ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V ένα σύνολο, και X1 … Xκ , κ ≥ 1 μία *οικογένεια υπο-συνόλων* του V .
Τα σύνολα { X_j | j = 1, … κ } είναι *διαμερισμός* του V μόνο όταν:

1 Είναι <u>μη-κενά</u> και <u>ξένα</u> μεταξύ τους,

2 V = X1 ∪ … Xκ .

ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Έστω **θ** μία σχέση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ,
που είναι *συμμετρική και μεταβατική*.

Θα υπάρχει διαμερισμός του A , X1 … Xκ , κ ≥ 1 , όπου:

Για x, y οποιαδήποτε *διαφορετικά* στοιχεία του A :

όταν x, y είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u> **θ**(x, y) = true
όταν x, y είναι <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u> **θ**(x, y) = false

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Κάθε στοιχείο u του A τοποθετείται σε αντίστοιχο διαμέρισμα H(u) :

H(u) = {u} ∪ { z | θ(u, z) = true }

Παρατήρηση Το διαμέρισμα H(u) είναι η *κλάση ισοδυναμίας* του u
ως προς την *σχέση ισοδυναμίας* $\boldsymbol{\theta_0}$ που ορίζεται ως εξής:

$\boldsymbol{\theta_0}$(x, y) = true *άν και μόνο άν* (x = y) είτε **θ**(x, y)

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Έστω θ μία σχέση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , για την οποία:

Υπάρχει διαμερισμός του A , X1 … Xκ , κ ≥ 1 , όπου:

Για x, y οποιαδήποτε *διαφορετικά* στοιχεία του A :

όταν x, y είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u> θ(x, y) = true
όταν x, y είναι <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u> θ(x, y) = false

Τότε η σχέση θ θα είναι *συμμετρική και μεταβατική*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω η σχέση θ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο ακεραίων Α :

Για $a \in A$, $b \in A$, θ(a, b) = true όταν:
a – b είναι πολλαπλάσιο του 3.

θ συμμετρική Να δείξω ότι ισχύει στο Α: u θ v *implies* v θ u

Ι) ***Υποθέτω*** *ότι αληθεύει* a θ b

ΙΙ) ***Θέλω*** *να αληθεύει* b θ a

I Έστω ότι δίνεται η ισότητα a – b = 3K

II *Αλλάζω το πρόσημο* : προκύπτει η ισότητα b – a = 3(–K)

θ μεταβατική Να δείξω ότι ισχύει στο Α:

(u θ **v** *and* **v** θ w) *implies* u θ w

Ι) ***Υποθέτω*** *ότι αληθεύει* a θ **b** *and* **b** θ c

ΙΙ) ***Θέλω*** *να αληθεύει* a θ c

I Έστω ότι δίνονται οι ισότητες a – **b** = 3K ,
b – c = 3Λ

II *Προσθέτω κατά μέλη* : προκύπτει η ισότητα a – c = 3(K+Λ)

Διαμερισμός του Α σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα

Έστω (u mod 3) το υπόλοιπο της διαίρεσης του u με το 3.

X0 = { u | u ∈ A , (u mod 3) = 0 }

X1 = { u | u ∈ A , (u mod 3) = 1 }

X2 = { u | u ∈ A , (u mod 3) = 2 }

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Φ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα πεπερασμένο σύνολο Α .

Έστω η σχέση θ όπου:

Για $a \in A$, $b \in A$, θ(a, b) = true όταν Φ(a) = Φ(b) .

<u>*θ συμμετρική*</u> <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο Α: u θ v *implies* v θ u

I) ***Υποθέτω*** *ότι αληθεύει* a θ b

II) ***Θέλω*** *να αληθεύει* b θ a

I Έστω ότι <u>δίνεται</u> η ισότητα Φ(a) = Φ(b)

II

<u>*θ μεταβατική*</u> <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο Α:

(u θ **v** *and* **v** θ w) *implies* u θ w

I) ***Υποθέτω*** *ότι αληθεύει* a θ **b** *and* **b** θ c

II) ***Θέλω*** *να αληθεύει* a θ c

I Έστω ότι <u>δίνονται</u> οι ισότητες Φ(a) = Φ(**b**)
Φ(**b**) = Φ(c)

II

Διαμερισμός του Α

Για κάθε Κ στο *πεδίο τιμών* της Φ :

$X_K = \{ u \mid u \in A , \Phi(u) = K \}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Επιβεβαιώστε ότι τα σύνολα $\{ X_K \mid K$ στο *πεδίο τιμών* της $\Phi \}$ αποτελούν διαμερισμό του Α .