Συνεκτική συνιστώσα *κορυφής* μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u μία κορυφή του G.

Ονομάζουμε <u>συνεκτική συνιστώσα</u> <u>της κορυφής u</u> ,
το *επαγόμενο υπο-γράφημα* <u>H(u)</u> του G :

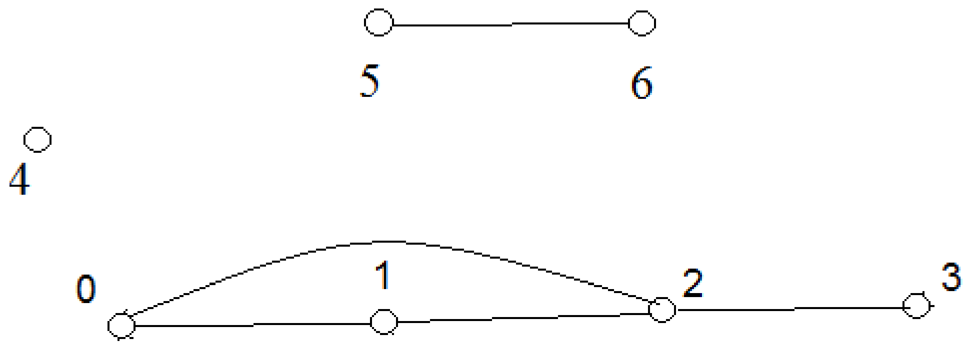
(1) με κορυφές $\mathbf{\Sigma(u) = \{u\} \cup \{ x \mid}$ **αληθεύει ότι** $\mathbf{u\ R_\delta\ x \}}$,

και

(2) με όλες τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του $\Sigma(u)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Α Για κάθε κορυφή του παρακάτω γραφήματος, βρείτε την συνεκτική συνιστώσα της.



$\mathbf{\Sigma(4)} = \{4\}$ $\mathbf{\Sigma(5) = \Sigma(6) =} \{5, 6\}$

$\mathbf{\Sigma(0)} = \mathbf{\Sigma(1)} = \mathbf{\Sigma(2)} = \mathbf{\Sigma(3)} = \{0, 1, 2, 3\}$

Β Βρείτε τις *συνεκτικές συνιστώσες* (των κορυφών) του γραφήματος.

Γ Βρείτε τις *συνεκτικές συνιστώσες* του γραφήματος, που *δεν περιέχουν την κορυφή* 2.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι, άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό, για οποιαδήποτε κορυφή u θα είναι $H(u) = G$.

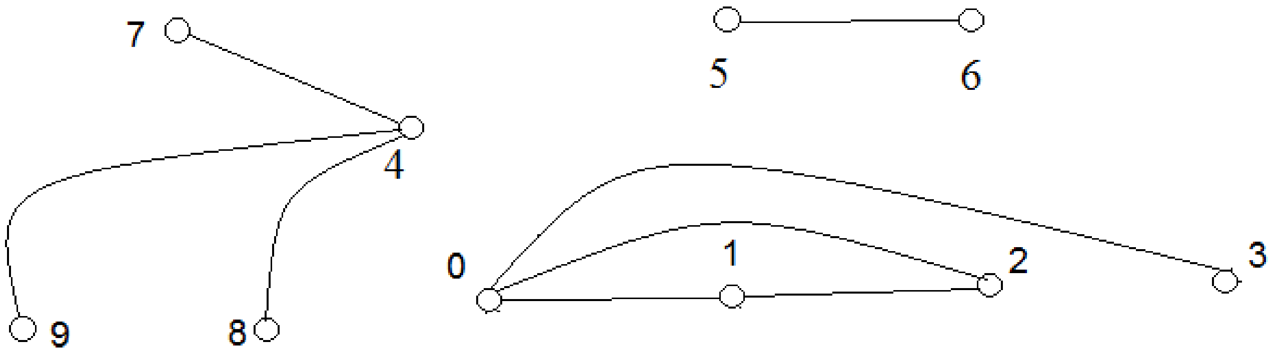
Διαμερισμός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος σε συνεκτικές συνιστώσες

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, H(u1) ... H(uλ) , $\lambda \geq 1$ οι *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες των κορυφών του.

A Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι *συνεκτικά*, και διαμερίζουν τις κορυφές *και τις ακμές* του G .

B Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών και των ακμών του G σε συνεκτικά υπο-γραφήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Για το παρακάτω γράφημα:



α Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να είναι συνεκτικά*.

β Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να διαμερίζουν και τις ακμές*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

1 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $G1 \dots G\kappa$ ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα *συνεκτικά* διαμερίσματα, ώστε: το επαγόμενο υπο-γράφημα που αντιστοιχεί σε κάθε διαμέρισμα να είναι *συνεκτικό*.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι επαγόμενο <u>υπο-γράφημα κάποιας συνεκτικής συνιστώσας</u> του G .

