

Γράφημα δυσυνεκτικό ως προς ακμές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **δυσυνεκτικό ως προς ακμές** μόνο όταν:

Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_1(x, y) = \text{true}$.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **μη-δυσυνεκτικό ως προς ακμές** μόνο όταν:

Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V , ώστε: $R_1(x, y) = \text{false}$.

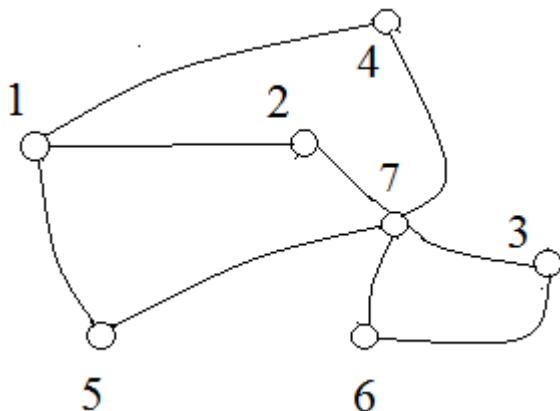
ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή, είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που έχει γέφυρα δεν μπορεί να είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι η ένωση των κύκλων $C_1 \dots C_n$, όπου κάθε κύκλος C_k έχει μία τουλάχιστον κοινή κορυφή με τον κύκλο $C_{(k+1)}$.
Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

G



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Επιβεβαιώστε ότι στο γράφημα G δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει όλες τις κορυφές.

Δισυνεκτική συν/σα ως προς ακμές κορυφής μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u μία κορυφή του G .

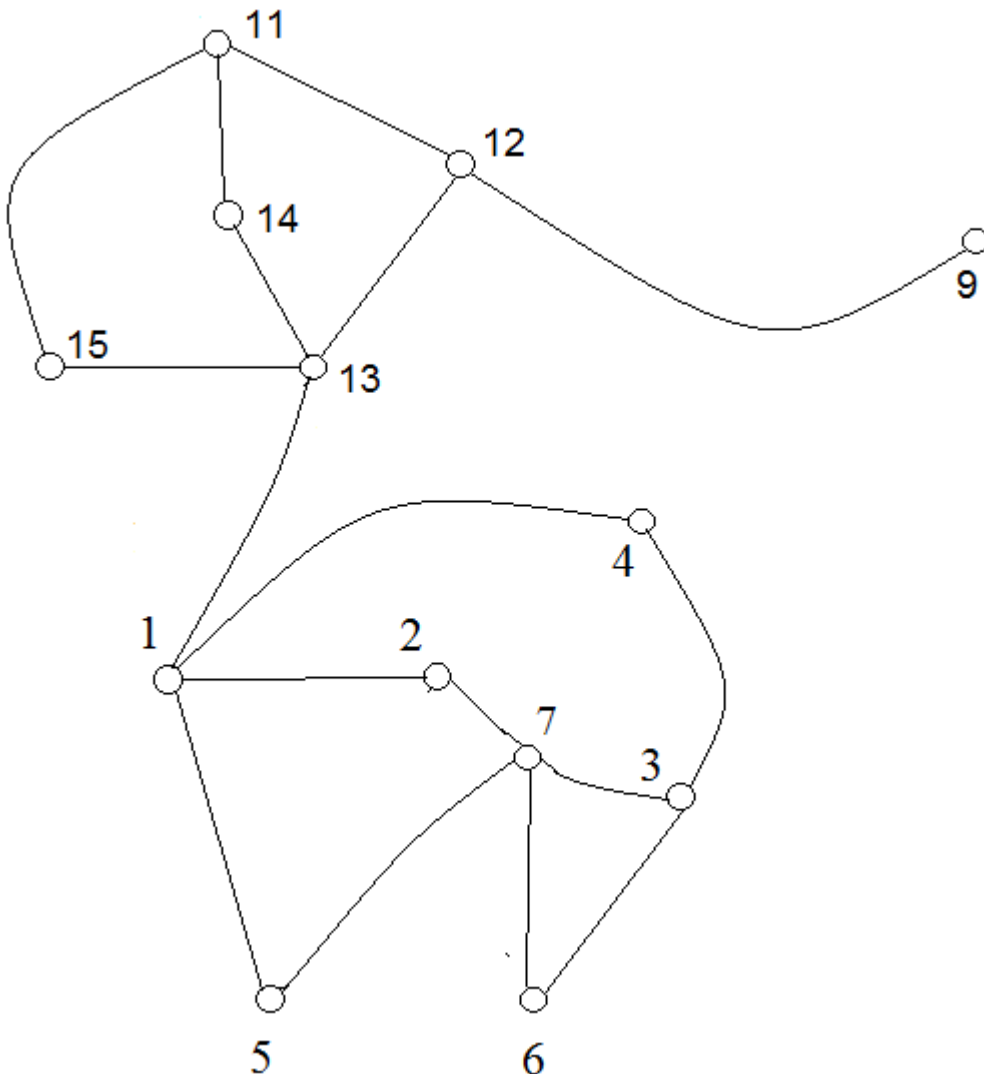
Ονομάζουμε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής u , το επαγόμενο υπο-γράφημα $H(u)$ του G :

