ΔΕΝΤΡΙΚΗ ΔΟΜΗ

Έστω G ένα *κατευθυνόμενο* γράφημα.

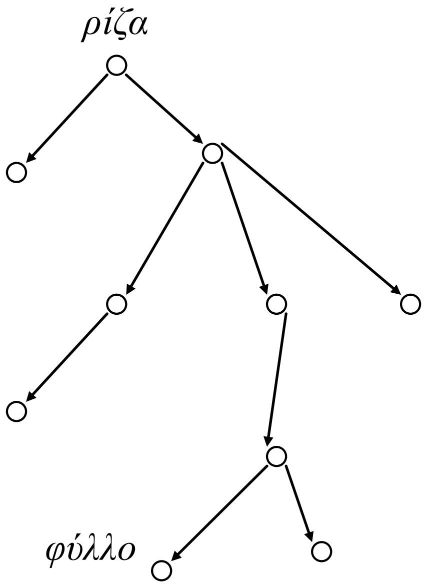
Για κάθε ακμή (u, v) του G , η κορυφή u ονομάζεται <u>γονέας</u> της v και η κορυφή v ονομάζεται <u>παιδί</u> της u .

Το γράφημα G ονομάζεται <u>δεντρική δομή</u> όταν αληθεύουν τα παρακάτω:

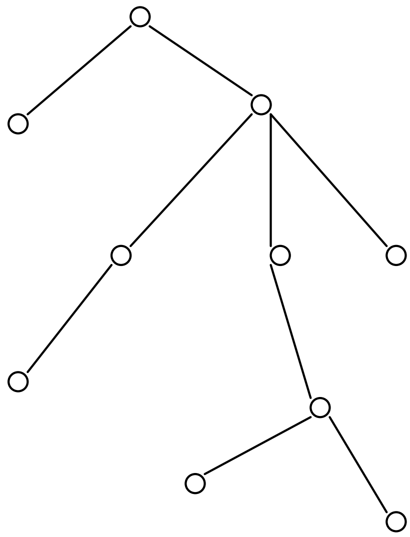
1 Υπάρχει *μοναδική* κορυφή ρ του G χωρίς γονέα, που ονομάζεται <u>ρίζα</u> του G .

2 Κάθε κορυφή εκτός από τη ρίζα έχει *μοναδικό* γονέα.

3 Κάθε κορυφή (που δεν είναι η ρίζα) είναι *προσβάσιμη* από τη ρίζα.

