ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V ένα σύνολο, και X1 … Xκ , $\kappa \geq 1$ μία *οικογένεια υπο-συνόλων* του V .
Τα σύνολα $\{ X_j \mid j = 1, \ldots \kappa \}$ είναι *διαμερισμός* του V μόνο όταν:

1 Είναι <u>μη-κενά</u> και <u>ξένα</u> μεταξύ τους,

2 $V = X1 \cup \ldots X\kappa$.

ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Έστω **θ** μία σχέση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ,
που είναι *συμμετρική και μεταβατική*.

Θα υπάρχει διαμερισμός του A , X1 … Xκ , $\kappa \geq 1$, όπου:

Για x, y οποιαδήποτε *διαφορετικά* στοιχεία του A :

όταν x, y είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u> $\boldsymbol{\theta}(x, y) = \text{true}$
όταν x, y είναι <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u> $\boldsymbol{\theta}(x, y) = \text{false}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Κάθε στοιχείο u του A τοποθετείται σε αντίστοιχο διαμέρισμα H(u) :

$$H(u) = \{u\} \cup \{ z \mid \theta(u, z) = \text{true} \}$$

Παρατήρηση Το διαμέρισμα H(u) είναι η *κλάση ισοδυναμίας* του u
ως προς την *σχέση ισοδυναμίας* $\boldsymbol{\theta_0}$ που ορίζεται ως εξής:

$\boldsymbol{\theta_0}(x, y) = \text{true}$ *άν και μόνο άν* $(x = y)$ είτε $\boldsymbol{\theta}(x, y)$

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ

Έστω θ μία σχέση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , για την οποία:

Υπάρχει διαμερισμός του A , X1 … Xκ , $\kappa \geq 1$, όπου:

Για x, y οποιαδήποτε *διαφορετικά* στοιχεία του A :

όταν x, y είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u> $\theta(x, y) = \text{true}$
όταν x, y είναι <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u> $\theta(x, y) = \text{false}$

Τότε η σχέση θ θα είναι *συμμετρική και μεταβατική*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω η σχέση θ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο ακεραίων Α :

Για $a \in A$, $b \in A$, θ(a, b) = true όταν:
a – b είναι πολλαπλάσιο του 3.

θ συμμετρική <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο Α: u θ v *implies* v θ u

Ι) *Υποθέτω ότι αληθεύει* a θ b

ΙΙ) *Θέλω να αληθεύει* b θ a

Ι Έστω ότι <u>δίνεται</u> η ισότητα a – b = 3Κ

ΙΙ *Αλλάζω το πρόσημο* : <u>προκύπτει</u> η ισότητα b – a = 3(–Κ)

θ μεταβατική <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο Α:

(u θ **v** *and* **v** θ w) *implies* u θ w

Ι) *Υποθέτω ότι αληθεύει* a θ **b** *and* **b** θ c

ΙΙ) *Θέλω να αληθεύει* a θ c

Ι Έστω ότι <u>δίνονται</u> οι ισότητες a – **b** = 3Κ ,
b – c = 3Λ

ΙΙ *Προσθέτω κατά μέλη* : <u>προκύπτει</u> η ισότητα a – c = 3(Κ+Λ)

Διαμερισμός του Α σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα

Έστω (u mod 3) το υπόλοιπο της διαίρεσης του u με το 3.

$X0 = \{ u \mid u \in A, (u \bmod 3) = 0 \}$

$X1 = \{ u \mid u \in A, (u \bmod 3) = 1 \}$

$X2 = \{ u \mid u \in A, (u \bmod 3) = 2 \}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Φ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα πεπερασμένο σύνολο A .

Έστω η σχέση θ όπου:

Για $a \in A$, $b \in A$, $\theta(a, b) = \text{true}$ όταν $\Phi(a) = \Phi(b)$.

θ συμμετρική <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο A: $u\ \theta\ v$ *implies* $v\ \theta\ u$

I) *Υποθέτω ότι αληθεύει* $a\ \theta\ b$

II) *Θέλω να αληθεύει* $b\ \theta\ a$

I Έστω ότι <u>δίνεται</u> η ισότητα $\Phi(a) = \Phi(b)$

II

θ μεταβατική <u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο A:

($u\ \theta\ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v}\ \theta\ w$) *implies* $u\ \theta\ w$

I) *Υποθέτω ότι αληθεύει* $a\ \theta\ \mathbf{b}$ *and* $\mathbf{b}\ \theta\ c$

II) *Θέλω να αληθεύει* $a\ \theta\ c$

I Έστω ότι <u>δίνονται</u> οι ισότητες $\Phi(a) = \Phi(\mathbf{b})$
$\Phi(\mathbf{b}) = \Phi(c)$

II

Διαμερισμός του A

Για κάθε K στο *πεδίο τιμών* της Φ :

$X_K = \{\ u \mid u \in A ,\ \Phi(u) = K\ \}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι τα παραπάνω σύνολα
$\{\ X_K \mid K$ στο *πεδίο τιμών* της $\Phi\ \}$ αποτελούν διαμερισμό του A .