- (1) με κορυφές $\Delta\Sigma(u) = \{u\} \cup \{x \mid \text{αληθεύει ότι } u R_i x\}$, και
- (2) με όλες τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του $\Delta\Sigma(u)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Για κάθε κορυφή του παρακάτω γραφήματος, βρείτε την δισυνεκτική συνιστώσα της ως προς ακμές.

$$\Delta\Sigma(11) = \Delta\Sigma(12) = \Delta\Sigma(13) = \Delta\Sigma(14) = \Delta\Sigma(15)$$

$$\Delta\Sigma(9) = \{9\}$$



$$\Delta\Sigma(1) = \Delta\Sigma(2) = \Delta\Sigma(3) = \Delta\Sigma(4) = \Delta\Sigma(5) = \Delta\Sigma(6) = \Delta\Sigma(7)$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι: Άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, για κάθε κορυφή u θα είναι $G = H(u)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u, v κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι: Άν $u \in \Delta\Sigma(v)$, θα είναι $\Delta\Sigma(u) = \Delta\Sigma(v)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Επιβεβαιώστε ότι:

- 1) Κάθε σύνολο $\Delta\Sigma(u)$ είναι μη-κενό.
- 2) Για κάθε κορυφή v υπάρχει κάποια u ώστε $v \in \Delta\Sigma(u)$.
- 3) Άν $\Delta\Sigma(u) \neq \Delta\Sigma(v)$, τα σύνολα $\Delta\Sigma(u), \Delta\Sigma(v)$ θα είναι ξένα.

Άν $y \in \Delta\Sigma(u)$ και $y \in \Delta\Sigma(v)$, από το **ΕΡΩΤΗΜΑ 8** θα είναι $\Delta\Sigma(y) = \Delta\Sigma(u)$ και $\Delta\Sigma(y) = \Delta\Sigma(v)$, άρα $\Delta\Sigma(u) = \Delta\Sigma(v)$.

Οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος θα είναι μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,
 $H(v)$ η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής v .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $H(v)$ είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :

Όταν x, y είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_i(x, y) = \text{true}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Επιβεβαιώστε ότι: Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές *άν και μόνο άν*: $G = H(u)$, για κάθε κορυφή u .

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,

$H(v)$ η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής v .

Επιβεβαιώστε ότι: *Γιά κάθε κορυφή y του $\Delta\Sigma(v)$,*

άν $y \in R_i x$, η κορυφή x θα είναι στο $\Delta\Sigma(v)$.

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :

Όταν x, y δεν είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_i(x, y) = \text{false}$

Από τα **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 9, 10, 12** :

Οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός
μη-κατευθυνόμενου γραφήματος είναι διαμερισμός για την R_i

Διαμερισμός σε δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$, $\lambda \geq 1$ οι διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές των κορυφών του.

