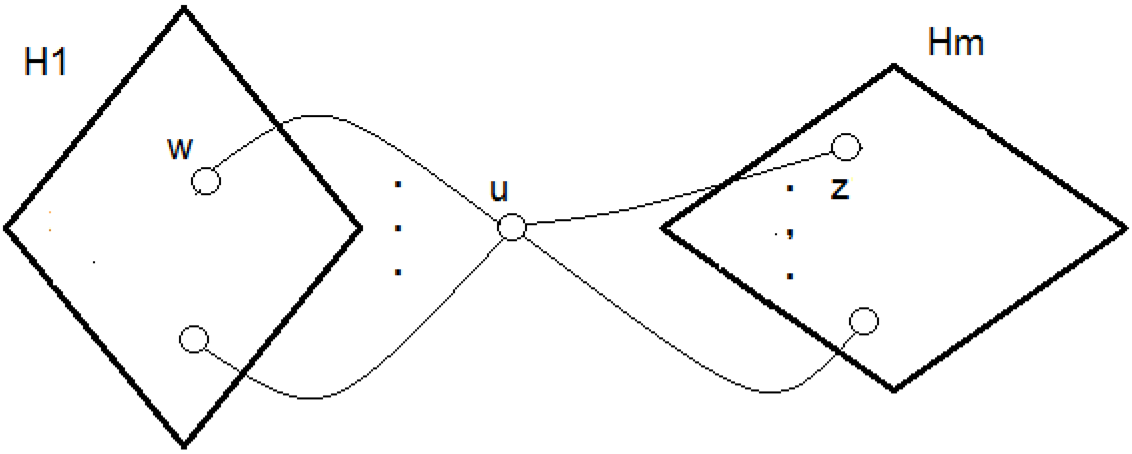
Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με κομβικό u :

H1 . . . Hm , m ≥ 2 , συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους



H1 ... Hm οι συνεκτικές συνιστώσες του **G – u**

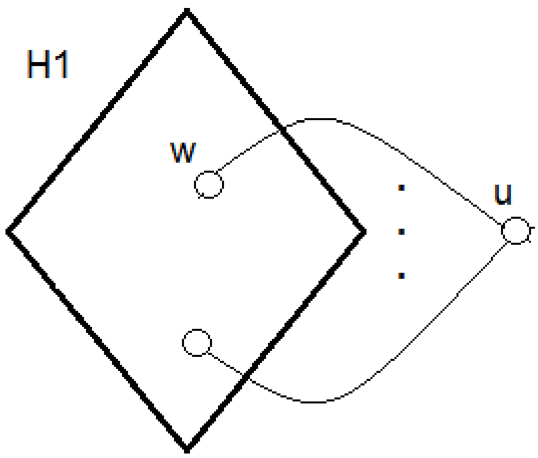
ΘΕΩΡΗΜΑ Ύπαρξη μη-κομβικών σημείων

Κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, έχει δύο (τουλάχιστον) κορυφές που δεν είναι κομβικά σημεία:

Τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού θα είναι μη-κομβικά.

Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθ/νου γραφήματος G με *μη-κομβικό* u :

H1 συνεκτικό



u *μη-κομβικό* στο G , H1 = G – u

Μαθηματική επαγωγή ***για συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα***

1) Για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$: $|E| \geq |V| - 1$.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (1) , $n \geq 1$:

Π(n) = { *για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα* $G = (V, E)$
με $|V| = n$ κορυφές: $|E| \geq |V| - 1$ }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:
Για κάθε $n \geq 1$, ***Π***(n) .

Αρχική περίπτωση:
Ελέγχουμε ότι αληθεύει *Π*(1)

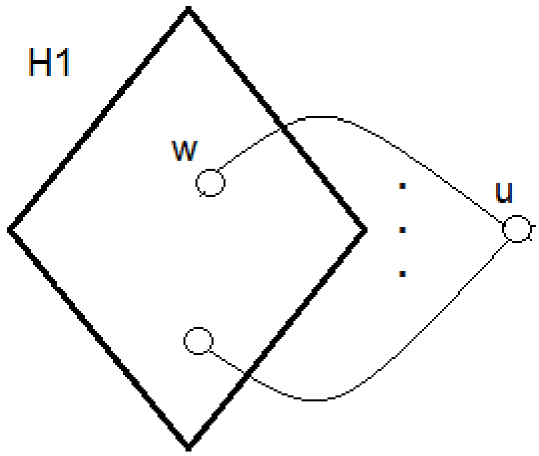
Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 1$: αληθεύει ότι *Π*(K)

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : αληθεύει ότι *Π*(K+1)

Π(K+1) = { *για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα* $G = (V, E)$
με $|V| = K+1$ κορυφές: $|E| \geq |V| - 1$ }

G



H1 συνεκτικό

Έστω: G = (V, E) <u>τυχαίο</u> συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα
με $|V| = K+1$ κορυφές.

