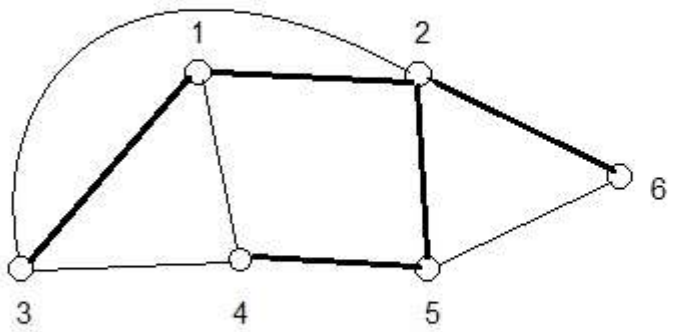
ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Ονομάζουμε ***δέντρο επικάλυψης*** ενός συνεκτικού γραφήματος G ,
ένα υπο-γράφημα του G που είναι *δέντρο* (συνεκτικό και άκυκλο)
και *περιέχει κάθε κορυφή του* G .

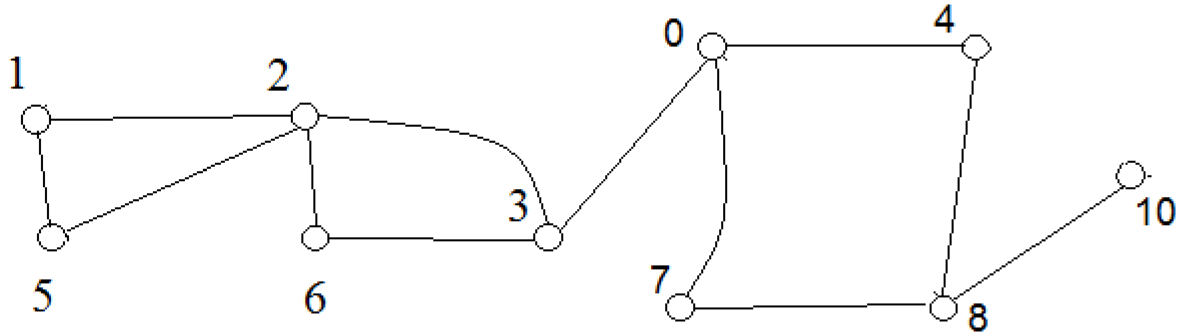


Ονομάζουμε ***δάσος επικάλυψης*** ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G :
ένα άκυκλο υπο-γράφημα του G που αποτελείται από *ακριβώς ένα*
δέντρο επικάλυψης για κάθε μία συνεκτική συνιστώσα του G.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Βρείτε τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά δέντρα επικάλυψης του γραφήματος Γ .

Γ



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: Άν η ακμή e είναι γέφυρα του συνεκτικού γραφήματος G , θα περιέχεται σε κάθε δέντρο επικάλυψης του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι:
Άν το γράφημα $G = (V, E)$ είναι δέντρο, το G θα είναι το *μοναδικό* δέντρο επικάλυψης του G .

Άν το $T = (V, Z)$ είναι δέντρο επικάλυψης του G :
$Z \subseteq E$, και $|Z| = |V| - 1 = |E|$. Άρα $Z = E$ και $T = G$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Άν το γράφημα $G = (V, E)$ είναι δέντρο, και x , y είναι κορυφές του G:
θα υπάρχει *μοναδικό* μονοπάτι με άκρα τις x , y .

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο *συνεκτικό* γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν $|E| = |V| - 1$, το G θα είναι δέντρο.

Έστω $T = (V, Z)$ ένα <u>δέντρο επικάλυψης</u> του G :
$Z \subseteq E$, και $|Z| = |V| - 1 = |E|$. Άρα $Z = E$ και $T = G$.

β Άν $|E| = |V|$, το G θα περιέχει *ακριβώς ένα* κύκλο.

Άν $|E| = |V|+1$: Το G θα περιέχει *τουλάχιστον δύο* κύκλους.

