

Γράφημα δισυνεκτικό ως προς ακμές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **δισυνεκτικό ως προς ακμές** μόνο όταν:

Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_1(x, y) = \text{true}$.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **μη- δισυνεκτικό ως προς ακμές** μόνο όταν:

Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V , ώστε: $R_1(x, y) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή, είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που έχει γέφυρα δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

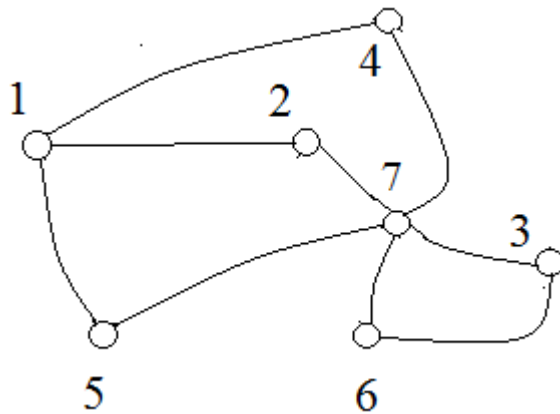
1 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές για το G είναι συμμετρική.

2 Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές για το G είναι μεταβατική.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι η ένωση των κύκλων $C_1 \dots C_n$, όπου κάθε κύκλος C_k έχει μία τουλάχιστον κοινή κορυφή με τον κύκλο $C_{(k+1)}$.
Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

G



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Επιβεβαιώστε ότι στο γράφημα G δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει όλες τις κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.

Επιβεβαιώστε ότι: Αν τα G_1, G_2 έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G_1 \cup G_2$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω Γ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, G ένα δισυνεκτικό ως προς ακμές υπο-γράφημα του G , και δ ένα κλειστό ίχνος του Γ που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .

Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Έστω Γ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, G ένα δισυνεκτικό ως προς ακμές υπο-γράφημα του G , και δ ένα ίχνος του Γ που τα άκρα του είναι κορυφές του G .

Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Δισυνεκτική συν/σα ως προς ακμές μη-κατευθυνόμενο γραφήματος

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G ,
ένα επαγόμενο υπο-γράφημα $H = (W, Z)$ του G το οποίο:

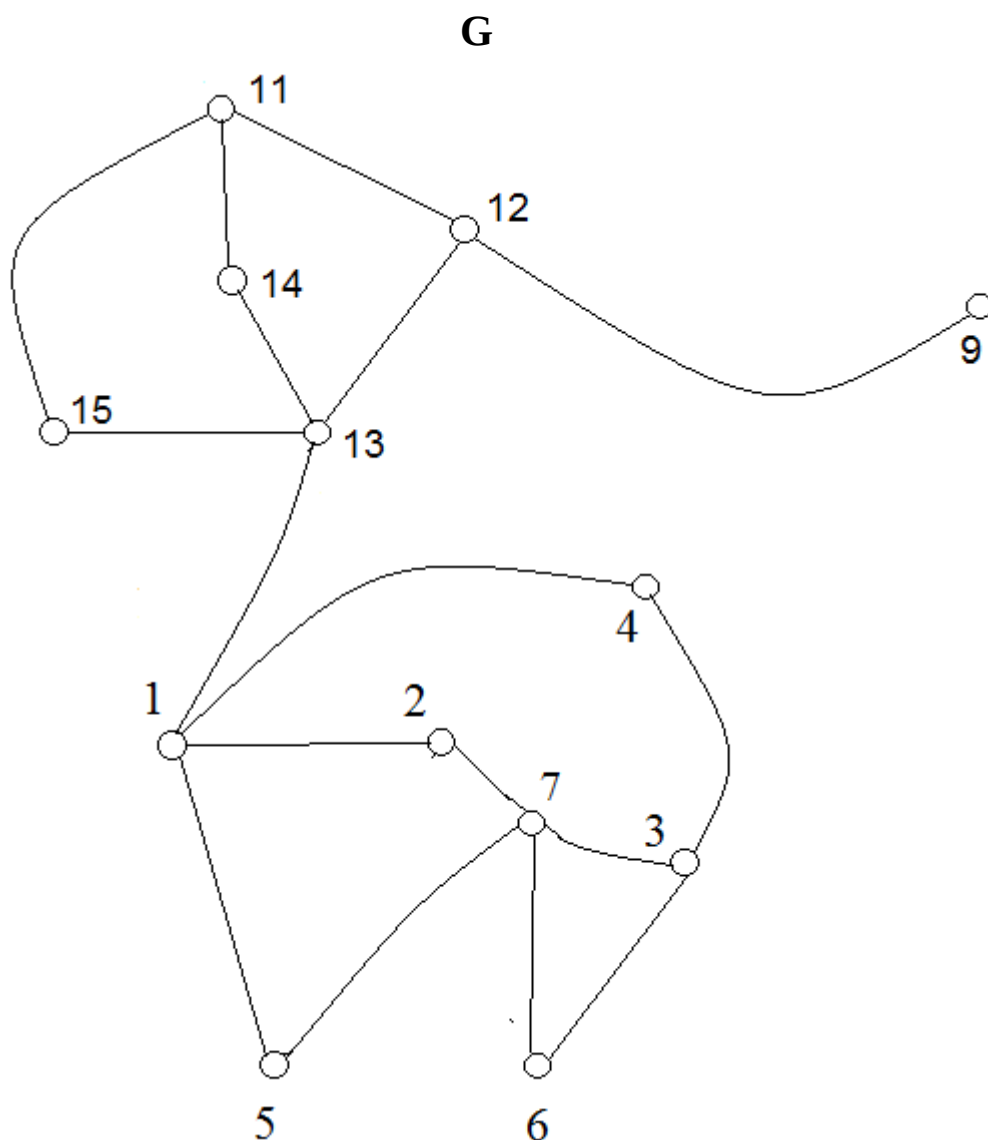
- (1) είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, **και**
- (2) δεν υπάρχει κλειστό ίχνος του G που να συνδέει κορυφή του W με κορυφή εκτός του W .

