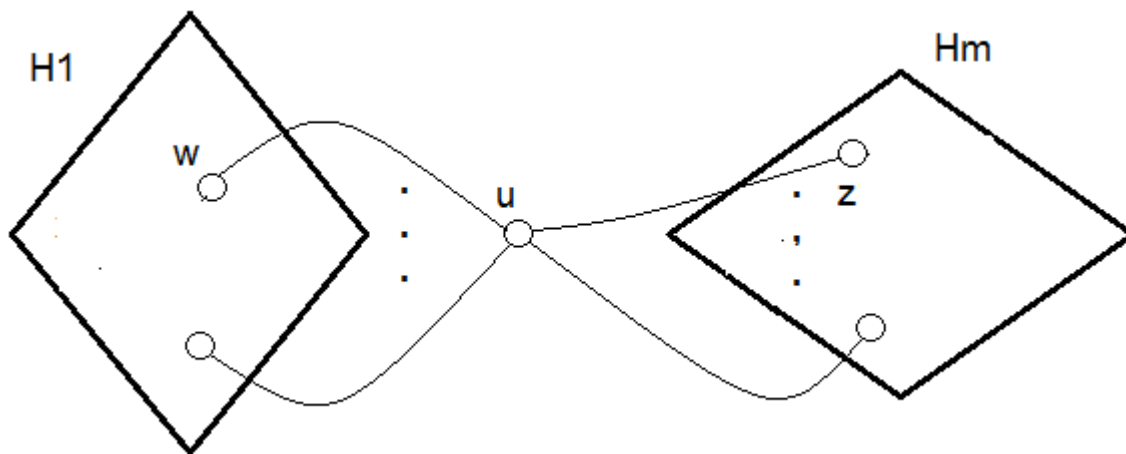


Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  με κομβικό  $u$  :

$H_1 \dots H_m$ ,  $m \geq 2$ , συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους



$H_1 \dots H_m$  οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G - u$

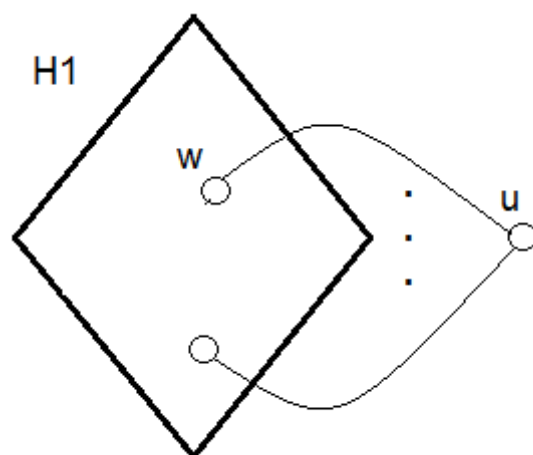
**ΘΕΩΡΗΜΑ** Ύπαρξη μη-κομβικών σημείων

Κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, έχει δύο (τουλάχιστον) κορυφές που δεν είναι κομβικά σημεία:

Τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού θα είναι μη-κομβικά.

Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθ/νου γραφήματος  $G$  με μη-κομβικό  $u$  :

$H_1$  συνεκτικό



$u$  μη-κομβικό στο  $G$ ,  $H_1 = G - u$

## Μαθηματική επαγωγή για συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα

1) Για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  :  $|E| \geq |V| - 1$  .

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (1) ,  $n \geq 1$  :

$P(n) = \{ \text{για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα } G = (V, E)$   
με  $|V| = n$  κορυφές:  $|E| \geq |V| - 1 \}$

*Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:*

**Για κάθε  $n \geq 1$  ,  $P(n)$  .**

*Αρχική περίπτωση:*

Ελέγχουμε ότι αληθεύει  $P(1)$

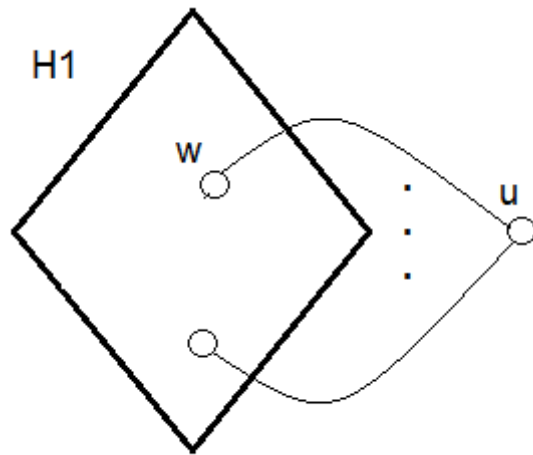
*Επαγωγικό βήμα:*

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο  $K \geq 1$  : αληθεύει ότι  $P(K)$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω  $K$  : αληθεύει ότι  $P(K+1)$

$P(K+1) = \{ \text{για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα } G = (V, E)$   
με  $|V| = K+1$  κορυφές:  $|E| \geq |V| - 1 \}$

**G**



**H1** συνεκτικό

Έστω:  $G = (V, E)$  τυχαίο συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με  $|V| = K+1$  κορυφές.

*i*  $G = H1 \cup \{ \{ u, w \}, \dots \}$

*ii*  $H1 = (V1, E1)$  όπου  $1 \leq |V1| = K$  % από ορισμό του H1

$|E1| \geq |V1| - 1$  % από υπόθεση για K

*iii*  $|E| \geq |E1| + 1$  % u δεν ανήκει στο H1

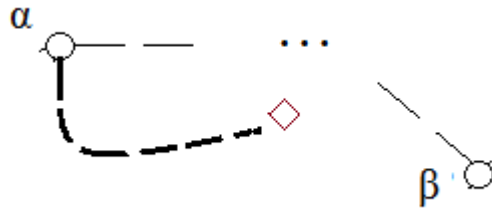
$\geq (|V1| - 1) + 1$

$= |V1| = |V| - 1$  % u δεν ανήκει στο H1

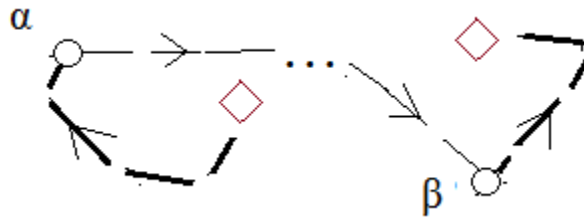
## Ιδιότητες των άκυκλων γραφημάτων

Έστω  $\mu = (a, \dots, \beta)$  ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι του άκυκλου γραφήματος  $G$  :

i Αν το  $G$  είναι μη-κατευθυνόμενο, οι κορυφές  $a, \beta$  θα έχουν βαθμό 1 στο  $G$ .



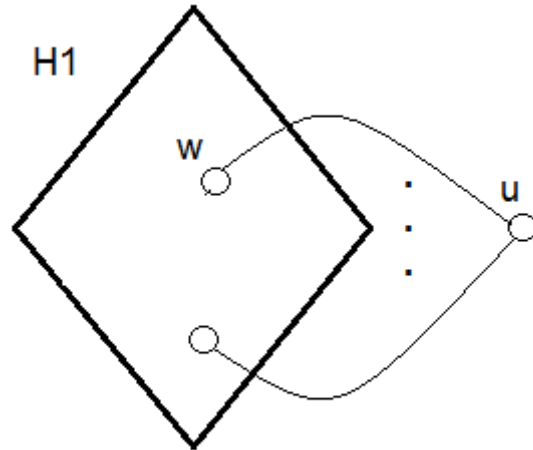
ii Αν το  $G$  είναι κατευθυνόμενο, η κορυφή  $a$  θα έχει έσω-βαθμό 0 στο  $G$ , και η κορυφή  $\beta$  θα έχει έξω-βαθμό 0 στο  $G$ .



*ΔΕΝΤΡΟ* Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $T$  ονομάζεται δέντρο, όταν είναι άκυκλο και συνεκτικό.

