Ειδικά Θέματα Υπολογιστικής Όρασης & Γραφικής

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης & Αθανάσιος Τσακαλίδης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Υπολογιστική Όραση

Μωσαϊκά-Συρραφή Εικόνων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Υπολογιστική Όραση
Επισκόπηση Μαθήματος

- Μωσαϊκά-Συρραφή Εικόνων
  - Επαναπροβολή -Στοίχιση εικόνων
- Γεωμετρικές Παραμορφώσεις Εικόνων
  - Μετασχηματισμοί Συγγένειας
  - Μετασχηματισμοί Προβολής
  - Σύνθεση Μετασχηματισμών

Υπολογιστική Όραση

Μωσαϊκά: Συρραφή Εικόνων

Συρραφή

Εικονική Ευρυγώνια Κάμερα

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Συρραφή Εικόνων

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Συρραφή Εικόνων

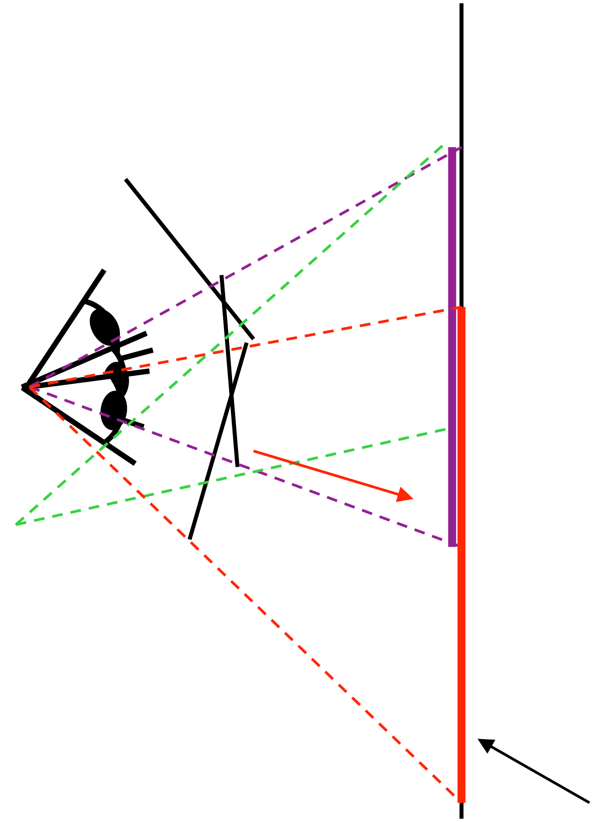
Ας δημιουργήσουμε μία ακολουθία εικόνων από την ίδια θέση
- Στροφή της κάμερας

- Βασική Διαδικασία Συρραφής:
  – Υπολογισμός Γεωμετρικού Μετασχηματισμού ανάμεσα στην δεύτερη και την πρώτη εικόνα
  – Μετασχηματισμός της δεύτερης εικόνας ώστε να επικαλύπτεται με την πρώτη
  – Αν υπάρχουν παραπάνω εικόνες, επαναλάβετε την διαδικασία.

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Συρραφή Εικόνων

- Όμως γιατί θα πρέπει να δίνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα η παραπάνω διαδικασία;
  - Πώς μπορούμε να συνθέτουμε χωρίς τη χρήση της 3-Δ γεωμετρίας της σκηνής;