ΕΡΩΤΗΜΑ 9

Βρείτε τις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του παρακάτω γραφήματος G .

Βρείτε τις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του γραφήματος $G - 7$.

Βρείτε τις δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G , που δεν περιέχουν την κορυφή 7.



ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G και H_1, H_2 δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G .

Επιβεβαιώστε ότι:

α Αν x, y είναι κορυφές των $H_1, H_2 - H_1$ αντίστοιχα, $R_i(x, y) = \text{false}$.

Χρησιμοποιούμε τον ΟΡΙΣΜΟ της δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές.

β Δεν υπάρχει κοινή κορυφή των H_1, H_2 .

Χρησιμοποιούμε το α .

Αν x, y είναι κορυφές των H_1, H_2 αντίστοιχα και c είναι κοινή κορυφή των H_1, H_2 : από την δισυνεκτικότητα ως προς ακμές των H_1, H_2 , $x R_i c$ και $c R_i y$ – και από την μεταβατικότητα της σχέσης R_i θα έχουμε $x R_i y$.

Επομένως λόγω του α θα έχουμε $y \in H_1$: όμοια $x \in H_2$, και τα υπο-γραφήματα H_1, H_2 θα ταυτίζονται που είναι άτοπο.

γ Δύο διαφορετικές κορυφές x, y του G είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G , *άν και μόνο αν* $x R_i y$.

Χρησιμοποιούμε τα α, β .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι η μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΠΡΟΣΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΚΜΕΣ

Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$,
υπάρχει διαμερισμός $X_1 \dots X_k$ του V , όπου:

- (1) Το επαγόμενο υπο-γράφημα που αντιστοιχεί
σε κάθε διαμέρισμα X_j , είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.
- (2) Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V
σε διαφορετικά διαμερίσματα: $R_i(x, y) = \text{false}$.

Από τον ΟΡΙΣΜΟ της δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές
και την παραπάνω ΠΡΟΤΑΣΗ προκύπτει:

Διαμερισμός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος σε δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $H_1 \dots H_\lambda$, $\lambda \geq 1$
οι διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G .

A Τα υπο-γραφήματα $H_1 \dots H_\lambda$ του G είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές,
και διαμερίζουν τις κορυφές και τα κλειστά ίχνη του G .

Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V
σε διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές: $R_i(x, y) = \text{false}$.

B Τα υπο-γραφήματα $H_1 \dots H_\lambda$ του G είναι ο μοναδικός διαμερισμός
των κορυφών και των κλειστών ιχνών του G σε υπο-γραφήματα που να
είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

A Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $G_1 \dots G_k$
ένας διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών ιχνών του G σε μη-κενά ξένα
διαμερίσματα. Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση δισυνεκτικών
συνιστωσών ως προς ακμές του G .

B Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $G_1 \dots G_k$,
ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα που είναι
δισυνεκτικά ως προς ακμές. Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι
υπο-γράφημα κάποιας δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές του G .

Υπολογισμός των δισυνεκτικών συνιστώσων ως προς ακμές

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $e_1 \dots e_k$, $k \geq 0$ οι γέφυρες του G .

A Μία ακμή $e = \{u, v\}$ του G δεν είναι γέφυρα, *άν και μόνο αν* οι u, v είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G .

Αν η ακμή $e = \{u, v\}$ δεν είναι γέφυρα θα περιέχεται σε κύκλο.

Χρησιμοποιούμε την ΠΡΟΤΑΣΗ (γ).

Αν η ακμή $e = \{u, v\}$ είναι γέφυρα, $R_i(u, v) = \text{false}$.

Χρησιμοποιούμε την ΠΡΟΤΑΣΗ (γ).

B Έστω H το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το G τις ακμές που είναι γέφυρες: οι συνεκτικές συνιστώσες του H θα είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G .

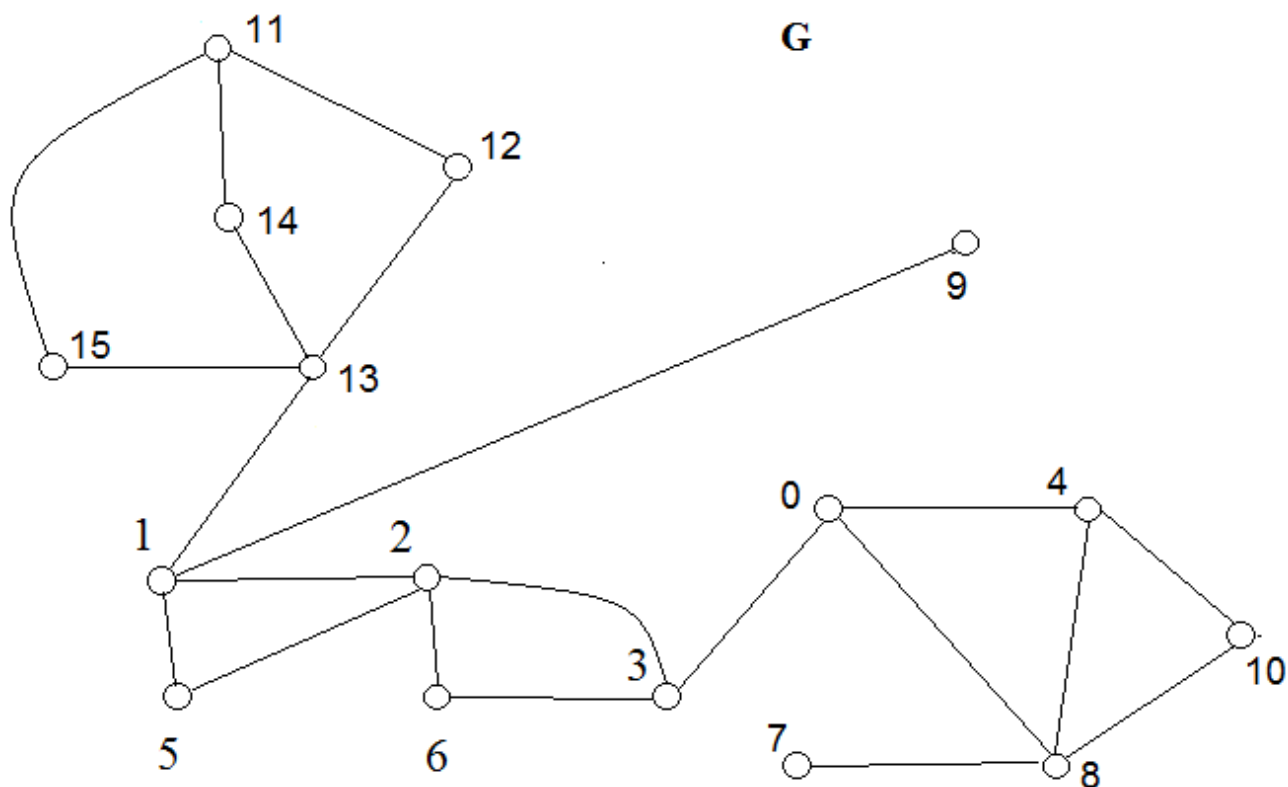
Στο H δεν προκύπτουν νέες γέφυρες που δεν υπήρχαν στο G :