- A** Τα υπο-γράφημα $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$ είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές, και διαμερίζουν τις κορυφές και τα κλειστά ίχνη του G .
- B** Τα υπο-γράφημα $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$ είναι ο μοναδικός διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών ιχνών του G , σε υπο-γράφημα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα, και $G_1 \dots G_\kappa$, $\kappa \geq 2$, ένας διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών ιχνών του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση δισυνεκτικών συνιστώσων ως προς ακμές του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 14 Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα, και $G_1 \dots G_\kappa$, $\kappa \geq 2$, ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι υπο-γράφημα κάποιας δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 15 Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, γράφημα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.

Επιβεβαιώστε ότι: Αν τα G_1, G_2 έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G_1 \cup G_2$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 16 Έστω Γ ένα γράφημα, G ένα δισυνεκτικό ως προς ακμές υπο-γράφημα του G , και δ ένα κλειστό ίχνος του Γ που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .

Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Υπολογισμός των δυσυνεκτικών συνιστώσων ως προς ακμές

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $e_1 \dots e_k$, $k \geq 0$ οι γέφυρες του G .

A Μία ακμή $e = \{u, v\}$ του G δεν είναι γέφυρα, *άν και μόνο αν* οι u, v είναι στην ίδια δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G .

Αν η ακμή $e = \{u, v\}$ δεν είναι γέφυρα θα περιέχεται σε κύκλο, επομένως $R_i(u, v) = \text{true}$ και $v \in \Delta\Sigma(u)$.

Αν η ακμή $e = \{u, v\}$ είναι γέφυρα, $R_i(u, v) = \text{false}$ και $v \notin \Delta\Sigma(u)$.

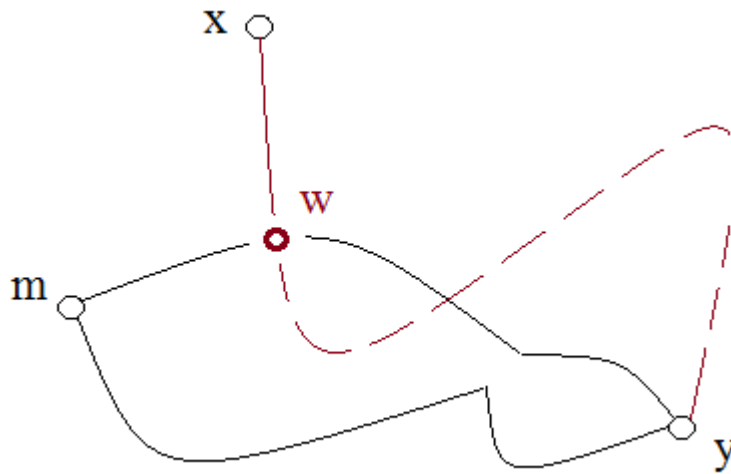
B Έστω H το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το G τις ακμές που είναι γέφυρες: οι συνεκτικές συνιστώσες του H θα είναι οι δυσυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G .

Στο H δεν προκύπτουν νέες γέφυρες που δεν υπήρχαν στο G : άρα κάθε ακμή του H θα περιέχεται σε κύκλο.

