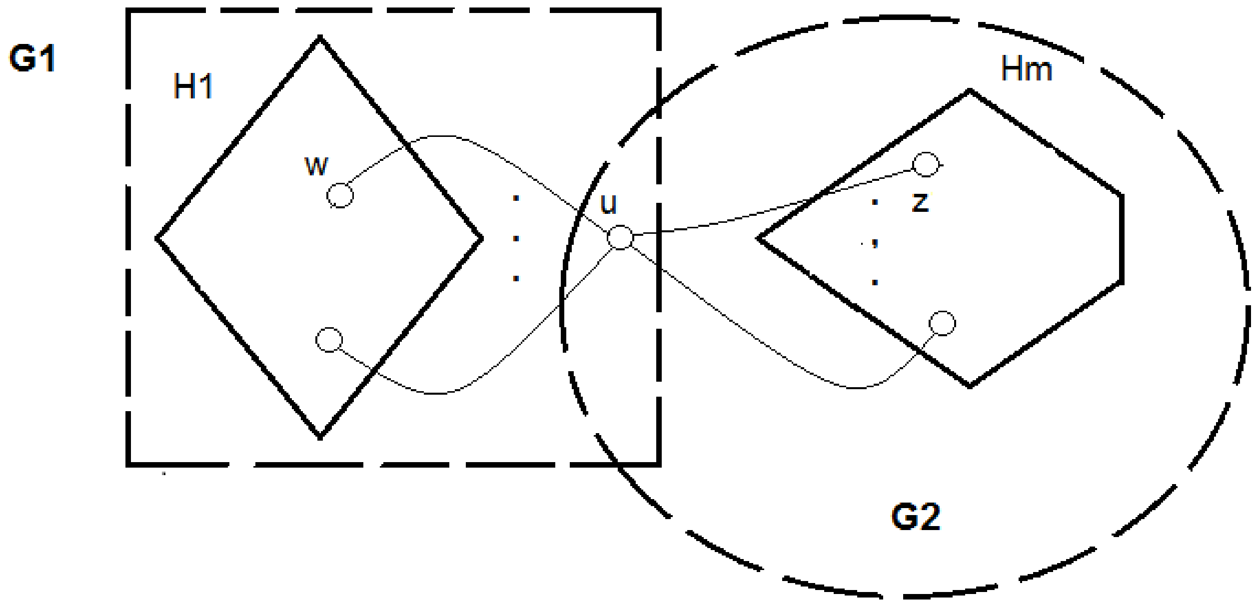
b Για κάθε γράφημα Θk που έχει ένα κομβικό σημείο u :
Έστω $H1 = (V1 , E1)$, ... $Hm = (Vm , Em)$, $m \geq 2$,
οι συνεκτικές συνιστώσες του $\Theta k - u$. Θέτουμε:

$X1 = V1 \cup \{u\}$,

G1 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X1

$X2 = V2 \cup \ldots \cup Vm \cup \{u\}$,

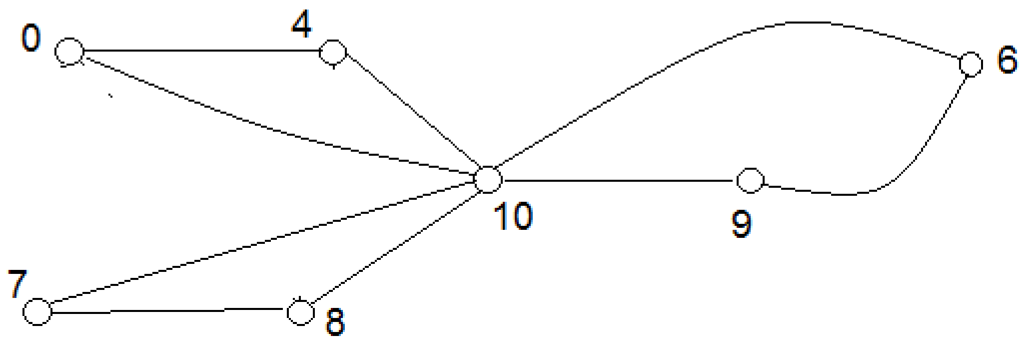
G2 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X2

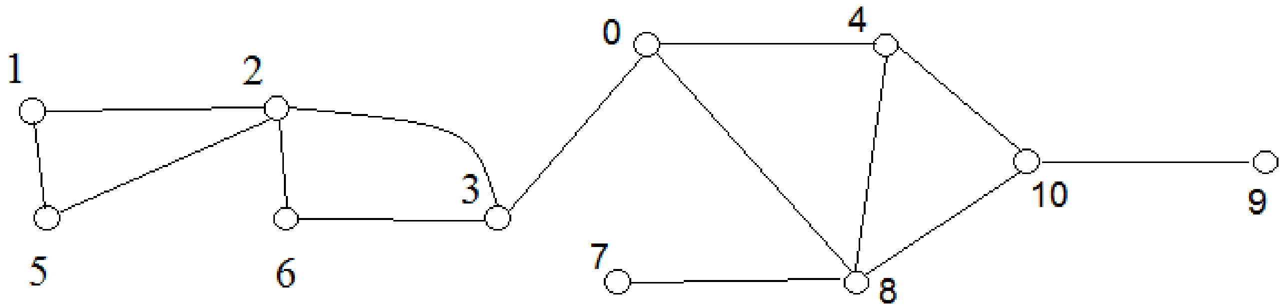


i Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk , θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές *ενός μόνο* από τα G1 , G2 .

ii Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές, είτε του G1 είτε του G2 , θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Για καθένα από τα παρακάτω γραφήματα, βρείτε όλα τα υπο-γραφήματά του που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του ως προς κορυφές.





ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε κορυφή u που *δεν είναι κομβικό* σημείο ενός γραφήματος G , το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του G με κορυφές

$$\delta(u) = \{u\} \cup \{\ x \mid \text{ αληθεύει ότι } u\ R_{\kappa}\ x\ \}$$

θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να είναι η σχέση R_κ μεταβατική στο G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να ταυτίζονται οι σχέσεις R_κ , R_ι στο G .