

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G θα είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων, άν και μόνο αν το G δεν έχει απομονωμένες κορυφές, και έχει μόνο άρτιους βαθμούς (οι βαθμοί όλων των κορυφών του είναι άρτιοι αριθμοί).

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν $|A|, |B|$ άρτιοι, $|A \oplus B|$ θα είναι άρτιος.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} |A \oplus B| &= |A \cup B| - |A \cap B| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - 2|A \cap B|. \end{aligned}$$

β Άν καθένα από τα γραφήματα H_1, H_2 έχει μόνο άρτιους βαθμούς, το γράφημα $H_1 \oplus H_2$ θα έχει μόνο άρτιους βαθμούς.

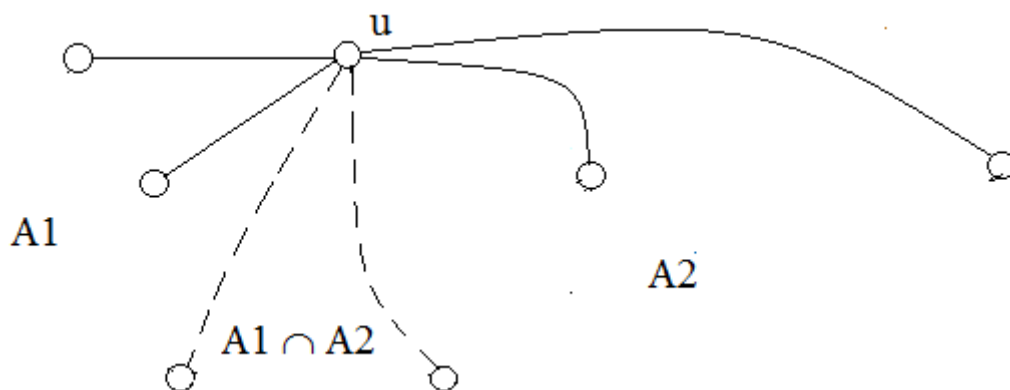
Έστω u μία κορυφή του $H_1 \oplus H_2$,

A το σύνολο των ακμών του $H_1 \oplus H_2$ που προσπίπτουν στην u ,

A_1 το σύνολο των ακμών του H_1 που προσπίπτουν στην u ,

A_2 το σύνολο των ακμών του H_2 που προσπίπτουν στην u .

Θα έχουμε: $A = A_1 \oplus A_2$, $|A_1|, |A_2|$ άρτιοι. Άρα $|A|$ άρτιος.



$$|A_1| = 4, |A_2| = 4, |A_1 \cap A_2| = 2$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: Αν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων, το G θα έχει μόνο άρτιους βαθμούς.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι: Αν ένα γράφημα έχει μόνο άρτιους βαθμούς και έχει μία (τουλάχιστον) ακμή, θα περιέχει κύκλο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε ότι: Αν ένα γράφημα έχει μόνο άρτιους βαθμούς και δεν έχει απομονωμένες κορυφές, θα είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων.

Η παρακάτω αναδρομική συνάρτηση $\sigma(G)$ υπολογίζει, για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ με μόνο άρτιους βαθμούς και χωρίς απομονωμένες κορυφές, ένα σύνολο κύκλων του G που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή, έτσι ώστε: το γράφημα G να είναι η ένωση των κύκλων του συνόλου $\sigma(G)$.

Όταν $E = \{ \}$: $\Sigma = \emptyset$.

Όταν $E \neq \{ \}$:

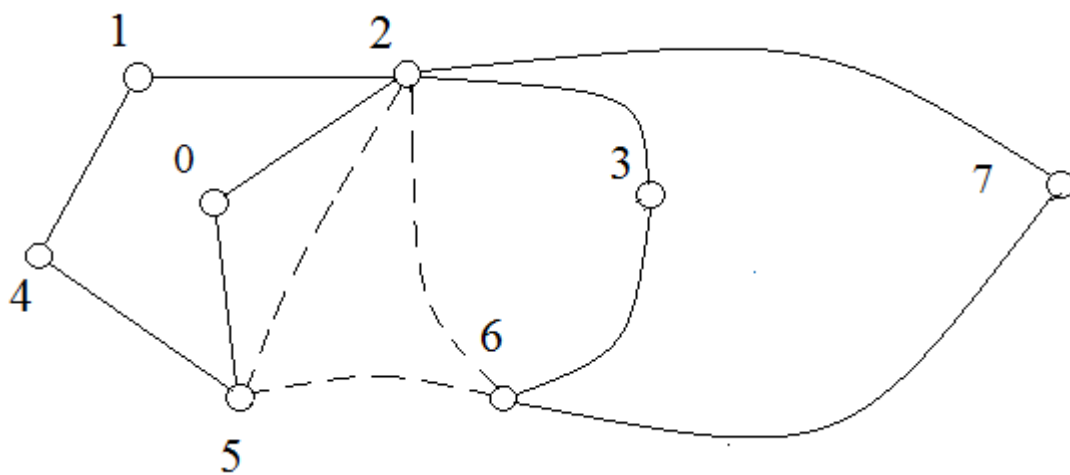
Έστω C ένας κύκλος του G (βλέπε Ερώτημα 3).

Αφαιρώντας από το G τις ακμές του C και όσες κορυφές έμειναν απομονωμένες, προκύπτει ένα γράφημα G_1 που έχει μόνο άρτιους βαθμούς.

Υπολογίζεται αναδρομικά ένα σύνολο κύκλων $\sigma(G_1)$ του G_1 , που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή, έτσι ώστε: το γράφημα G_1 να είναι η ένωση των κύκλων του συνόλου $\sigma(G_1)$.

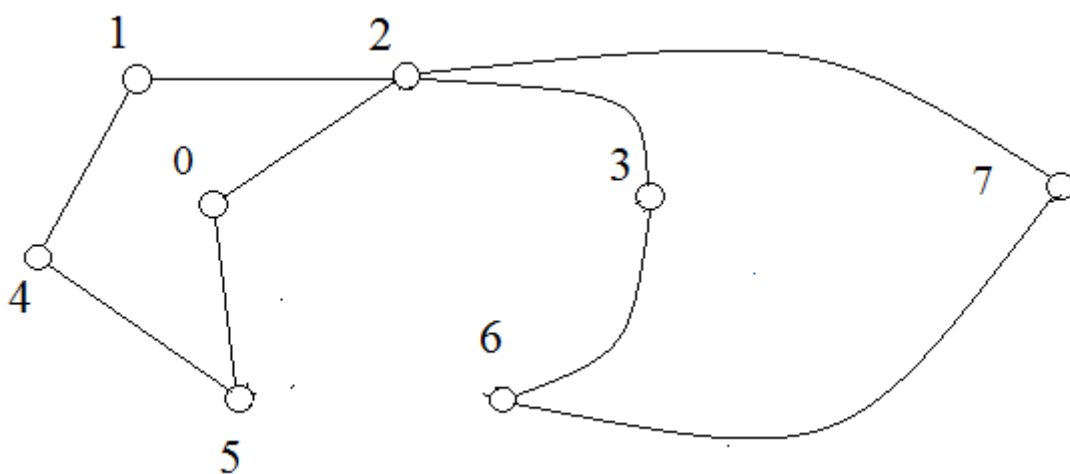
Επιστρέφεται το σύνολο κύκλων $\{C\} \cup \sigma(G_1)$.

G



C: (2_5_6_2)

G1



$\sigma(G1)$: { (1_2_0_5_4_1) , (7_2_3_6_7) }

$\sigma(G)$: { (1_2_0_5_4_1) , (2_5_6_2) , (7_2_3_6_7) }