

Ισχυρά συνεκτικό γράφημα

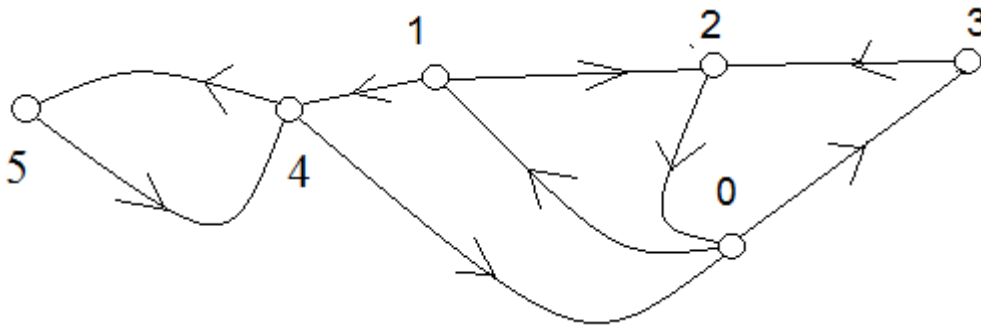
Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** μόνο όταν:

Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_{\delta\delta}(x, y) = \text{true}$.

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι **μη-ισχυρά συνεκτικό** μόνο όταν:

Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V , ώστε: $R_{\delta\delta}(x, y) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Ελέγξτε ότι το παρακάτω γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή, είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό, αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.

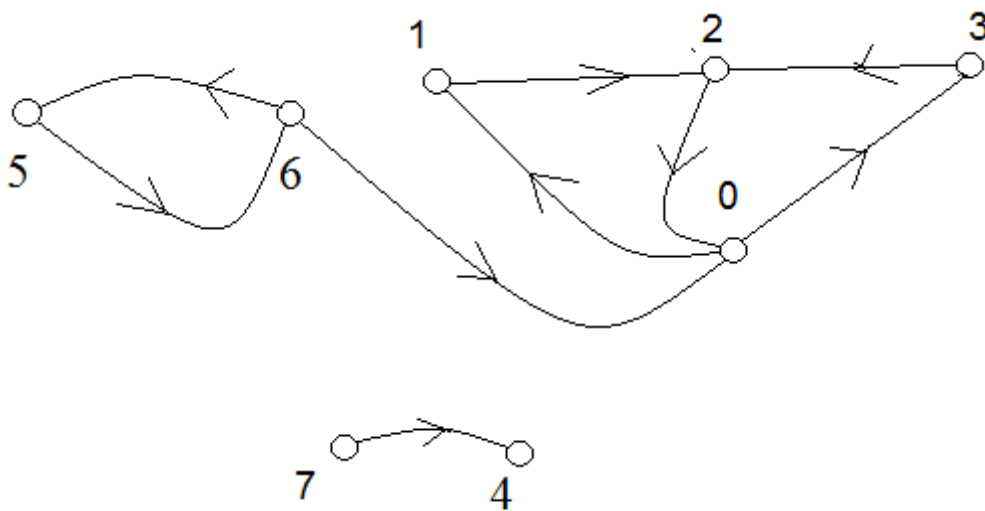
Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα κορυφής κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και u μία κορυφή του G .

Ονομάζουμε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα της κορυφής u του G , το επαγόμενο υπο-γράφημα $H(u)$ του G :

- (1) Με κορυφές $I\Sigma(u) = \{u\} \cup \{x \mid \text{αληθεύει ότι } u R_{\delta\delta} x\}$,
- (2) με όλες τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του $I\Sigma(u)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Για κάθε κορυφή του παρακάτω γραφήματος, βρείτε την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα της στο γράφημα.



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και u, v κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Κάθε σύνολο $I\Sigma(u)$ είναι μη-κενό.

β Για κάθε κορυφή v υπάρχει κάποια u ώστε $v \in I\Sigma(u)$.