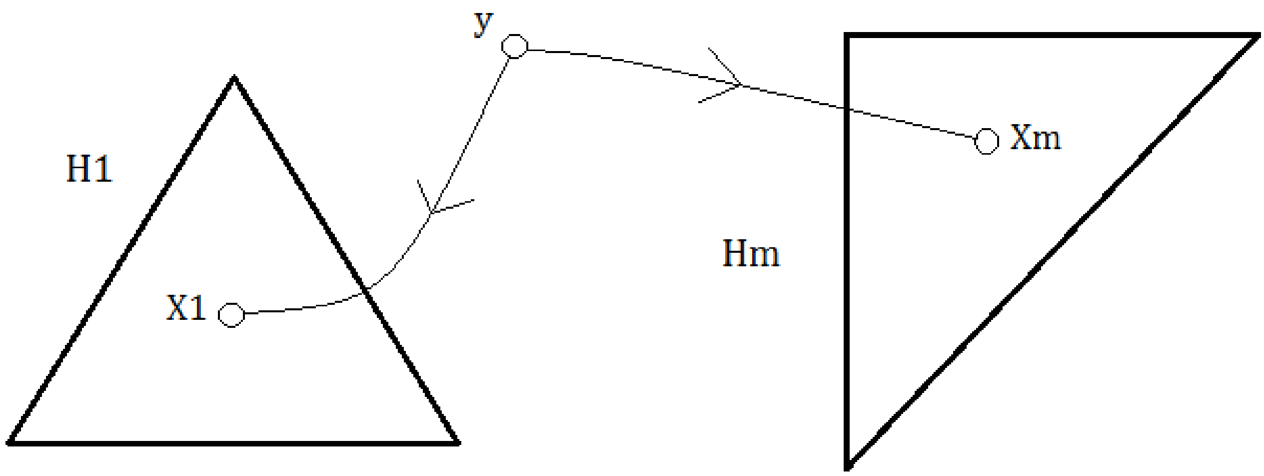


Δεντρική δομή



Δέντρο

Γενική μορφή δεντρικής δομής T με ρίζα y βαθμού $m \geq 1$



Hk το επαγόμενο υπο-γράφημα

με κορυφές **{Xk}** $\cup$ **{ z | Xk R_δ z }**

κάθε **Hk** είναι δεντρική δομή με ρίζα **Xk**

H1 . . . Hm ξένα μεταξύ τους, **$m \geq 1$**

{ y , Xk } *μοναδική* ακμή του T που συνδέει τα **y , Hk**

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

a Έστω T μία δεντρική δομή με ρίζα μία κορυφή y με γειτονικές κορυφές X1 . . . Xm , $m \geq 1$, και Hk το επαγόμενο υπο-γράφημα με κορυφές {Xk} $\cup$ { z | Xk R_δ z } , k = 1 , ... m . Ελέγξτε ότι:

Κάθε υπο-γράφημα Hj είναι δεντρική δομή με ρίζα Xj .

Τα υπο-γραφήματα H1 . . . Hm είναι ξένα μεταξύ τους.

Για κάθε υπο-γράφημα Hj , θα υπάρχει *μοναδική* ακμή { y , Xj } που συνδέει την κορυφή y με το Hj .

b Δίνονται *κατευθυνόμενα* γραφήματα Hj = (Vj , Zj) , j = 1, ... m , ξένα μεταξύ τους: κάθε Hj είναι δεντρική δομή με ρίζα την κορυφή Xj .

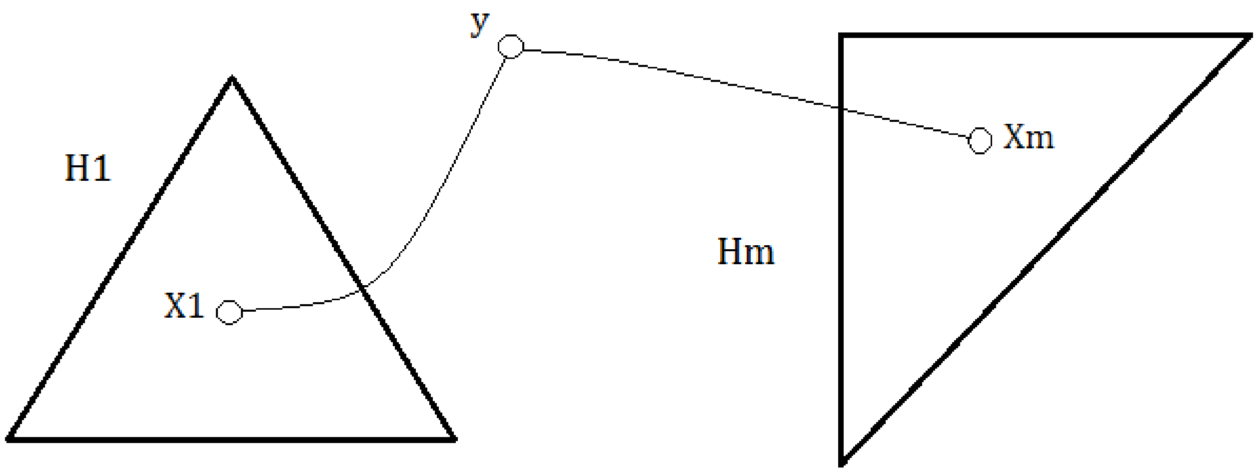
Έστω y μία κορυφή που δεν ανήκει σε κανένα Hj , και έστω το *κατευθυνόμενο* γράφημα T = H1 $\cup$ ... $\cup$ Hm $\cup$ { (y , Xj) | j = 1, ... m } :

Ελέγξτε ότι το T θα είναι δεντρική δομή με ρίζα y.

ΔΕΝΤΡΟ

Ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα T ονομάζεται <u>δέντρο</u>,
όταν είναι *άκυκλο και συνεκτικό*.