Γενική μορφή συνεκτικού γραφήματος  $G$  :

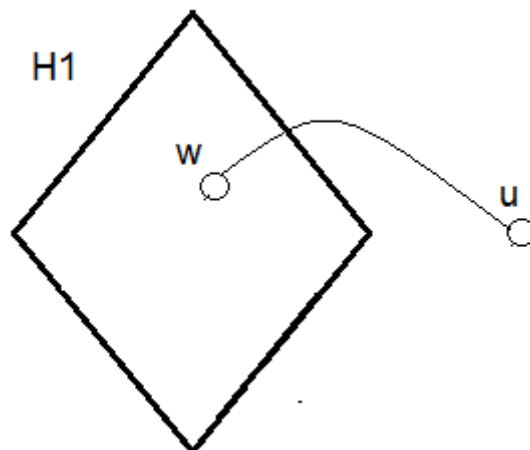
**H1** συνεκτικό



$u$  μη-κομβικό στο  $G$ ,  $H1 = G - u$

Γενική μορφή συνεκτικού άκυκλου γραφήματος  $T$  :

**H1** συνεκτικό άκυκλο



$u$  μη-κομβικό στο  $T$ ,  $H1 = T - u$

## Μαθηματική επαγωγή για δέντρα

2) Για κάθε δέντρο  $T = (V, E)$  :  $|E| = |V| - 1$  .

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (2) ,  $n \geq 1$  :

$$P(n) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \\ \text{με } |V| = n \text{ κορυφές: } |E| = |V| - 1 \}$$

*Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:*

Για κάθε  $n \geq 1$  ,  $P(n)$  .

*Αρχική περίπτωση:*

Ελέγχουμε ότι αληθεύει  $P(1)$

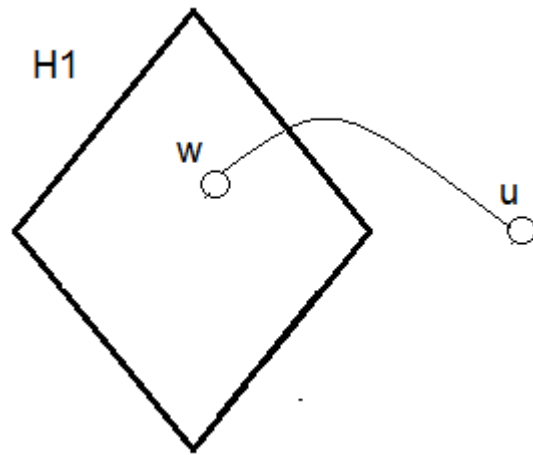
*Επαγωγικό βήμα:*

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο  $K \geq 1$  : αληθεύει ότι  $P(K)$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω  $K$  : αληθεύει ότι  $P(K+1)$

$$P(K+1) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \\ \text{με } |V| = K+1 \text{ κορυφές: } |E| = |V| - 1 \}$$

**T**



**H1** δέντρο

Έστω:  $T = (V, E)$  τυχαίο δέντρο με  $|V| = K+1$  κορυφές.

*i*  $T = H1 \cup \{ \{ u, w \} \}$

*ii*  $H1 = (V1, E1)$  όπου  $1 \leq |V1| = K$  % από ορισμό του H1

$|E1| = |V1| - 1$  % από υπόθεση για K

*iii*  $|E| = |E1| + 1$  % u δεν ανήκει στο H1

$= (|V1| - 1) + 1$

$= |V1| = |V| - 1$  % u δεν ανήκει στο H1

**ΕΡΩΤΗΜΑ 1** Έστω  $G = (V, E)$  ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Επιβεβαιώστε ή βρείτε αντιπαράδειγμα για το ότι:

$\alpha$  Αν το  $G$  είναι συνεκτικό και  $|E| = |V| - 1$ , το  $G$  θα είναι άκυκλο.

Αν στο  $G$  υπάρχει ένας κύκλος, μπορούμε να αφαιρέσουμε μία (τυχαία) ακμή  $e$  του κύκλου.