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Επαναπροβολή Εικόνων



Επίπεδο Προβολής Μωσαϊκού

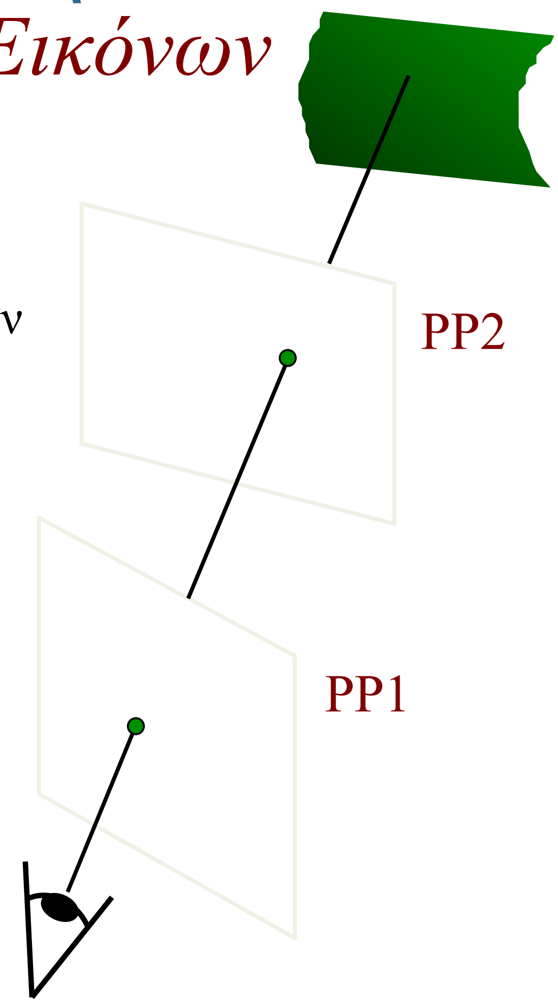
Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Επαναπροβολή Εικόνων

Το Μωσαϊκό έχει μία φυσική εξήγηση στις 3-Δ

- Οι εικόνες επαναπροβάλλονται πάνω σε ένα κοινό επίπεδο προβολής
- Το Μωσαϊκό δημιουργείται πάνω σε αυτό το (εικονικό) επίπεδο
- Το Μωσαϊκό είναι το αποτέλεσμα προβολής της σκηνής μέσω μίας ευρυγώνιας κάμερας.

Πώς όμως μπορούμε να επαναπροβάλουμε;

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Επαναπροβολή Εικόνων



Βασική Ερώτηση

- Πώς μπορούμε να σχετίσουμε δύο εικόνες που έχουν
- προβληθεί από το ίδιο οπτικό κέντρο;
- Πώς να αντιστοιχίσουμε ένα pixel από το PP1 στο PP2;

Απάντηση

- Ας διαδώσουμε μία ακτίνα από κάθε pixel στο PP1, και ας σημειώσουμε το pixel που αυτή η ακτίνα τέμνει το PP2.

Υπολογιστική Όραση
Μωσαϊκά: Επαναπροβολή Εικόνων

Όμως δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την γεωμετρία των δύο εικόνων σε σχέση με το μάτι;

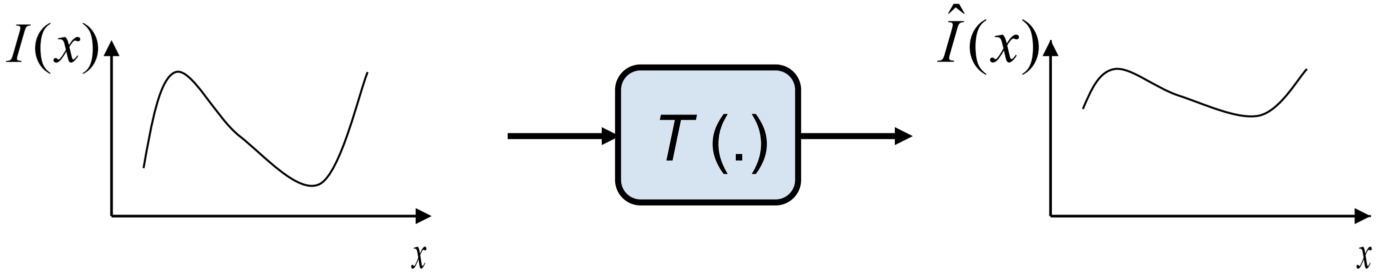
Παρατήρηση

Αντί να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα 3-Δ *επαναπροβολής*, ας το σκεφτούμε σαν ένα 2-Δ πρόβλημα *Γεωμετρικής παραμόρφωσης εικόνων* !!!!!