Έστω $T = (V, Z)$ ένα <u>δέντρο επικάλυψης</u> του G : $|Z| = |V| - 1$.
Κάθε ακμή του G που δεν είναι ακμή του T
θα σχηματίζει *ακριβώς ένα* κύκλο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο *συνεκτικό* γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

Άν $|E| = |V|+1$, το G θα περιέχει *το πολύ τρείς* κύκλους.

Υπολογισμός δέντρου επικάλυψης συνεκτικού γραφήματος G μέσω αναζήτησης

Active $\leftarrow$ { s }   % s τυχαία κορυφή του G

Finished $\leftarrow$ { }

Tree-edges $\leftarrow$ { }

L1: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΚΟΡΥΦΗ* u $\in$ *Active*

    Finished $\leftarrow$ *Finished* $\cup$ { u }

    Active $\leftarrow$ *Active* – { u }

  L2: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ* {u , v} του G

      If v $\notin$ *Active* $\cup$ *Finished*

        then *Active* $\leftarrow$ *Active* $\cup$ { v }

          Tree-edges $\leftarrow$ *Tree-edges* $\cup$ { {u, v} }

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Τροποποιείστε τον παραπάνω αλγόριθμο ώστε:
για δεδομένη κορυφή s του G , να υπολογίζει μία *δεντρική δομή με ρίζα* s που να περιέχει όλες τις κορυφές του G .

Υπολογισμός δέντρου επικάλυψης συνεκτικού γραφήματος G = (V, E)
μέ αφαίρεση μη-γεφυρών

Rest ← E

L: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ* e ∈ *Rest*

If e δεν είναι γέφυρα του (V , *Rest*)

then *Rest* ← *Rest* – {e}

return (V, *Rest*)

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι:

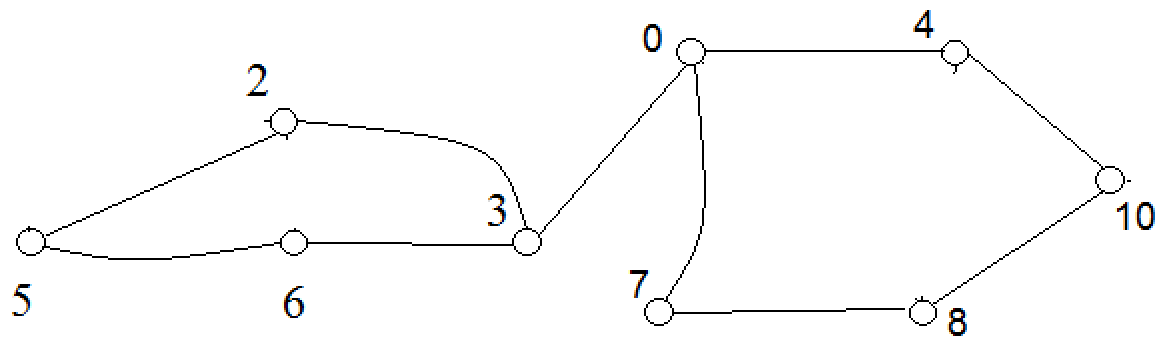
α Αμέσως μετά από *κάθε* εκτέλεση του βρόχου L ,
το γράφημα (V, *Rest*) θα είναι συνεκτικό.

β Στο τέλος του βρόχου L , το γράφημα (V, *Rest*) θα είναι δέντρο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8

α Έστω Γ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που *είναι* ένας κύκλος μήκους n .
Βρείτε *όλα* τα δέντρα επικάλυψης του Γ .

β Βρείτε *όλα* τα δέντρα επικάλυψης του παρακάτω γραφήματος.