i $G = H1 \cup \{ \{ u , w \} , \dots \}$

ii $H1 = (V1 , E1)$ όπου $1 \leq |V1| = K$ % από ορισμό του H1

$|E1| \geq |V1| - 1$ % από υπόθεση για K

iii $|E| \geq |E1| + 1$ % u δεν ανήκει στο H1

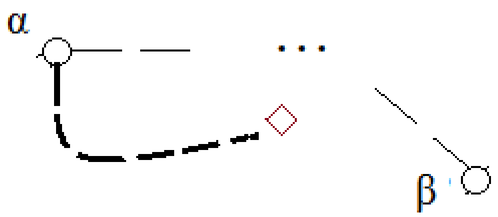
$\geq (|V1| - 1) + 1$

$= |V1| = |V| - 1$ % u δεν ανήκει στο H1

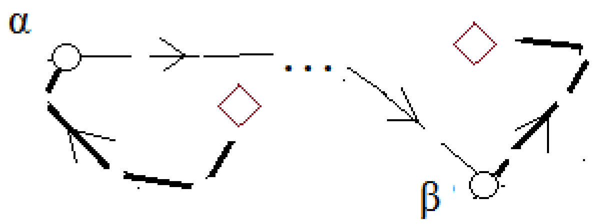
Ιδιότητες των άκυκλων γραφημάτων

Έστω $\mu = (\alpha , \ldots \beta)$ ένα *μη-επεκτάσιμο μονοπάτι* του άκυκλου γραφήματος G :

i Άν το G είναι μη-κατευθυνόμενο, οι κορυφές α , β θα έχουν βαθμό 1 στο G.



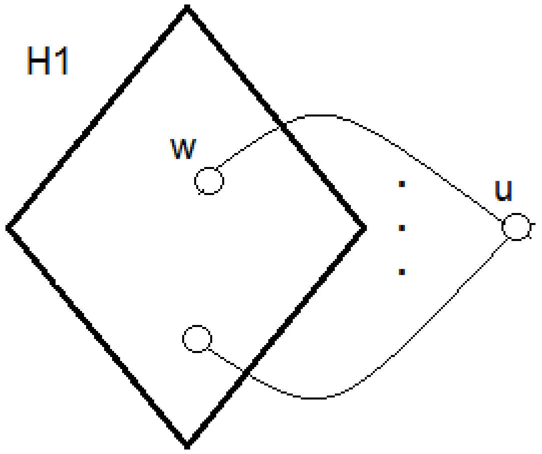
ii Άν το G είναι κατευθυνόμενο, η κορυφή α θα έχει έσω-βαθμό 0 στο G, και η κορυφή β θα έχει έξω-βαθμό 0 στο G.



ΔΕΝΤΡΟ Ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα T ονομάζεται <u>δέντρο</u>,
όταν είναι *άκυκλο και συνεκτικό*.

Γενική μορφή συνεκτικού γραφήματος G :

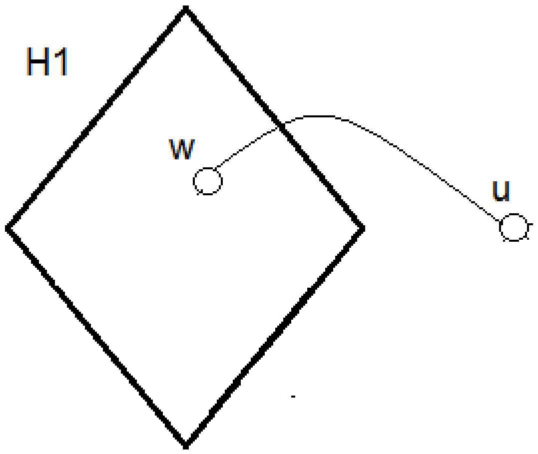
H1 συνεκτικό



u *μη-κομβικό* στο G , H1 = G – u

Γενική μορφή συνεκτικού *άκυκλου* γραφήματος T :

H1 συνεκτικό άκυκλο



u *μη-κομβικό* στο T , H1 = T – u

Μαθηματική επαγωγή ***για δέντρα***

2) Για κάθε δέντρο $T = (V, E)$: $|E| = |V| - 1$.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (2) , $n \geq 1$:

Π(n) = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$
με $|V| = n$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:
Για κάθε $n \geq 1$, ***Π***(n) .

Αρχική περίπτωση:
Ελέγχουμε ότι αληθεύει *Π*(1)

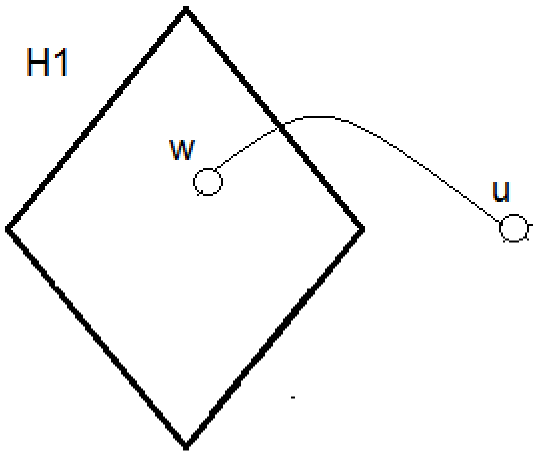
Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 1$: αληθεύει ότι *Π*(K)