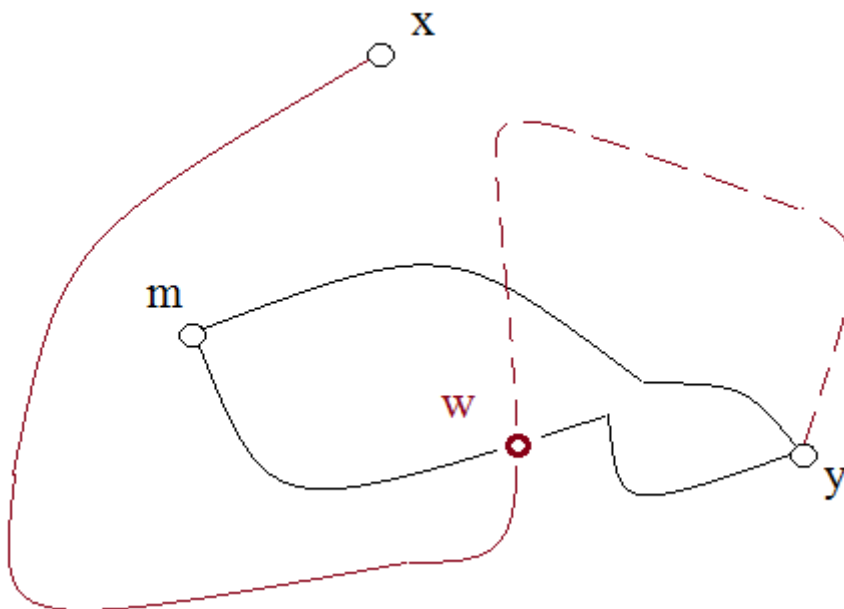
ΕΡΩΤΗΜΑ 17 Επιβεβαιώστε ότι: *άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα δεν έχει γέφυρα*, θα είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 18 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και u μία κορυφή του G . Περιγράψτε μια μέθοδο για να υπολογιστεί το σύνολο κορυφών $\Delta\Sigma(u) = \{u\} \cup \{x \mid \text{αληθεύει ότι } u R_1 x\}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 19 Το γράφημα G είναι δυσυνεκτικό ως προς ακμές, και x, m, y είναι διαφορετικές κορυφές του G . Να κατασκευαστεί ένα ίχνος του G , με άκρα τις x, y , που να περιέχει την m .