Μέγιστο ισχυρά συνεκτικό υπο-γράφημα

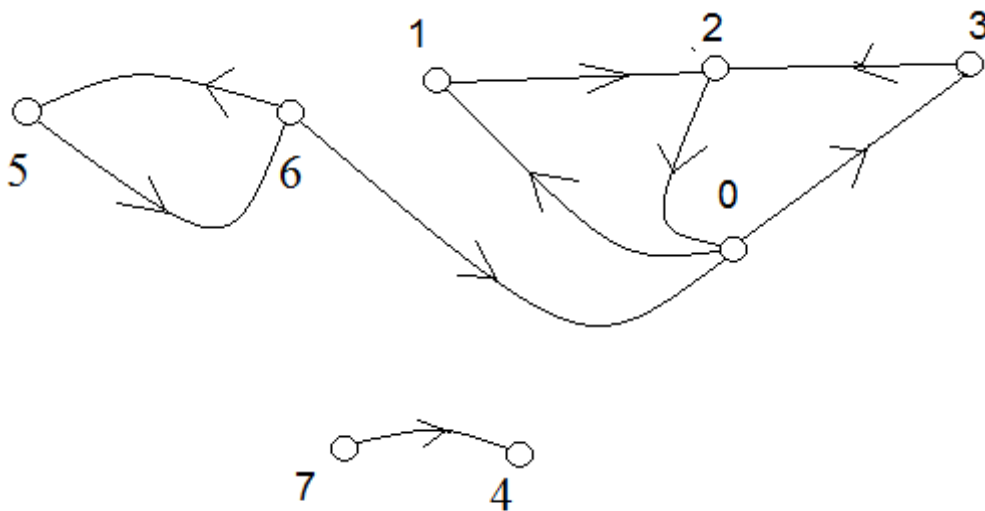
Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και H ένα υπο-γράφημα του G .

Το H ονομάζεται επεκτάσιμο σε ισχυρά συνεκτικό μόνο όταν:

υπάρχει υπο-γράφημα του G που περιέχει γνήσια το H και είναι ισχυρά συνεκτικό.

Αν το H είναι ισχυρά συνεκτικό: Το H ονομάζεται μέγιστο ισχυρά συνεκτικό μόνο όταν: το H δεν είναι επεκτάσιμο σε ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Βρείτε υπο-γραφήματα του παρακάτω γραφήματος που να είναι είτε (1) επεκτάσιμα σε ισχυρά συνεκτικά, είτε (2) μέγιστα ισχυρά συνεκτικά.

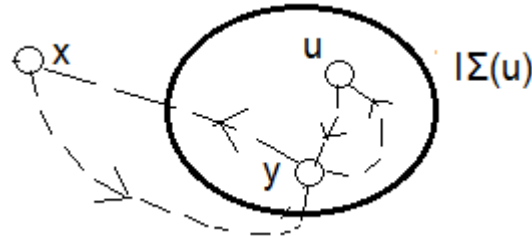


ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, u μία κορυφή του G .

a Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε κορυφή y του $I\Sigma(u)$:

άν αληθευει ότι $y R_{\delta\delta} x$ στο G , η κορυφή x θα είναι επίσης στο $I\Sigma(u)$.

Από $y \in I\Sigma(u)$: είτε $u R_{\delta\delta} y$, με $y R_{\delta\delta} x$ δίνει $u R_{\delta\delta} x$ ($R_{\delta\delta}$ μεταβατική)
 είτε $y = u$, με $y R_{\delta\delta} x$ δίνει $u R_{\delta\delta} x$.

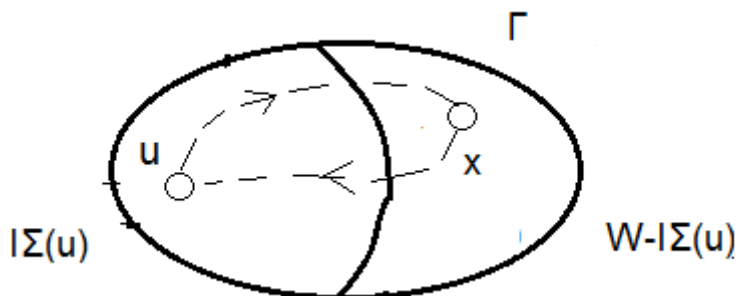


b Επιβεβαιώστε ότι το γράφημα $H(u)$ είναι μέγιστο ισχυρά συνεκτικό.

Έστω $\Gamma = (W, Z)$ ένα υπο-γράφημα του G που περιέχει γνήσια το $H(u)$ και είναι ισχυρά συνεκτικό.

Διαμερίζουμε το W στα υπο-σύνολα $I\Sigma(u)$, $W - I\Sigma(u)$: θα υπάρξει κάποια κλειστή διαδρομή του G που θα περιέχει κορυφές: $u \in I\Sigma(u)$, $x \in W - I\Sigma(u)$.

Από το (a): $x \in I\Sigma(u)$, που είναι άτοπο.



c Έστω H ένα υπο-γράφημα που περιέχει την κορυφή u και είναι μέγιστο ισχυρά συνεκτικό. Επιβεβαιώστε ότι $H = H(u)$.

Διαμερισμός κατευθυνόμενου γραφήματος σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$, $\lambda \geq 1$ οι διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες των κορυφών του.