άρα κάθε ακμή του H θα περιέχεται σε κύκλο.

Χρησιμοποιώντας την ΠΡΟΤΑΣΗ (γ) και την *μεταβατικότητα* της σχέσης R_i προκύπτει ότι: κάθε συνεκτική συνιστώσα του H είναι γράφημα δισυνεκτικό ως προς ακμές,

ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Επιβεβαιώστε ότι: *άν ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα δεν έχει γέφυρα, θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.*

Γράφημα $H(G)$ των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G



Κορυφές της **H1**: {11, 12, 13, 14, 15, 16}

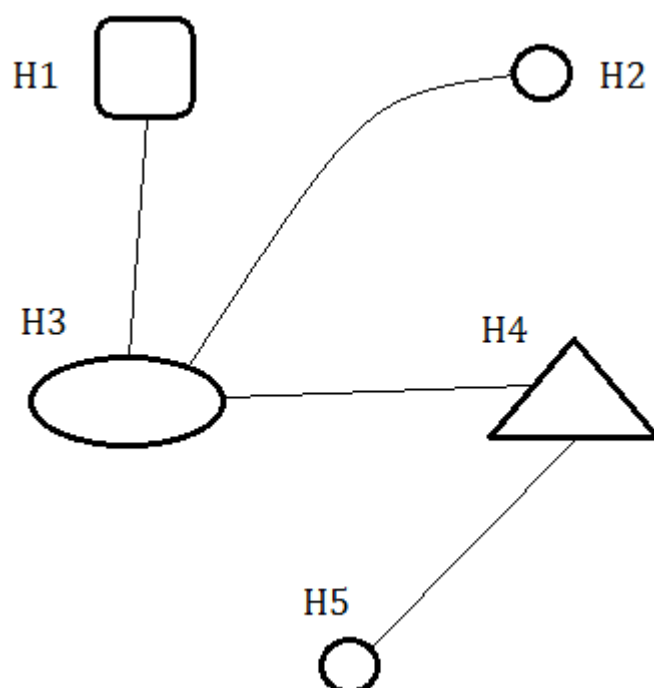
Κορυφές της **H2**: {9}

Κορυφές της **H3**: {1, 2, 3, 6, 5}

Κορυφές της **H5**: {7}

Κορυφές της **H4**: {0, 4, 10, 8}

H(G)

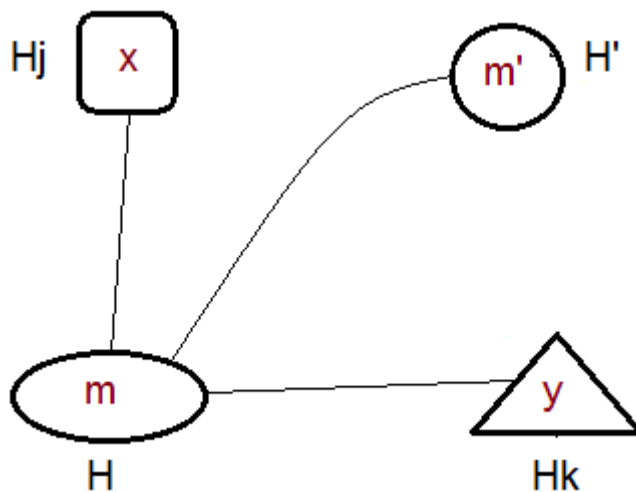


ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , το γράφημα των δυσυνεκτικών συνιστώσων ως προς ακμές $H(G)$ θα είναι δέντρο.