Γενική μορφή δέντρου T με κορυφή y βαθμού m ≥ 1



H1 . . . Hm οι *συνεκτικές συνιστώσες* του **T – y**

κάθε **Hk** είναι δέντρο

H1 . . . Hm ξένα μεταξύ τους *δέντρα*, **m ≥ 1**

{ y , Xk } *μοναδική* ακμή του T που συνδέει τα **y , Hk**

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

a Έστω T ένα δέντρο, y μία κορυφή του T,
και H1 . . . Hm οι συνεκτικές συνιστώσες του T – y . Ελέγξτε ότι:

Κάθε υπο-γράφημα Hj θα είναι δέντρο.

Για κάθε υπο-γράφημα Hj , θα υπάρχει *μοναδική* ακμή { y , Xj }
που συνδέει την κορυφή y με το Hj .

b Έστω H1 . . . Hm ξένα μεταξύ τους δέντρα, και y μία κορυφή
που δεν ανήκει σε κανένα από τα Hj . Συνδέουμε την y με κάθε ένα από τα Hj ,
με μία *μόνο* ακμή { y , Xj } .

Έστω T το γράφημα $H1 \cup \ldots \cup Hm \cup \{ \{ y , Xj \} \mid j = 1, \ldots m \}$:

Ελέγξτε ότι το T θα είναι δέντρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Για κάθε δέντρο $T = (V, E)$: $|E| = |V| - 1$.

<u>*Παραμετροποίηση*</u> της ιδιότητας , $n \geq 1$:

Π(n) = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$ με $|V| \leq n$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 1$, ***Π***(n) .

Αρχική περίπτωση:

<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> αληθεύει *Π*(1)

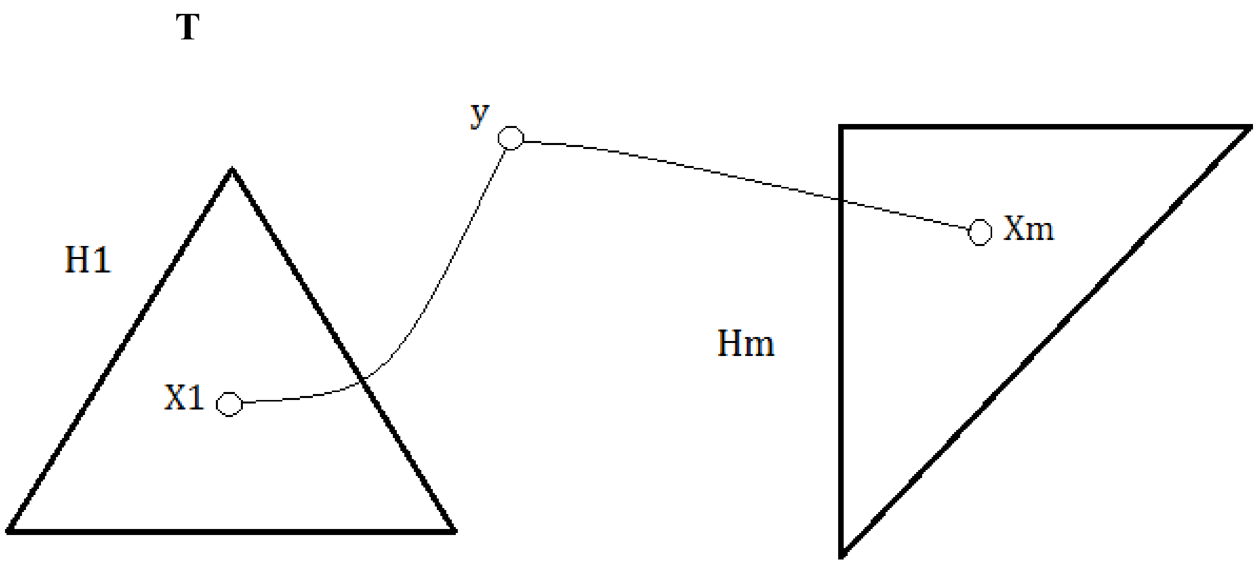
Επαγωγικό βήμα:

<u>Υποθέτουμε</u> <u>ότι</u> <u>για</u> <u>κάποιο</u> <u>τυχαίο</u> $K \geq 1$: αληθεύει ότι *Π*(K)

<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> <u>για το παραπάνω</u> K : αληθεύει ότι *Π*(K+1)

Π(K+1) = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$ με $|V| \leq K+1$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με $|V| = K+1$ κορυφές.