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : αληθεύει ότι *Π*(K+1)

Π(K+1) = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$
με $|V| = K+1$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

T



H1 δέντρο

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με |V| = K+1 κορυφές.

i T = H1 ∪ { { u , w } }

ii H1 = (V1 , E1) όπου 1 ≤ |V1| = K % από ορισμό του H1

|E1| = |V1| – 1 % από υπόθεση για K

iii |E| = |E1| + 1 % u δεν ανήκει στο H1

= (|V1| – 1) + 1

= |V1| = |V| – 1 % u δεν ανήκει στο H1

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Επιβεβαιώστε ή βρείτε αντιπαράδειγμα για το ότι:

α Άν το G είναι συνεκτικό και $|E| = |V| - 1$, το G θα είναι άκυκλο.

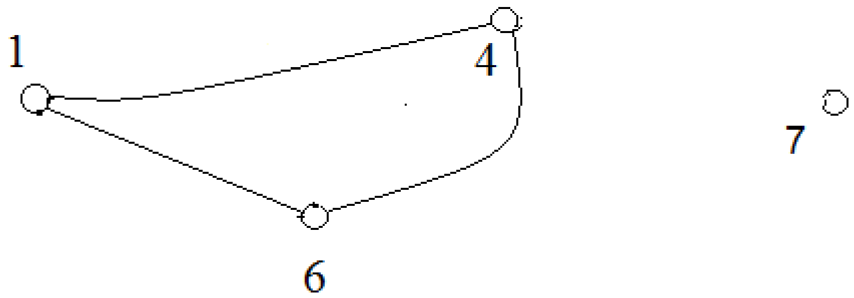
> Άν στο G υπάρχει ένας κύκλος, μπορούμε να αφαιρέσουμε μία (τυχαία) ακμή e του κύκλου.
> Επειδή η e δεν είναι γέφυρα του G : το $G - e$ θα είναι συνεκτικό, επομένως $|E| - 1 \geq |V| - 1$.

β Άν το G είναι άκυκλο και $|E| = |V| - 1$, το G θα είναι συνεκτικό.

> Άν το G έχει K συνεκτικές συνιστώσες: $|E| = |V| - K$.

γ Άν $|E| \geq |V| - 1$, το G θα είναι συνεκτικό.

δ Άν $|E| = |V| - 1$, το G θα είναι άκυκλο.



3) Για κάθε δέντρο T = (V, E) :
Υπάρχει τρόπος να *χρωματιστούν* οι κορυφές του T *με δύο χρώματα* κ, λ, ώστε:
τα άκρα οποιασδήποτε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (3) , $n \geq 1$:

Π(n) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με |V| = n κορυφές:
υπάρχει χρωματισμός του T με τα χρώματα κ, λ }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 1$, **Π**(n) .

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι   αληθεύει *Π*(1) :

Η μοναδική κορυφή του T χρωματίζεται με το λ .

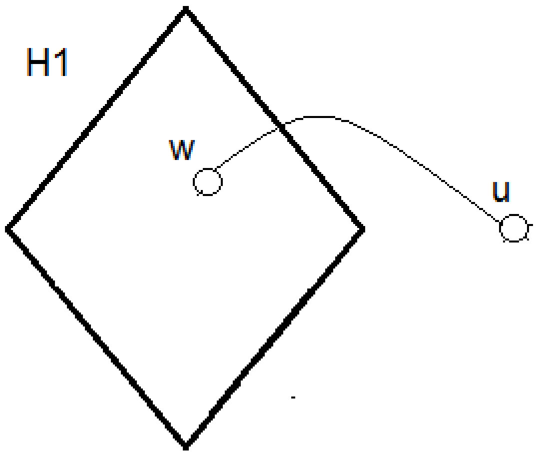
Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι   για κάποιο τυχαίο $K \geq 1$:   αληθεύει ότι *Π*(K)

Ελέγχουμε ότι   για το παραπάνω K :   αληθεύει ότι *Π*(K+1)

Π(K+1) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με |V| = K+1 κορυφές:
υπάρχει χρωματισμός του T με τα χρώματα κ, λ }

T



H1 δέντρο

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με $|V| = K+1$ κορυφές.

i $T = H1 \cup \{ \{ u , w \} \}$

ii $H1 = (V1 , E1)$ όπου $1 \le |V1| = K$ % από ορισμό του H1

Υπάρχει χρωματισμός του H1 με τα χρώματα κ, λ

% από υπόθεση για K

iii Η κορυφή u μπορεί να χρωματιστεί διαφορετικά από ότι η κορυφή w

% u δεν ανήκει στο H1

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Γράψτε μία συνάρτηση χ(T) που να υπολογίζει με αναδρομή, για κάθε δεδομένο δέντρο T , έναν χρωματισμό του T με δύο χρώματα κ, λ .