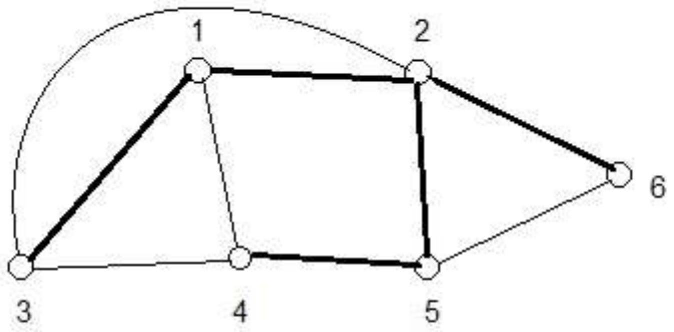
ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα και Γ ένα άκυκλο
υπο-γράφημα του G . Περιγράψτε πώς μπορεί να υπολογιστεί
ένα δέντρο επικάλυψης του G που να περιέχει τις ακμές του Γ .

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΚΥΚΛΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

Ονομάζουμε ***χορδή*** ενός συνεκτικού γραφήματος G ***ως προς το δέντρο επικάλυψης*** **T** : μία ακμή του G που *δεν είναι ακμή* του T .

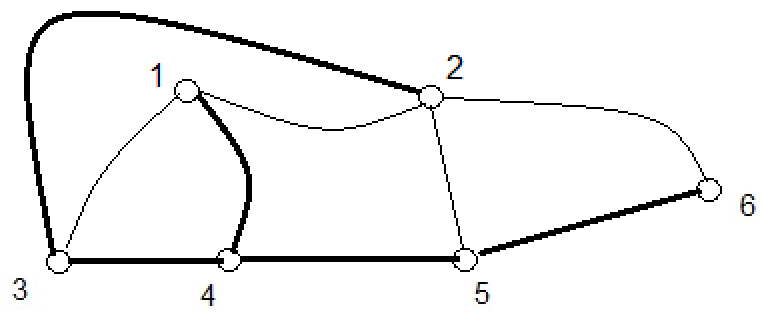
Ονομάζουμε ***στοιχειώδη κύκλο ως προς το δέντρο επικάλυψης*** **T** , ένα κύκλο του G που *περιέχει μόνο μία χορδή ως προς το* T .

Γ



Ο κύκλος (1 , {1, 4} , 4 , {4, 3} , 3 , {3, 1} , 1) δεν είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

Γ



Ο κύκλος (1 , {1, 4} , 4 , {4, 3} , 3 , {3, 1} , 1) είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν το T είναι ένα δέντρο επικάλυψης του G, και e είναι μία χορδή του G ως προς το T: θα υπάρχει *ακριβώς ένας* κύκλος του G που είναι στοιχειώδης ως προς το T και περιέχει την ακμή e.

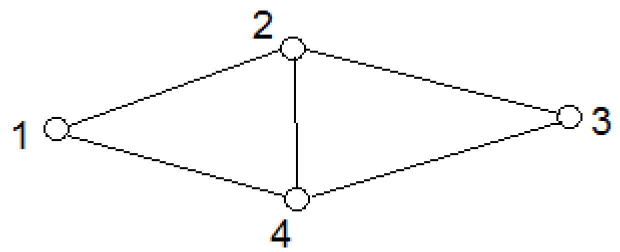
β Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του G, υπάρχουν *ακριβώς* $|E|-|V|+1$ κύκλοι του G που είναι στοιχειώδεις ως προς το T.

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

α Βρείτε ένα δέντρο επικάλυψης T του παραπάνω γραφήματος Γ, ώστε ο κύκλος (1, _ , 2 , _ , 5 , _ , 4 , _ 3 , _ 1) να είναι στοιχειώδης ως προς το T.

β Πόσα τέτοια δέντρα επικάλυψης υπάρχουν;

ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Για κάθε έναν από τους κύκλους του γραφήματος, βρείτε ένα δέντρο επικάλυψης ως προς το οποίο ο κύκλος να *μην* είναι στοιχειώδης, και ένα δέντρο επικάλυψης ως προς το οποίο ο κύκλος να *είναι* στοιχειώδης .



ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Επιβεβαιώστε ότι: Γιά κάθε δέντρο επικάλυψης T του γραφήματος, κάθε κύκλος είναι στοιχειώδης ως προς το T.