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Υπολογιστική Όραση
Παραμόρφωση Εικόνων-Φιλτράρισμα

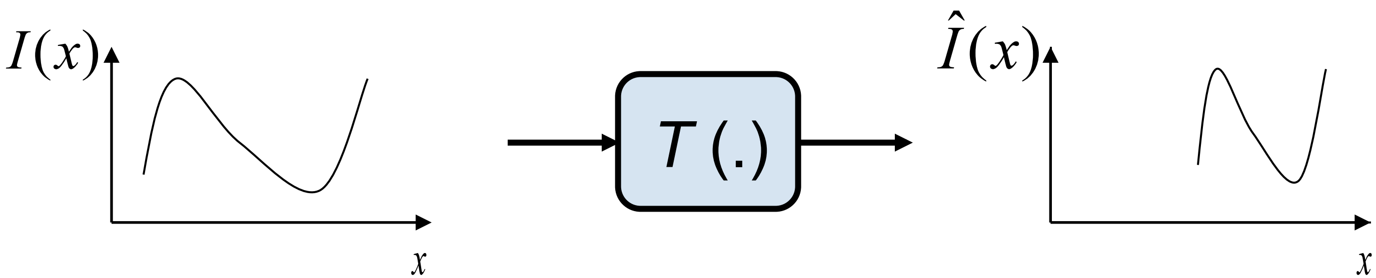
Φιλτράρισμα Εικόνας: Αλλαγή του *Πεδίου Τιμών* της εικόνας.



$$\hat{I}(x) = T\,(I(x))$$

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνας: Αλλαγή του *Πεδίου Ορισμού* της Εικόνας.



$$\hat{I}(x) = I(T(x))$$

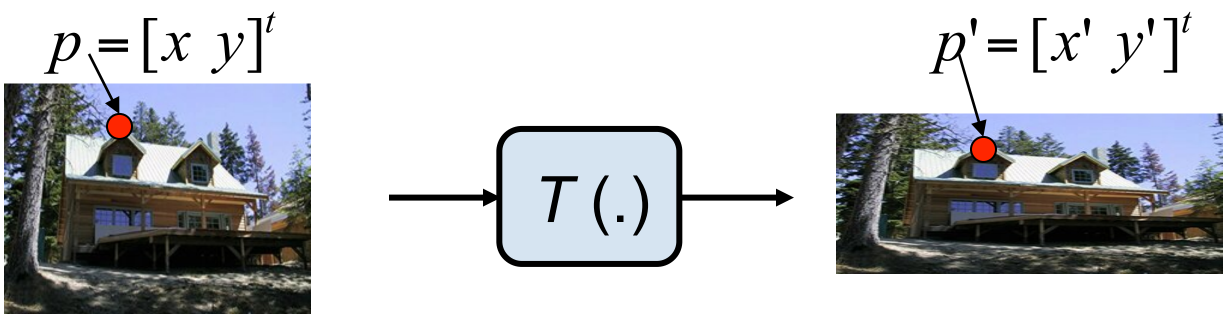
Υπολογιστική Όραση
Παραμόρφωση Εικόνων

$\hat{I}(x, y)$

$I(x, y)$

$\longrightarrow \boxed{T(.)} \longrightarrow$

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

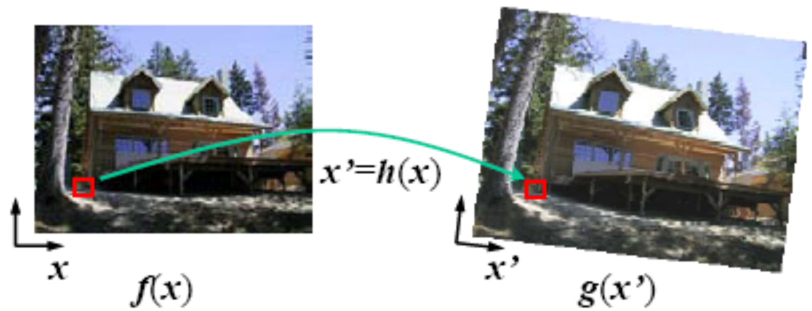


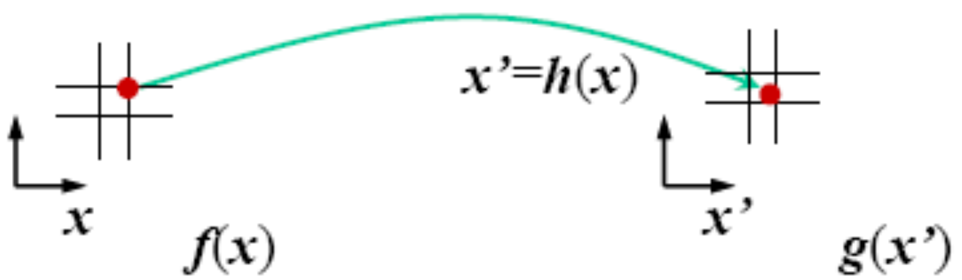
- Ο Μετασχηματισμός $T(.)$ ουσιαστικά είναι μία μηχανή αλλαγής συντεταγμένων:

$$p' = T(p)$$

- Τι σημαίνει ότι ο $T(.)$ είναι «ολικός»;
  - Ο ίδιος μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε όλα τα εικονοστοιχεία της εικόνας.

