Γράφημα δισυνεκτικό ως προς ακμές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) ονομάζεται
δισυνεκτικό ως προς ακμές *μόνο όταν*:
Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_\iota(x, y) = \text{true}$.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E)
είναι **μη- δισυνεκτικό ως προς ακμές** *μόνο όταν*:
Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_\iota(x, y) = \text{false}$.

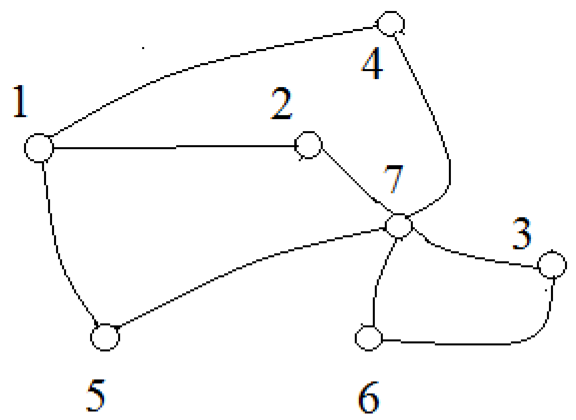
ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει
μόνο μία κορυφή, είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα
που έχει *γέφυρα* δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που *είναι*
η ένωση των κύκλων C1 . . . Cn , όπου κάθε κύκλος Ck έχει
μία τουλάχιστον κοινή κορυφή με τον κύκλο C(k+1) .
Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G
είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

G



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Επιβεβαιώστε ότι στο γράφημα G
δεν υπάρχει κλειστό ίχνος που να περιέχει όλες τις κορυφές.

Δισυνεκτική συν/σα ως προς ακμές κορυφής μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u μία κορυφή του G .

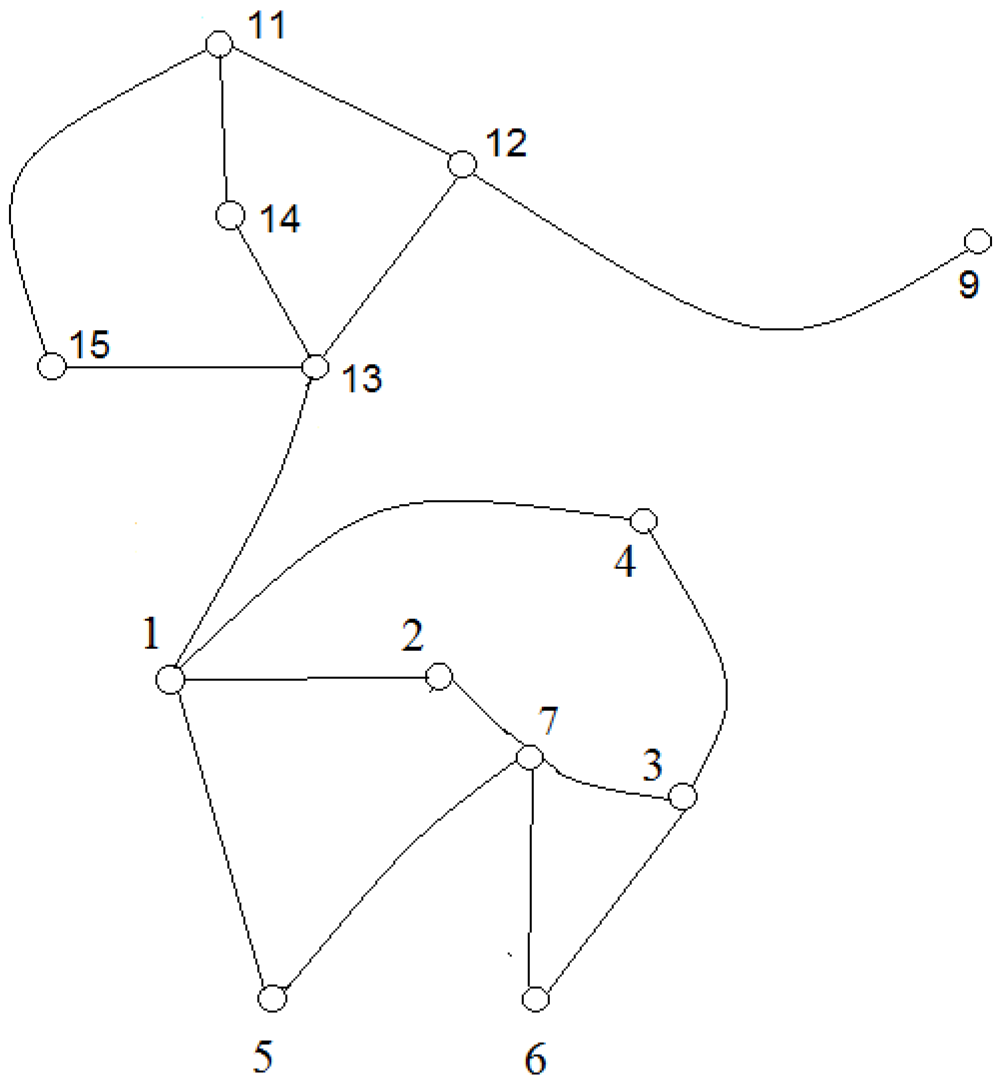
Ονομάζουμε <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής u</u> ,
το *επαγόμενο* υπο-γράφημα <u>H(u)</u> του G :

