

Διπροσβασιμότητα ως προς ακμές

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *διπροσβασιμότητα ως προς ακμές* για το G , την παρακάτω σχέση R_1 πάνω στο σύνολο V :

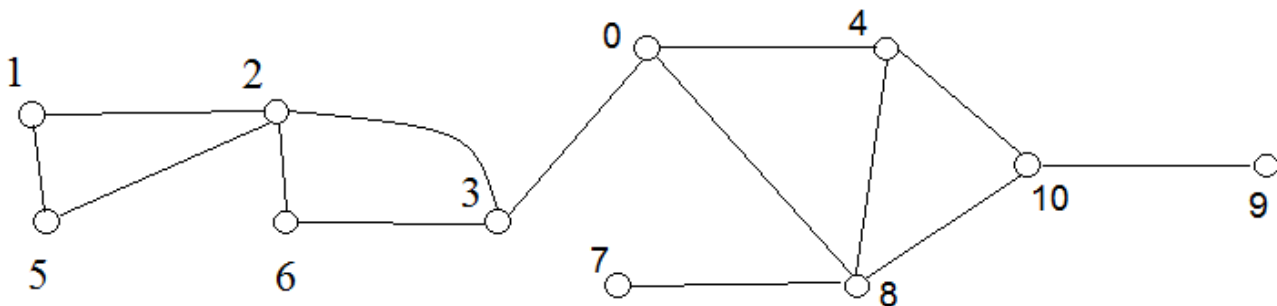
Για $a \in V, b \in V$, $R_1(a, b) = \text{true}$ όταν:
υπάρχει κάποιο κλειστό ίχνος όπου εμφανίζονται οι κορυφές a, b .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα και κορυφές $a \neq b$: $a R_1 b$ *άν και μόνο αν* υπάρχουν δύο μονοπάτια με άκρα τις a, b , χωρίς κοινές ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $\{a, b\}$ μία γέφυρα του G . Επιβεβαιώστε ότι, *άν* οι κορυφές u, v βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - \{a, b\}$: $R_1(u, v) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε κορυφές για τις οποίες:

- α Να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές, αλλά να μην βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.
- β Να μην αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές.



1 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές για το G είναι συμμετρική.

Να δείξω ότι ισχύει στο V : $u R_1 v \text{ implies } v R_1 u$

Αν υπάρχει κάποιο κλειστό ίχνος όπου εμφανίζονται οι u και v ,
το ίδιο κλειστό ίχνος θα περιέχει τις κορυφές v και u .

2 Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές για το G είναι μεταβατική.

Η απόδειξη υπάρχει στο εκπαιδευτικό υλικό του μαθήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ R_1

Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$:

Υπάρχει διαμερισμός του V σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα

$X_1 \dots X_k$, $k \geq 1$, όπου:

(1) $V = X_1 \cup \dots \cup X_k$,

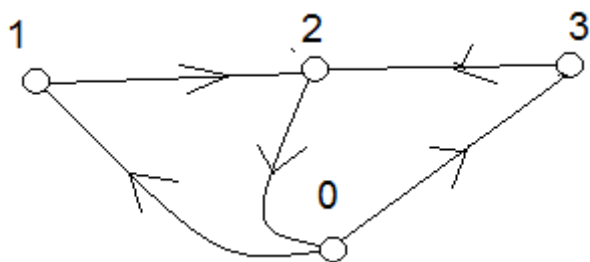
(2) Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :

όταν x, y είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_1(x, y) = \text{true}$

όταν x, y δεν είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_1(x, y) = \text{false}$

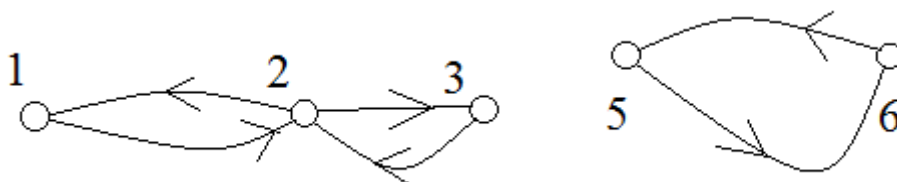
ΕΡΩΤΗΜΑ 4

α Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_1 να μην είναι μεταβατική.



Αληθεύει ότι $1 R_1 2$ and $2 R_1 3$
 Δεν αληθεύει ότι $1 R_1 3$

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_1 να είναι μεταβατική.



$u R_1 v$ αν και μόνο αν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{5, 6\}$

Αν $(u R_1 v \text{ and } v R_1 w)$: είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{5, 6\}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $C_1 \dots C_n$ μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος C_k έχει μία τουλάχιστον κοινή κορυφή με τον κύκλο C_{k+1} .

Επιβεβαιώστε ότι: αν η κορυφή u βρίσκεται στον C_1 και η κορυφή v στον C_n , θα είναι $R_i(u, v) = \text{true}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Στα παρακάτω γραφήματα βρείτε τα ζεύγη κορυφών για τα οποία αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές.