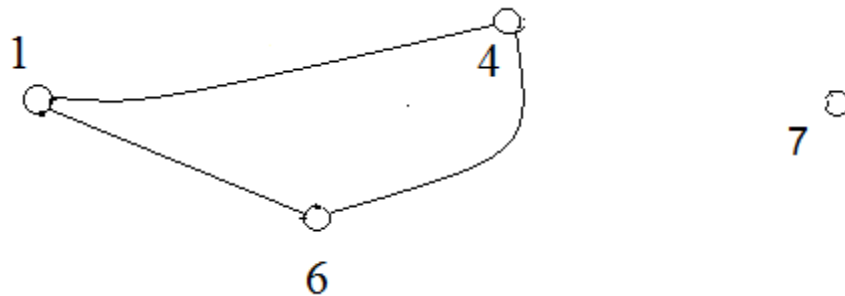
Επειδή η  $e$  δεν είναι γέφυρα του  $G$ : το  $G - e$  θα είναι συνεκτικό, επομένως  $|E| - 1 \geq |V| - 1$ .

$\beta$  Αν το  $G$  είναι άκυκλο και  $|E| = |V| - 1$ , το  $G$  θα είναι συνεκτικό.

Αν το  $G$  έχει  $K$  συνεκτικές συνιστώσες:  $|E| = |V| - K$ .

$\gamma$  Αν  $|E| \geq |V| - 1$ , το  $G$  θα είναι συνεκτικό.

$\delta$  Αν  $|E| = |V| - 1$ , το  $G$  θα είναι άκυκλο.





2β) Για κάθε δέντρο  $T = (V, E) : |E| = |V| - 1$ .

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (2β),  $n \geq 1$  :

$P(n) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \text{ με } |V| \leq n \text{ κορυφές: } |E| = |V| - 1 \}$

*Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:*

**Για κάθε  $n \geq 1$ ,  $P(n)$ .**

*Αρχική περίπτωση:*

Ελέγχουμε ότι αληθεύει  $P(1)$

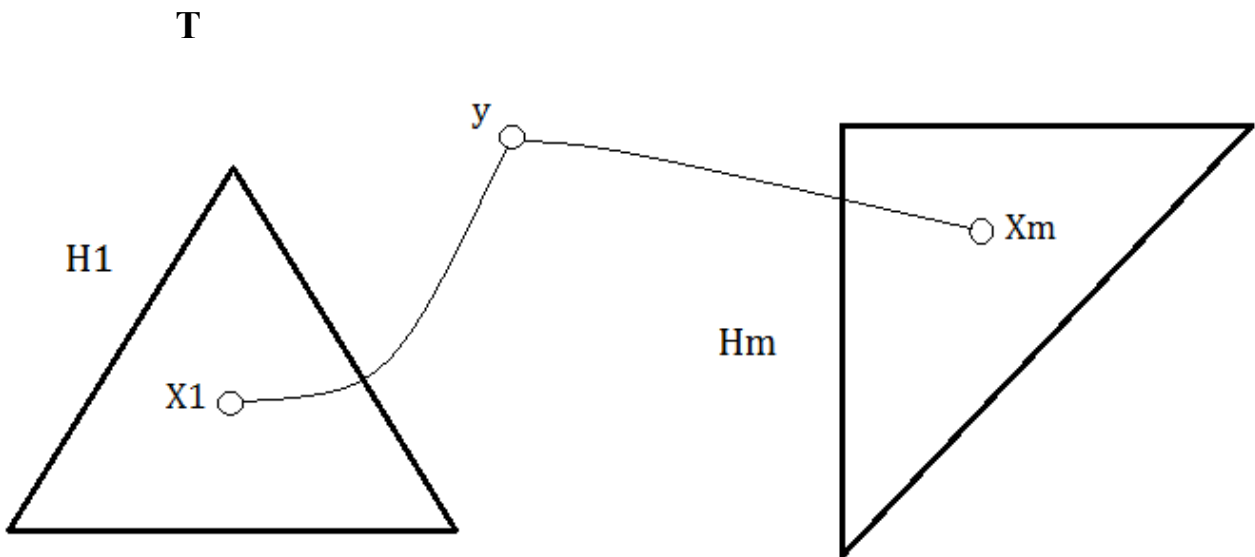
*Επαγωγικό βήμα:*

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο  $K \geq 1$  : **αληθεύει ότι  $P(K)$**

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω  $K$  : **αληθεύει ότι  $P(K+1)$**

$P(K+1) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \text{ με } |V| \leq K+1 \text{ κορυφές: } |E| = |V| - 1 \}$

Έστω:  $T = (V, E)$  τυχαίο δέντρο με  $|V| = K+1$  κορυφές.