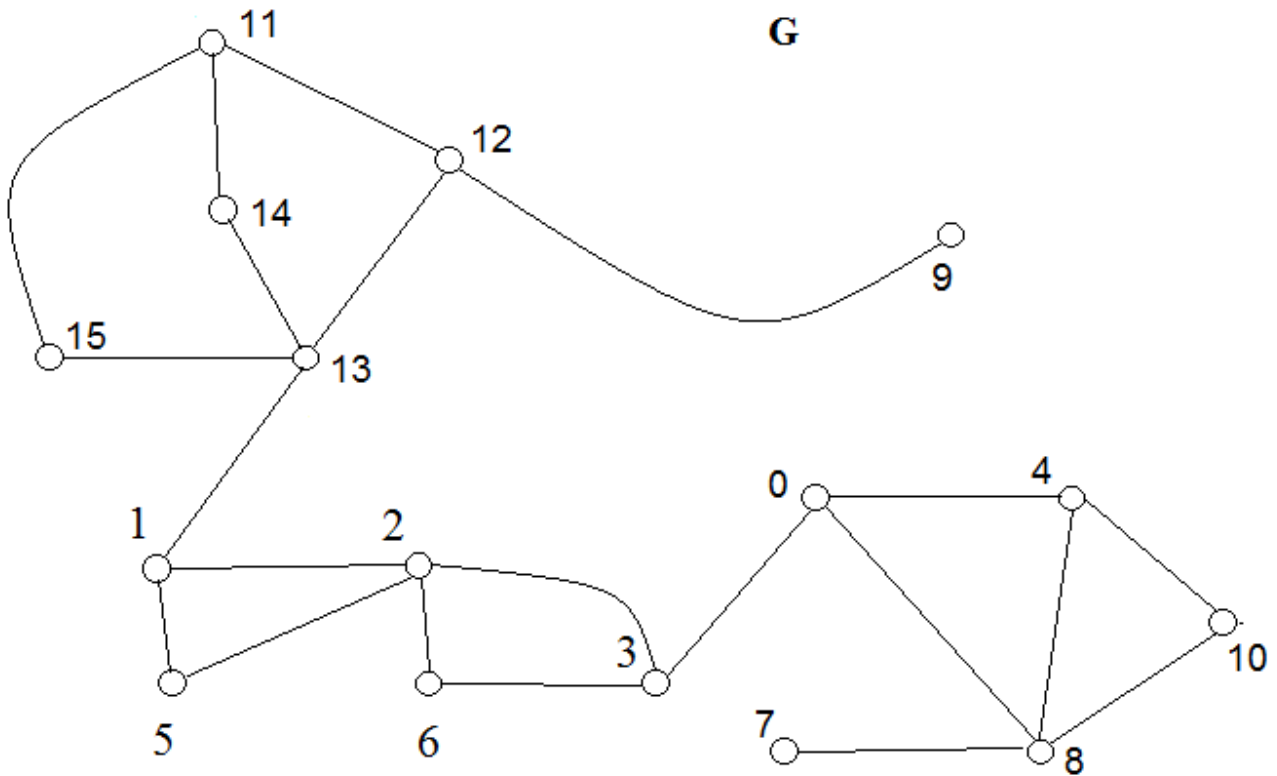


- I** ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις m, y
- μ** ένα μονοπάτι από την x στην y
- w** η πρώτη κορυφή του μ που ανήκει και στο **I**



ίχνος **J**: ακολουθώ το μ από την x ως την w ,
και συνεχίζω μέσω του **I**, προς την m και μετά ως την y

Γράφημα $H(G)$ των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G



Κορυφές της $H1$: {11, 12, 13, 14, 15, 16}

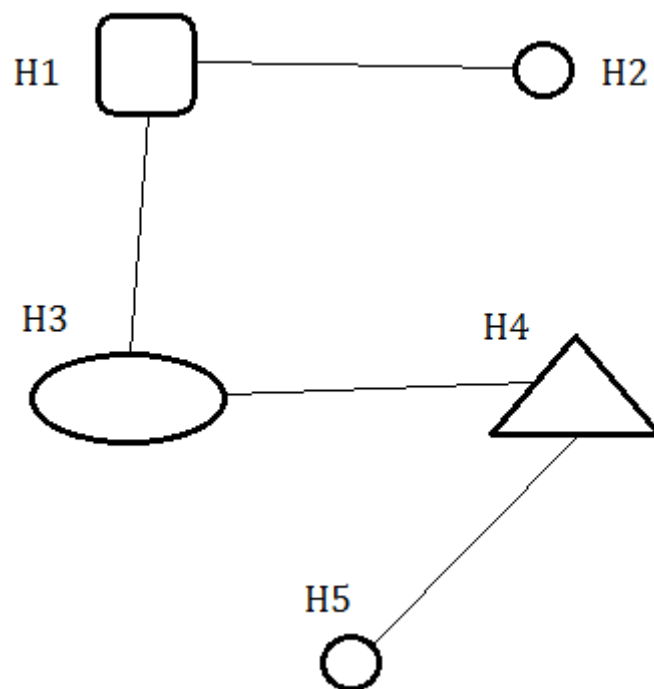
Κορυφές της $H2$: {9}

Κορυφές της $H3$: {1, 2, 3, 6, 5}

Κορυφές της $H5$: {7}

Κορυφές της $H4$: {0, 4, 10, 8}

$H(G)$



ΕΡΩΤΗΜΑ 20 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , το γράφημα των δυσυνεκτικών συνιστώσων ως προς ακμές $H(G)$ θα είναι δέντρο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 21 Επιβεβαιώστε ότι: Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, θα υπάρχει (τουλάχιστον) μία δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που θα συνδέεται με μόνο μία άλλη δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 22 Το G είναι μη-κατευθυνόμενο γράφημα, η κορυφή x είναι στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_j , η κορυφή y είναι στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H_k .

Επιβεβαιώστε ότι, για τυχαία κορυφή m στην δυσυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H : υπάρχει ίχνος του G με άκρα τις x, y που περιέχει την m , *άν και μόνο αν* η H βρίσκεται στο μοναδικό μονοπάτι του $H(G)$ με άκρα τις H_j, H_k .