H1 ... Hm ξένα μεταξύ τους δέντρα, $\mathbf{m \geq 1}$

{ y , Xk } η *μοναδική* ακμή του T που συνδέει τα **y** , **Hk**

i $T = H1 \cup \ldots \cup Hm \cup \{ \{ y , Xk \} \mid k = 1, \ldots m \}$

ii Για $j = 1, \ldots m$:

$Hj = (Vj , Ej)$ όπου $1 \leq |Vj| \leq K$ % από ορισμό του Hj

$|Ej| = |Vj| - 1$ % από υπόθεση για K

iii $|E| = |E1| + \ldots + |Em| + m$ % H1 ... Hm ξένα μεταξύ τους

$= (|V1| - 1) + \ldots + (|Vm| - 1) + m$

$= |V1| + \ldots + |Vm|$

$= |V| - 1$ % H1 ... Hm ξένα μεταξύ τους

ΕΡΩΤΗΜΑ 3

Από μία *δεντρική δομή* T κατασκευάζουμε ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα Γ, παραλείποντας τις κατευθύνσεις των ακμών του G .

Επιβεβαιώστε ότι:

α Το γράφημα Γ θα είναι συνεκτικό.
β Το γράφημα Γ θα είναι άκυκλο.

Επιβεβαίωση του Ερωτήματος 2

Χρησιμοποιούμε ***συνοπτική*** *μαθηματική επαγωγή*.

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύουν τα *α* , *β* όταν το T έχει μόνο μία κορυφή.

Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποια τυχαία κατευθυνόμενα γραφήματα
Hj = (Vj , Zj) , j = 1, ... m , ξένα μεταξύ τους, όπου:
κάθε Hj είναι δεντρική δομή με ρίζα την κορυφή Xj :
αληθεύουν τα *α* , *β* .

Ελέγχουμε ότι για το κατευθυνόμενο γράφημα
$T = H1 \cup \ldots \cup Hm \cup \{ (y , Xj) \mid j = 1, \ldots m \}$:
αληθεύουν τα *α* , *β* .

Αναδρομικός υπολογισμός συναρτήσεων *με όρισμα δέντρο*

1) Για κάθε *δέντρο* T = (V, E) και κάθε *κορυφή* y του T ,
η συνάρτηση δ(T, y) υπολογίζει μία *δεντρική δομή*
Δ = (V , Z) με *ρίζα* την y.

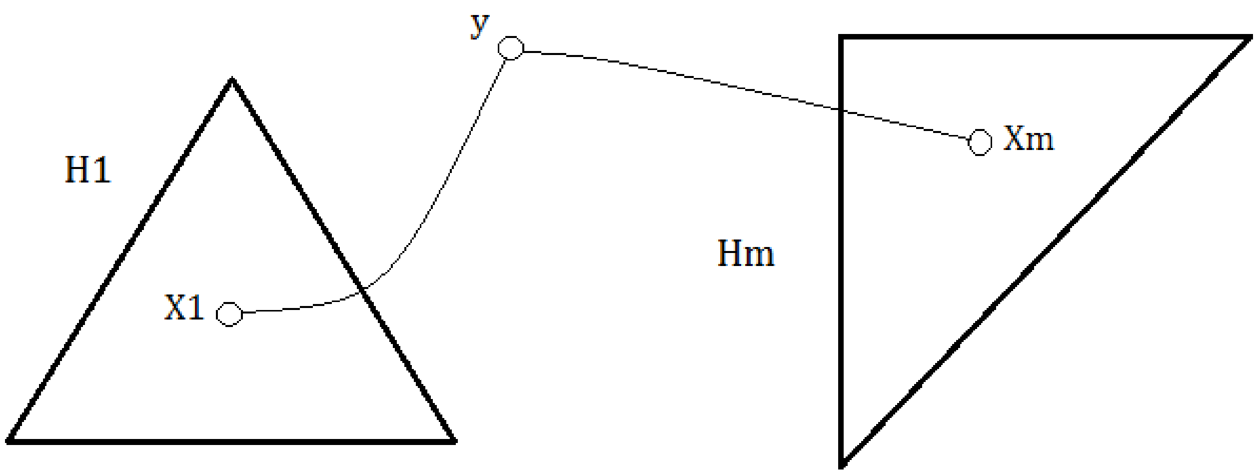
Οι ακμές της δεντρικής δομής **Δ** προκύπτουν κατευθύνοντας τις ακμές του T .