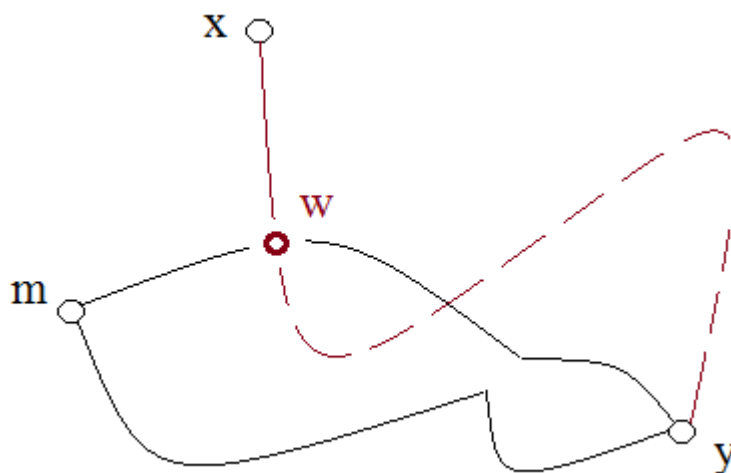
ΕΡΩΤΗΜΑ 14 Επιβεβαιώστε ότι: Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, θα υπάρχει (τουλάχιστον) μία δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που θα συνδέεται με μόνο μία άλλη δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 15 Το G είναι μη-κατευθυνόμενο γράφημα, η κορυφή x είναι στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_j , η κορυφή y είναι στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_k .

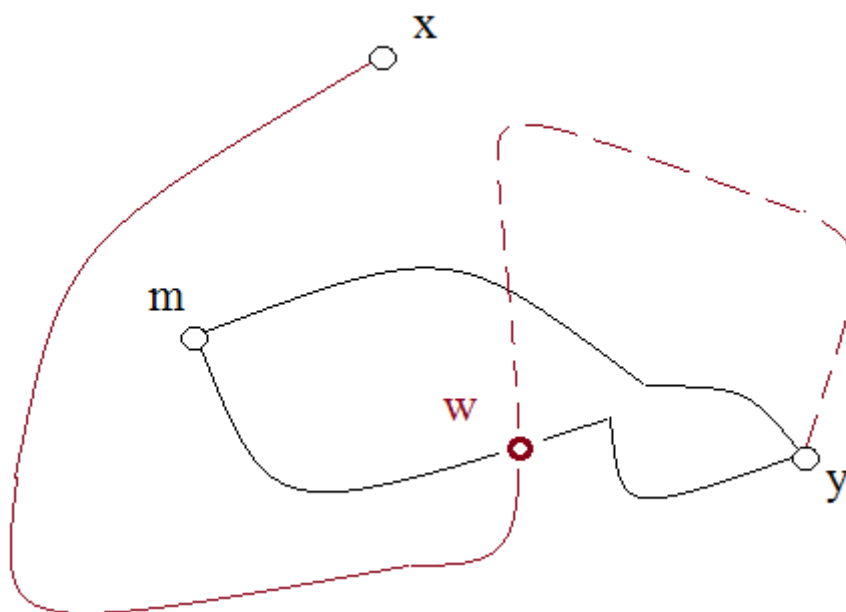
Επιβεβαιώστε ότι, για τυχαία κορυφή m στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H : υπάρχει ίχνος του G με άκρα τις x, y που περιέχει την m , *άν και μόνο αν* η H βρίσκεται στο μοναδικό μονοπάτι του $H(G)$ με άκρα τις H_j, H_k .



ΕΡΩΤΗΜΑ 16 Το γράφημα G είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές, και x, m, y είναι διαφορετικές κορυφές του G . Να κατασκευαστεί ένα ίχνος του G , με άκρα τις x, y , που να περιέχει την m .



- I** ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις m, y
- μ** ένα μονοπάτι από την x στην y
- w** η πρώτη κορυφή του **μ** που ανήκει και στο **I**



ίχνος **J**: ακολουθώ το **μ** από την x ως την w ,
και συνεχίζω μέσω του **I**, προς την m και μετά ως την y