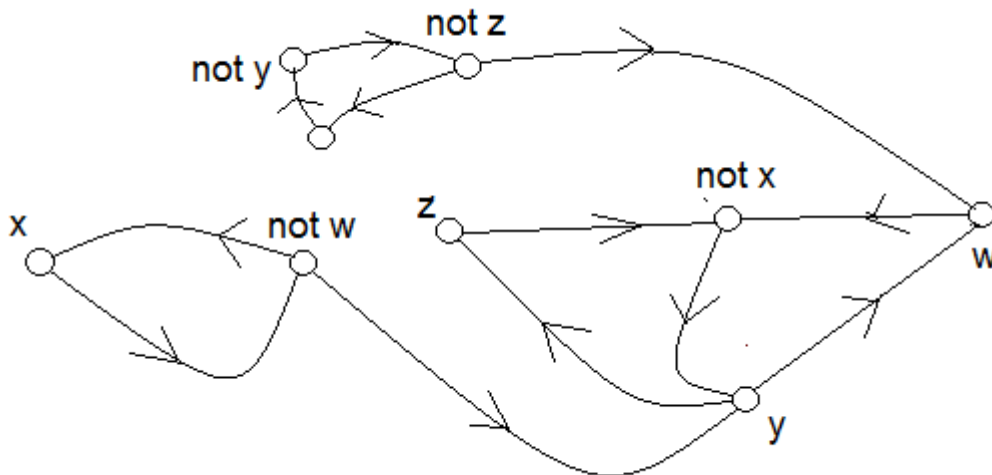
Τα σύνολα $I\Sigma(u_1) \dots I\Sigma(u_\lambda)$ αποτελούν διαμερισμό του V σε μη-κενά ξένα ισχυρά συνεκτικά διαμερίσματα, όπου:

- (1) $V = I\Sigma(u_1) \cup \dots \cup I\Sigma(u_\lambda)$
- (2) Δεν υπάρχει κλειστή διαδρομή του G που να περιέχει κορυφές από διαφορετικά διαμερίσματα (Ερώτημα 7).

A Τα υπο-γραφήματα $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$ διαμερίζουν τις κορυφές και τις κλειστές διαδρομές του G , και είναι ο μοναδικός διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών διαδρομών του G σε ισχυρά συνεκτικά υπο-γραφήματα.

B Τα υπο-γραφήματα $H(u_1) \dots H(u_\lambda)$ είναι ο μοναδικός διαμερισμός των κορυφών του G σε μέγιστα ισχυρά συνεκτικά υπο-γραφήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Για το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα:



α Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα να είναι ισχυρά συνεκτικά.

β Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα να διαμερίζουν και τις κλειστές διαδρομές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $G_1 \dots G_k$, ένας διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών διαδρομών του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $G_1 \dots G_k$, ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα ισχυρά συνεκτικά διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι υπο-γράφημα κάποιας ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $x \neq y$ δύο κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι: οι κορυφές x, y είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G *άν και μόνο αν* $y \in R_{ss} x$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ισχυρά συνεκτικά κατευθυνόμενα γραφήματα. Επιβεβαιώστε ότι: Άν τα G_1, G_2 έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G_1 \cup G_2$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13

Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα, και δ μία κλειστή διαδρομή που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .

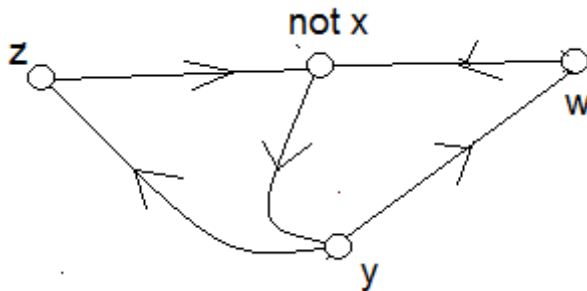
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 14

α Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, $|V| \geq 2$.

Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι ισχυρά συνεκτικό *άν και μόνο αν* υπάρχει κάποια κλειστή διαδρομή του G που περιέχει όλες τις κορυφές του.

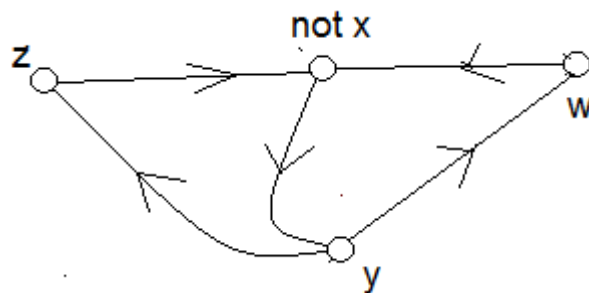
β Επιβεβαιώστε ότι: για το παρακάτω ισχυρά συνεκτικό γράφημα, δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει όλες τις κορυφές του.



ΕΡΩΤΗΜΑ 15 Βρείτε ισχυρά συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα

$G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ώστε $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

και το γράφημα $G_1 \cap G_2$ να μην είναι ισχυρά συνεκτικό.



$$V_1 = \{z, \text{not } x, y\}$$

$$V_2 = \{\text{not } x, y, w\}$$