**$H_1 \dots H_m$**  ξένα μεταξύ τους δέντρα,  $m \geq 1$

$\{y, x_k\}$  η μοναδική ακμή του  $T$  που συνδέει τα  $y, H_k$

*i*  $T = H_1 \cup \dots \cup H_m \cup \{ \{y, x_k\} \mid k = 1, \dots, m \}$

*ii* Για  $j = 1, \dots, m$ :

$H_j = (V_j, E_j)$  όπου  $1 \leq |V_j| \leq K$       % από ορισμό του  $H_j$

$|E_j| = |V_j| - 1$       % από υπόθεση για  $K$

*iii*  $|E| = |E_1| + \dots + |E_m| + m$       %  $H_1 \dots H_m$  ξένα μεταξύ τους

$= (|V_1| - 1) + \dots + (|V_m| - 1) + m$

$= |V_1| + \dots + |V_m|$

$= |V| - 1$

%  $H_1 \dots H_m$  ξένα μεταξύ τους

3) Για κάθε δέντρο  $T = (V, E)$  :

Υπάρχει τρόπος να χρωματιστούν οι κορυφές του  $T$  με δύο χρώματα  $\kappa, \lambda$ , ώστε: τα άκρα οποιασδήποτε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (3),  $n \geq 1$  :

$P(n) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \text{ με } |V| = n \text{ κορυφές:} \\ \text{υπάρχει χρωματισμός του } T \text{ με τα χρώματα } \kappa, \lambda \}$

*Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:*

**Για κάθε  $n \geq 1$ ,  $P(n)$ .**

*Αρχική περίπτωση:*

Ελέγχουμε ότι αληθεύει  $P(1)$  :

Η μοναδική κορυφή του  $T$  χρωματίζεται με το  $\lambda$ .

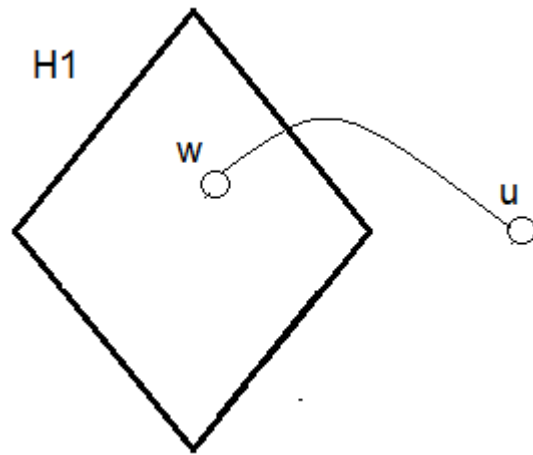
*Επαγωγικό βήμα:*

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο  $K \geq 1$  : **αληθεύει ότι  $P(K)$**

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω  $K$  : **αληθεύει ότι  $P(K+1)$**

$P(K+1) = \{ \text{για κάθε δέντρο } T = (V, E) \text{ με } |V| = K+1 \text{ κορυφές:} \\ \text{υπάρχει χρωματισμός του } T \text{ με τα χρώματα } \kappa, \lambda \}$

**T**



**H1** δέντρο

Έστω:  $T = (V, E)$  τυχαίο δέντρο με  $|V| = K+1$  κορυφές.

*i*  $T = H1 \cup \{ \{ u, w \} \}$

*ii*  $H1 = (V1, E1)$  όπου  $1 \leq |V1| = K$  % από ορισμό του H1

Υπάρχει χρωματισμός του H1 με τα χρώματα  $\kappa, \lambda$   
% από υπόθεση για K

*iii* Η κορυφή  $u$  μπορεί να χρωματιστεί διαφορετικά από ότι η κορυφή  $w$   
%  $u$  δεν ανήκει στο H1

**ΕΡΩΤΗΜΑ 2** Γράψτε μία συνάρτηση  $\chi(T)$  που να υπολογίζει με αναδρομή, για κάθε δεδομένο δέντρο  $T$ , έναν χρωματισμό του  $T$  με δύο χρώματα  $\kappa, \lambda$ .