2 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $G1 \dots G\kappa$ ένας διαμερισμός των κορυφών *και των ακμών* του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι <u>ένωση συνεκτικών συνιστωσών</u> του G .

3 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και H ένα επαγόμενο υπο-γράφημα του G .

Επιβεβαιώστε ότι το H είναι συνεκτική συνιστώσα του G , *άν και μόνο άν* :

(1) Το H είναι συνεκτικό, και

(2) Δεν υπάρχει ακμή $\{x , y\}$ του G που να συνδέει κάποια κορυφή y του H με κάποια κορυφή x που να μην ανήκει στο H .

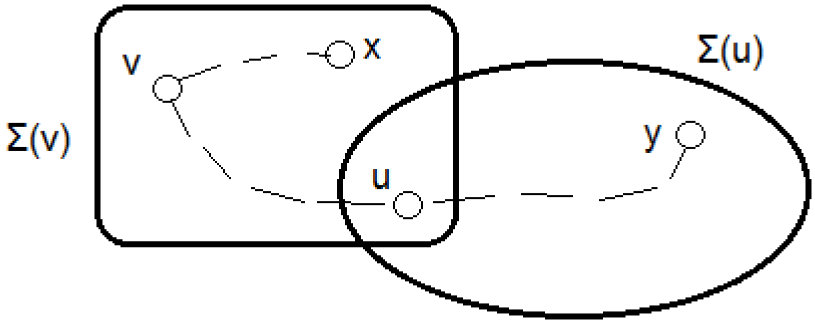
4 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και x , y δύο διαφορετικές κορυφές του G .

Επιβεβαιώστε ότι: οι κορυφές x , y είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G *άν και μόνο άν* $y \; R_\delta \; x$.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u , v κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι: Άν $u \in \Sigma(v)$, θα είναι $\Sigma(u) = \Sigma(v)$.



1 Κάθε κορυφή $y \in \Sigma(u)$ θα είναι στο $\Sigma(v)$: $\mathbf{\Sigma(u) \subseteq \Sigma(v)}$.

Έστω $\mathbf{y \in \Sigma(u)}$

Από $u \in \Sigma(v)$:		$v\, R_\delta\, u$	% ή $v = u$
Από $y \in \Sigma(u)$:		$u\, R_\delta\, y$	% ή $y = u$
	άρα	$v\, R_\delta\, y$	από μεταβατικότητα της R_δ
	άρα	$\mathbf{y \in \Sigma(v)}$	

2 Κάθε κορυφή $x \in \Sigma(v)$ θα είναι στο $\Sigma(u)$: $\mathbf{\Sigma(v) \subseteq \Sigma(u)}$.

Έστω $\mathbf{x \in \Sigma(v)}$

Από $u \in \Sigma(v)$:		$v\, R_\delta\, u$	% ή $v = u$
	άρα	$u\, R_\delta\, v$	από συμμετρία της R_δ
Από $x \in \Sigma(v)$:		$v\, R_\delta\, x$	% ή $v = x$
	άρα	$u\, R_\delta\, x$	από μεταβατικότητα της R_δ
		$\mathbf{x \in \Sigma(u)}$	

ΕΡΩΤΗΜΑ 6

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Επιβεβαιώστε ότι:

1) Κάθε σύνολο $\Sigma(u)$ είναι μη-κενό.
2) Για κάθε κορυφή v υπάρχει κάποια u ώστε $v \in \Sigma(u)$.
3) Άν $\Sigma(u) \neq \Sigma(v)$, τα σύνολα $\Sigma(u)$, $\Sigma(v)$ θα είναι ξένα.

   Άν $y \in \Sigma(u)$ και $y \in \Sigma(v)$, από το ***ΕΡΩΤΗΜΑ 5***
   θα είναι $\Sigma(y) = \Sigma(u)$ και $\Sigma(y) = \Sigma(v)$, άρα $\Sigma(u) = \Sigma(v)$.

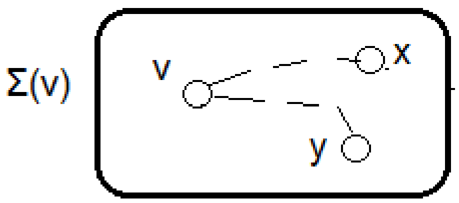
Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος θα είναι μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 7

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,
$H(v)$ η συνεκτική συνιστώσα της κορυφής v του G .

Επιβεβαιώστε ότι: *Το γράφημα* $H(v)$ *είναι συνεκτικό*.

Έστω x , y *διαφορετικές* κορυφές του $\Sigma(v)$.