(1) με κορυφές **ΔΣ(u) = {u}** $\cup$ **{ x | αληθεύει ότι u R_ι x }** , και
(2) με όλες τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του ΔΣ(u) .

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Για κάθε κορυφή του παρακάτω γραφήματος,
βρείτε την δισυνεκτική συνιστώσα της ως προς ακμές.

ΔΣ(11) = ΔΣ(12) = ΔΣ(13) = ΔΣ(14)= ΔΣ(15)

ΔΣ(9) = {9}



ΔΣ(1) = ΔΣ(2) = ΔΣ(3) = ΔΣ(4) = ΔΣ(5) = ΔΣ(6) = ΔΣ(7)

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι: Άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, για κάθε κορυφή u θα είναι G = H(u) .

ΕΡΩΤΗΜΑ 8

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και u , v κορυφές του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Άν $u \in \Delta\Sigma(v)$, θα είναι $\Delta\Sigma(u) = \Delta\Sigma(v)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.
Επιβεβαιώστε ότι:

1) Κάθε σύνολο ΔΣ(u) είναι μη-κενό.
2) Για κάθε κορυφή v υπάρχει κάποια u ώστε $v \in \Delta\Sigma(u)$.
3) Άν $\Delta\Sigma(u) \neq \Delta\Sigma(v)$, τα σύνολα ΔΣ(u) , ΔΣ(v) θα είναι ξένα.
   Άν $y \in \Delta\Sigma(u)$ και $y \in \Delta\Sigma(v)$, από το ***ΕΡΩΤΗΜΑ 8***
   θα είναι $\Delta\Sigma(y) = \Delta\Sigma(u)$ και $\Delta\Sigma(y) = \Delta\Sigma(v)$, άρα $\Delta\Sigma(u) = \Delta\Sigma(v)$.

Οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος θα είναι μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,
H(v) η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής v.
Επιβεβαιώστε ότι: *Το γράφημα* H(v) *είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές*.

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :
Όταν x, y είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_\iota(x, y) = true$

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Επιβεβαιώστε ότι: Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές *άν και μόνο άν*: G = H(u) , για κάθε κορυφή u .

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα,
H(v) η δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές της κορυφής v.
Επιβεβαιώστε ότι: *Γιά κάθε κορυφή* y *του* ΔΣ(v) ,
άν y R_ι x *, η κορυφή* x *θα είναι στο* ΔΣ(v) .

Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :
Όταν x, y *δεν* είναι στο ίδιο διαμέρισμα, $R_\iota(x, y)$ = false

Από τα ***ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 9, 10, 12*** :

Οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος είναι διαμερισμός για την R_ι

Διαμερισμός σε δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, H(u1) ... H(uλ) , λ ≥ 1 οι *διαφορετικές* δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές των κορυφών του.

A Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι *δισυνεκτικά ως προς ακμές*, και διαμερίζουν τις κορυφές *και τα κλειστά ίχνη* του G .

B Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών *και των κλειστών ιχνών* του G, σε υπο-γραφήματα που είναι *δισυνεκτικά ως προς ακμές*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Έστω G = (V, E) ένα γράφημα, και G1 ... Gκ , κ ≥ 2 , ένας διαμερισμός των κορυφών *και των κλειστών ιχνών* του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 14 Έστω G = (V, E) ένα γράφημα, και G1 ... Gκ , κ ≥ 2 , ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα που είναι *δισυνεκτικά ως προς ακμές*.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι υπο-γράφημα κάποιας δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 15 Έστω G1 = (V1, E1) , G2 = (V2, E2) , γραφήματα που είναι δισυνεκτικά ως προς ακμές.
Επιβεβαιώστε ότι: Άν τα G1, G2 έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 16 Έστω Γ ένα γράφημα, G ένα δισυνεκτικό ως προς ακμές υπο-γράφημα του G, και δ ένα κλειστό ίχνος του Γ που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Υπολογισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και e1 ... ek , $k \geq 0$ *οι γέφυρες* του G .

A Μία ακμή $e = \{u, v\}$ του G δεν είναι γέφυρα, *άν και μόνο άν* οι u , v είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G.

Άν η ακμή $e = \{u, v\}$ δεν είναι γέφυρα θα περιέχεται σε κύκλο, επομένως $R_\iota(u, v) = \text{true}$ και $v \in \Delta\Sigma(u)$.

Άν η ακμή $e = \{u, v\}$ είναι γέφυρα, $R_\iota(u, v) = \text{false}$ και $v \notin \Delta\Sigma(u)$.

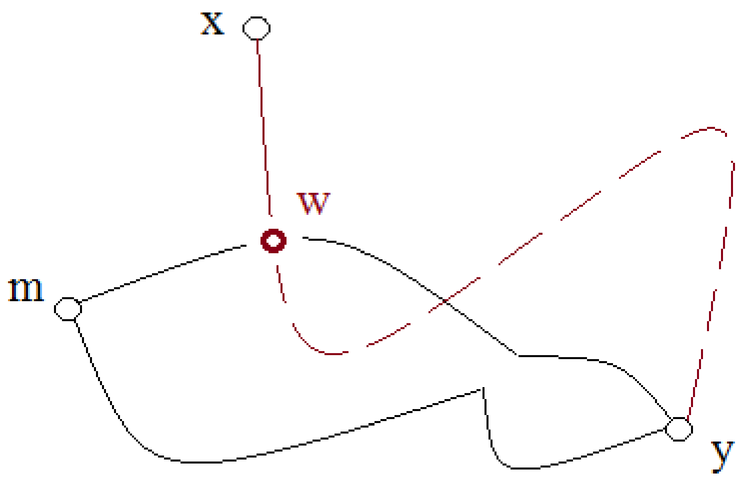
B Έστω H το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το G τις ακμές που είναι γέφυρες: οι συνεκτικές συνιστώσες του H θα είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του G .

Στο H δεν προκύπτουν νέες γέφυρες που δεν υπήρχαν στο G : άρα κάθε ακμή του H θα περιέχεται σε κύκλο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 17 Επιβεβαιώστε ότι: άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα *δεν έχει γέφυρα*, θα είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 18 Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και u μία κορυφή του G . Περιγράψτε μια μέθοδο για να υπολογιστεί το σύνολο κορυφών $\Delta\Sigma(u) = \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, R_\iota \, x \}$.