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *προσβασιμότητα με κύκλο για το* G,

την παρακάτω σχέση $\mathbf{R}_\kappa$ με πεδίο ορισμού το σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $\mathbf{R}_\kappa(a, b) = \text{true}$ όταν:

στο G υπάρχει (ένας τουλάχιστον) *κύκλος*
που περιέχει τις κορυφές x και y .

1 *Υπάρχουν γραφήματα όπου η προσβασιμότητα με κύκλο* δεν *είναι μεταβατική*.

2 *Για κάθε γράφημα* G *, η προσβασιμότητα με κύκλο για το* G *είναι συμμετρική*.

<u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο V: $u \, R_\kappa \, v$ *implies* $v \, R_\kappa \, u$

Υποθέτω ότι αληθεύει $\alpha \, R_\kappa \, \beta$

Άρα υπάρχει κύκλος $\delta = (\alpha, e, \ldots \beta, \ldots f, \alpha)$

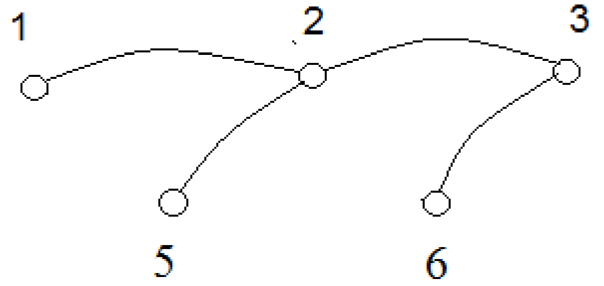
Θέλω να αληθεύει $\beta \, R_\kappa \, \alpha$

Παίρνω τον κύκλο $\delta = (\alpha, e, \ldots \beta, \ldots f, \alpha)$

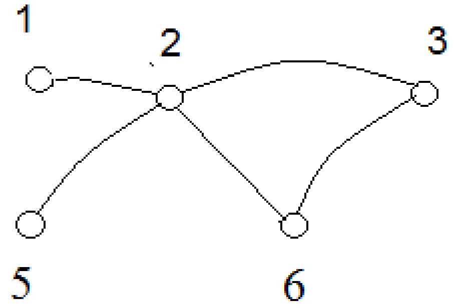
ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Μπορείτε να βρείτε διαμερισμούς, σύμφωνους με το συμπέρασμα
του Γενικού Θεωρήματος, για την σχέση $\mathbf{R}_\kappa$ στα παρακάτω γραφήματα;

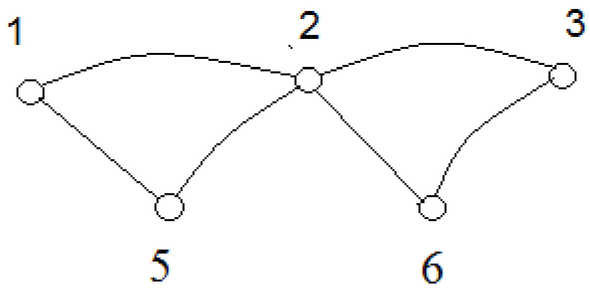
Z2



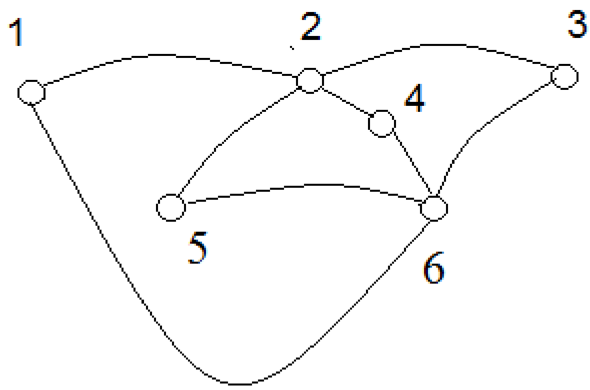
Z3



Z4



Z5



Για οποιεσδήποτε κορυφές u , v του Z5 : $R_\kappa(u, v)$ = true

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει κύκλος του Z5 που να περιέχει όλες τις κορυφές.