Από $x \in \Sigma(v)$:		$v\, R_\delta\, x$	% ή $v = x$
	άρα	$x\, R_\delta\, v$	από συμμετρία της R_δ
Από $y \in \Sigma(v)$:		$v\, R_\delta\, y$	% ή $v = y$
	άρα	$x\, R_\delta\, y$	από μεταβατικότητα της R_δ

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :
Όταν x, y είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_\delta(x, y) = \text{true}$

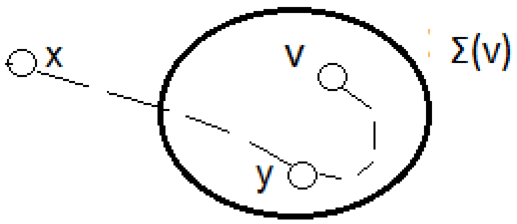
ΕΡΩΤΗΜΑ 8

Επιβεβαιώστε ότι: Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό *άν και μόνο άν*: $G = H(u)$, για κάθε κορυφή u .

ΕΡΩΤΗΜΑ 9

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,
$H(v)$ η συνεκτική συνιστώσα της κορυφής v του G .

Επιβεβαιώστε ότι: *Γιά κάθε κορυφή* y *του* $\Sigma(v)$,
άν $y\, R_\delta\, x$, *η κορυφή* x *θα είναι στο* $\Sigma(v)$.



Από $y \in \Sigma(v)$: είτε $v\, R_\delta\, y$, με $y\, R_\delta\, x$ δίνει $v\, R_\delta\, x$ (R_δ μεταβατική)

ή $y = v$, με $y\, R_\delta\, x$ δίνει $v\, R_\delta\, x$.

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :
Όταν x, y *δεν* είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_\delta(x, y) = \text{false}$

Από τα ***ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 6, 7, 9*** :

Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος είναι διαμερισμός για την R_δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Έστω $G1 = (V1 , E1)$, $G2 = (V2 , E2)$, συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν τα G1 , G2 έχουν κοινή κορυφή, το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι συνεκτικό.

β Άν $x \in V1$, $y \in V2$: το γράφημα $(V1 \cup V2 , E1 \cup E2 \cup \{ \{x , y\} \})$ θα είναι συνεκτικό.

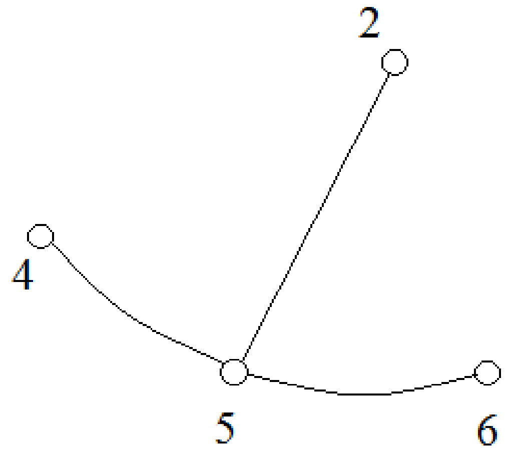
ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Έστω Γ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, G ένα συνεκτικό υπο-γράφημα του G, και δ μία διαδρομή του Γ που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

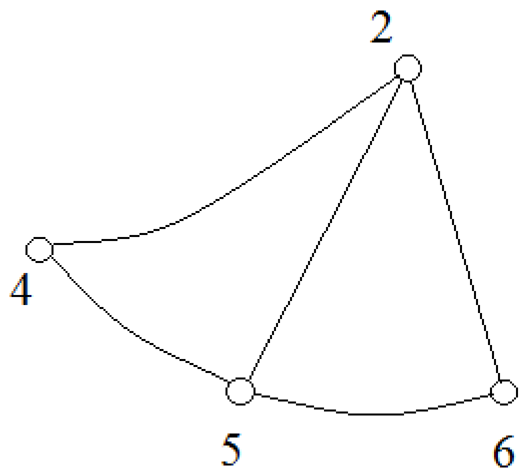
α Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, $|V| \geq 2$. Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι συνεκτικό *άν και μόνο άν* υπάρχει κάποια <u>διαδρομή</u> του G που περιέχει όλες τις κορυφές του.

β Επιβεβαιώστε ότι: για το παρακάτω συνεκτικό γράφημα, δεν υπάρχει <u>μονοπάτι</u> που να περιέχει όλες τις κορυφές του.



ΕΡΩΤΗΜΑ 13

Βρείτε συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα $G1 = (V1, E1)$, $G2 = (V2, E2)$, ώστε $V1 \cap V2 \neq \varnothing$ και το γράφημα $G1 \cap G2$ να μην είναι συνεκτικό.



$V1 = \{2, 4, 5\}$ $V2 = \{2, 6, 5\}$