δ(T, y)

Όταν V = {y} : δ(T, y) = T με ρίζα την y % το δέντρο T δεν έχει ακμές

Όταν |V| > 1 :

T



Υπολογίζονται τα υπογραφήματα **H1 ... Hm , m ≥ 1 ,** και οι κορυφές **X1 ... Xm** .

H1 ... Hm οι *συνεκτικές συνιστώσες* του T – **y**

H1 ... Hm ξένα μεταξύ τους *δέντρα,*

{ y , Xk } η *μοναδική* ακμή του T που συνδέει τα **y** , **Hk**

H κορυφή **y** ορίζεται ως ρίζα της δομής **Δ** .

Για j = 1 , ... m , όπου **Hj** = (Vj , Ej) :

Υπολογίζεται, με την αναδρομική κλήση δ(**Hj** , **Xj**) ,
μία *δεντρική δομή* **Δj** = (Vj , Zj) με *ρίζα* την κορυφή Xj .

Στην δομή **Δ** , κάθε ακμή του **Hj** κατευθύνεται όπως στην δομή **Δj** .

H κορυφή **y** γίνεται γονέας της **Xj** στην δομή **Δ** .

Επιβεβαίωση ορθότητας της αναδρομής (1) :

<u>*Δήλωση*</u> *ορθότητας* της αναδρομής (1) , *για τον ακέραιο* $n \geq 1$:

D(n) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με $|V| \leq n$ κορυφές
και κάθε κορυφή y του T :
δ(T, y) είναι δεντρική δομή Δ(V, Z)
με ρίζα y και κατευθύνσεις στις ακμές του T }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 1$, ***D***(n) .

Αρχική περίπτωση:

<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> αληθεύει ότι *D*(1)

Επαγωγικό βήμα:

<u>Υποθέτουμε</u> <u>ότι</u> <u>για</u> <u>κάποιο</u> <u>τυχαίο</u> $K \geq 1$: αληθεύει ότι *D*(K)

<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> <u>για το παραπάνω</u> K : αληθεύει ότι *D*(K+1)

D(K+1) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με $|V| \leq K+1$ κορυφές
και κάθε κορυφή y του T :
δ(T, y) είναι δεντρική δομή Δ(V, Z)
με ρίζα y και κατευθύνσεις στις ακμές του T }

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με $|V| = K+1$ κορυφές,
y <u>τυχαία</u> κορυφή του T .

i $T = H1 \cup \ldots \cup Hm \cup \{ \{ y , Xj \} \mid j = 1, \ldots m \}$ % από ορισμό της δ

ii Για j = 1, … m:

Hj = (Vj , Ej) όπου $1 \leq |Vj| \leq K$ % από ορισμό της δ

δ(Hj , Xj) είναι δεντρική δομή Δj = (Vj , Zj)
με ρίζα Xj και κατευθύνσεις στις ακμές του Hj % από υπόθεση για K

iii δ(T, y) είναι δεντρική δομή Δ(V, Z)
με ρίζα y και κατευθύνσεις στις ακμές του T