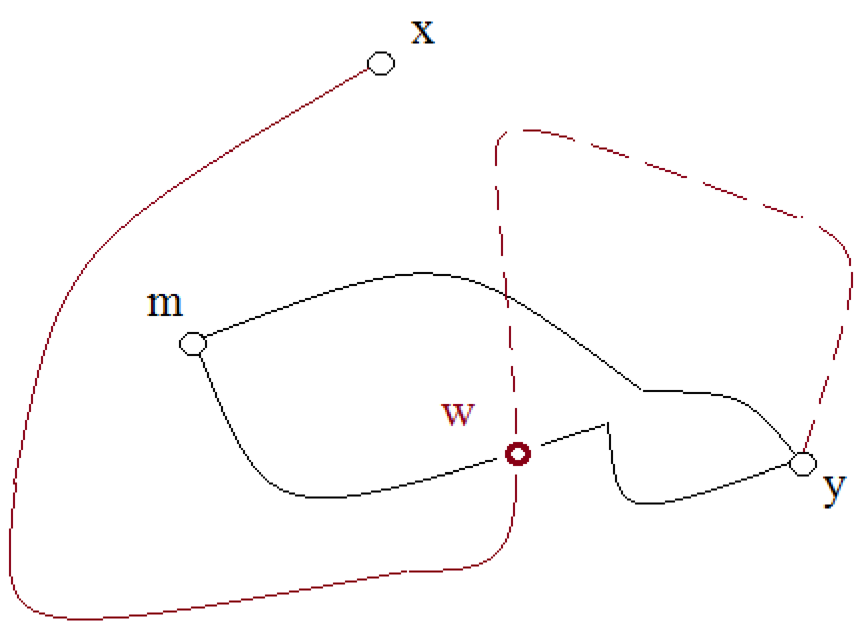
ΕΡΩΤΗΜΑ 19 Το γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, και x, m, y είναι διαφορετικές κορυφές του G . Να κατασκευαστεί ένα ίχνος του G , με άκρα τις x, y, που να περιέχει την m .