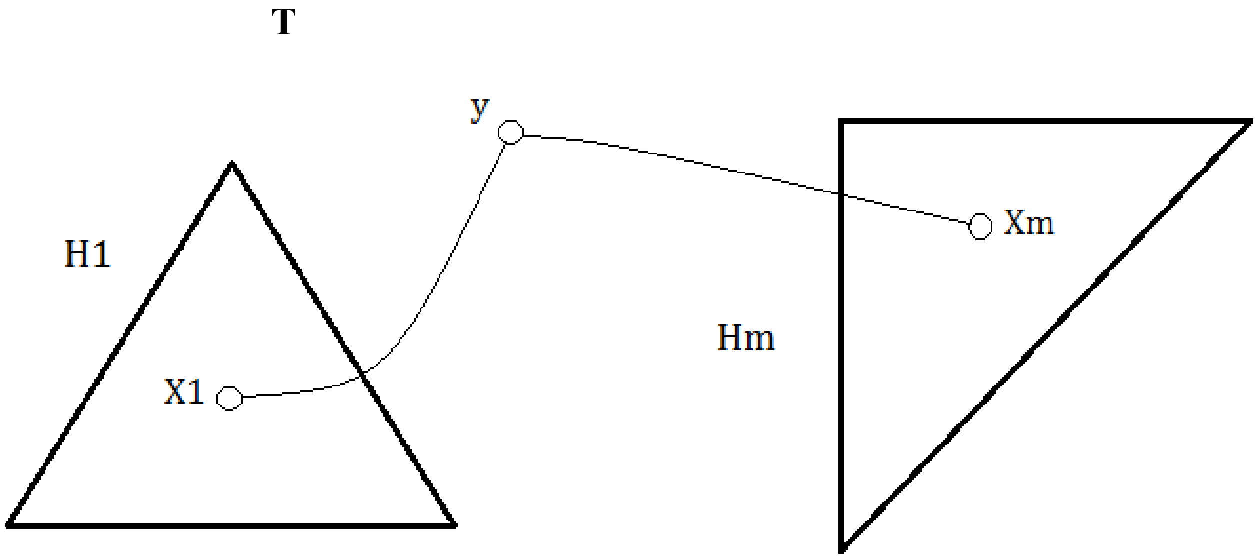
% από (ii) , ορισμό της δ ,
ορισμό δεντρικής δομής

2) Για κάθε *δέντρο* T = (V, E) και κάθε *κορυφή* y του T ,
η συνάρτηση μ(T, y) υπολογίζει το μέγιστο μήκος
των μονοπατιών του T που έχουν άκρο την y .

<u>μ(T, y)</u>

Όταν V = {y} : μ(T, y) = 0 % το δέντρο T δεν έχει ακμές

Όταν |V| > 1 :



Υπολογίζονται τα υπογραφήματα **H1 ... Hm** και οι κορυφές **X1 ... Xm** .

H1 ... Hm οι *συνεκτικές συνιστώσες* του T − **y**

H1 ... Hm ξένα μεταξύ τους *δέντρα*,
{ y , Xk } η *μοναδική* ακμή του T που συνδέει τα **y** , **Hk**

Για j = 1 , ... m , όπου **Hj** = (Vj , Ej) :

Υπολογίζεται, με την αναδρομική κλήση μ(**Hj** , **Xj**) ,
το μέγιστο μήκος των μονοπατιών του **Hj** που έχουν άκρο την **Xj** .

μ(T, y) ← maximum { 1 + μ(**Hj** , **Xj**) }

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε την ορθότητα της αναδρομής (2) .

Δήλωση ορθότητας της αναδρομής (2) ,
για το δέντρο T και την κορυφή y του T :

***D*(**T, y**)** = { μ(T, y) είναι το μέγιστο μήκος
των μονοπατιών του T που έχουν άκρο την y }

Αποδεικνύουμε με συνοπτική μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε T , y , αληθεύει ότι ***D*(**T, y**)** .

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύει ότι ***D*(**T, y**)** όταν το T έχει μόνο μία κορυφή.

Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποια τυχαία μη-κατευθυνόμενα γραφήματα
Hj = (Vj , Zj) , j = 1, ... m , ξένα μεταξύ τους, όπου:
κάθε Hj είναι δέντρο με κορυφή Xj :
αληθεύει ότι ***D***(Hj , Xj) .

Ελέγχουμε ότι για το μη-κατευθυνόμενο γράφημα
T = H1 ∪ ... ∪ Hm ∪ { (y , Xj) | j = 1, ... m } :
αληθεύει ότι *D*(T, y) .

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Γράψτε μία συνάρτηση *m*(T) που να υπολογίζει με αναδρομή, για κάθε δεδομένο δέντρο T , το μέγιστο μήκος των μονοπατιών του T .