I ένα κλειστό ίχνος που περιέχει τις **m** , **y**

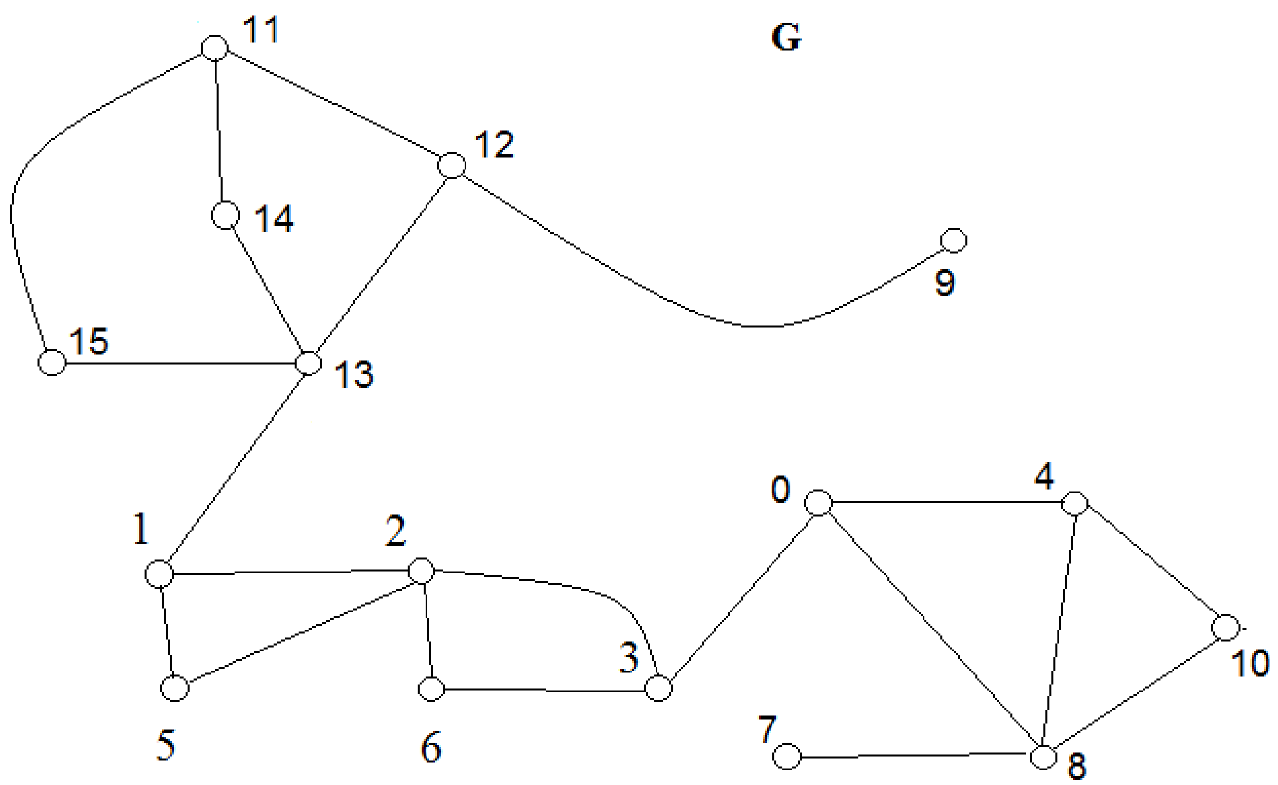
μ ένα μονοπάτι από την **x** στην **y**

w η *πρώτη* κορυφή του **μ** που ανήκει και στο **I**



ίχνος **J** : ακολουθώ το **μ** από την **x** ως την **w** ,
και συνεχίζω μέσω του **I** , προς την **m** και μετά ως την **y**

Γράφημα H(G) των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές του G



Κορυφές της **H1**: {11, 12, 13, 14, 15, 16}

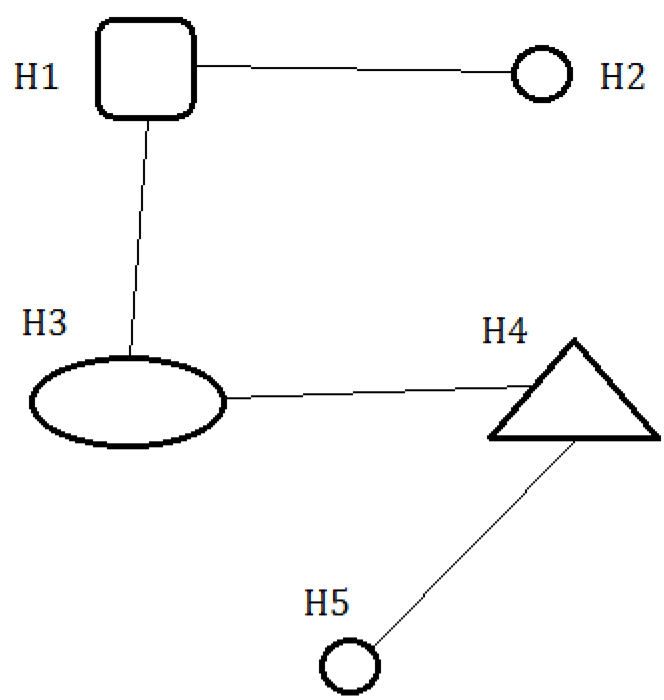
Κορυφές της **H2**: {9}

Κορυφές της **H3**: {1, 2, 3, 6, 5}

Κορυφές της **H5**: {7}

Κορυφές της **H4**: {0, 4, 10, 8}

H(G)



ΕΡΩΤΗΜΑ 20 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , το γράφημα των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές H(G) θα είναι δέντρο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 21 Επιβεβαιώστε ότι: Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, θα υπάρχει (τουλάχιστον) μία δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που θα συνδέεται με μόνο μία άλλη δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 22 Το G είναι μη-κατευθυνόμενο γράφημα, η κορυφή x είναι στην δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές Hj , η κορυφή y είναι στην δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές Hk .

Επιβεβαιώστε ότι, για τυχαία κορυφή m στην δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές H : υπάρχει ίχνος του G με άκρα τις x, y που περιέχει την m, *άν και μόνο άν* η H βρίσκεται στο μοναδικό μονοπάτι του H(G) με άκρα τις Hj , Hk .