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων





Υπολογιστική Όραση

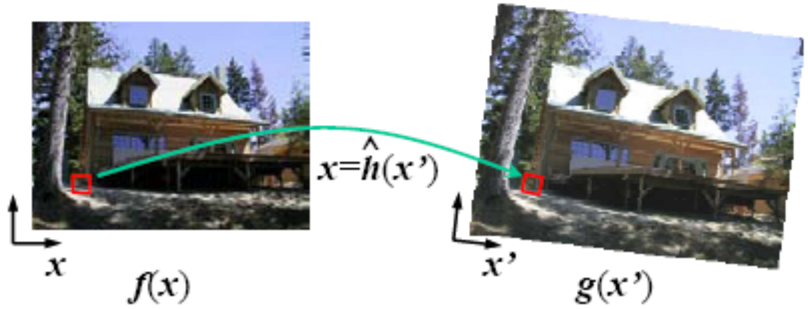
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

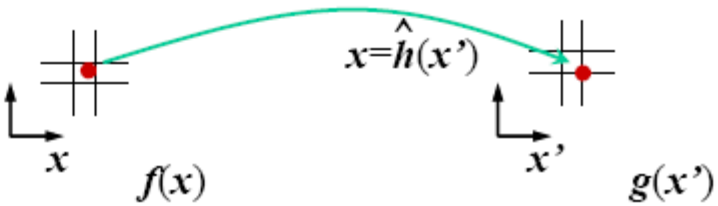
procedure $forwardWarp(f, \boldsymbol{h}, \textbf{out}\ g)$:

For every pixel $\boldsymbol{x}$ in $f(\boldsymbol{x})$

1. Compute the destination location $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$
2. Copy the pixel $f(\boldsymbol{x})$ to $g(\boldsymbol{x}')$

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων





Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

procedure *inverseWarp*$(f, \boldsymbol{h}, $ **out** $g)$:

For every pixel $\boldsymbol{x}'$ in $g(\boldsymbol{x}')$

1. Compute the source location $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}')$
2. Resample $f(\boldsymbol{x})$ at location $\boldsymbol{x}$ and copy to $g(\boldsymbol{x}')$

Υπολογιστική Όραση
Γραμμική Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

- Μπορεί να περιγραφεί από μερικούς αριθμούς (παράμετροι). Από τα στοιχεία ενός μητρώου !!!

$$p' = T(p) = \mathrm{M}p$$

- ή ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathrm{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Όραση
Παραμετρική Παραμόρφωση-Κλιμάκωση

- *Κλιμάκωση*: *Πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου των συντεταγμένων με ένα βαθμωτό.*

$$x' = ax$$

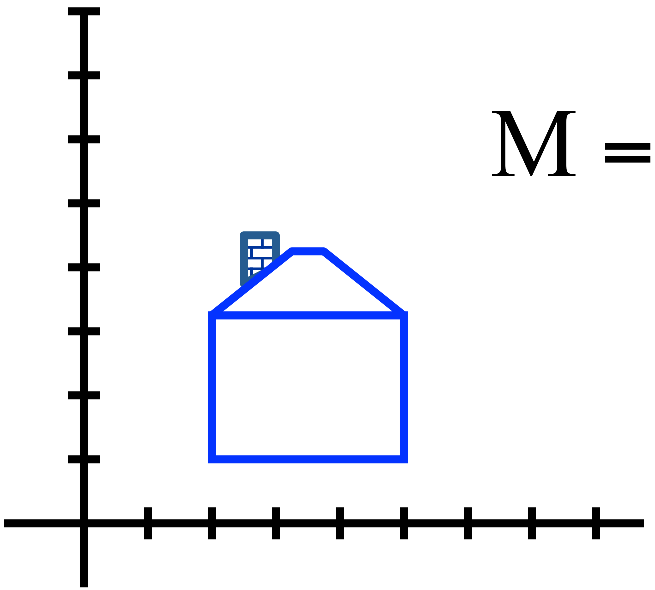
$$y' = by$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

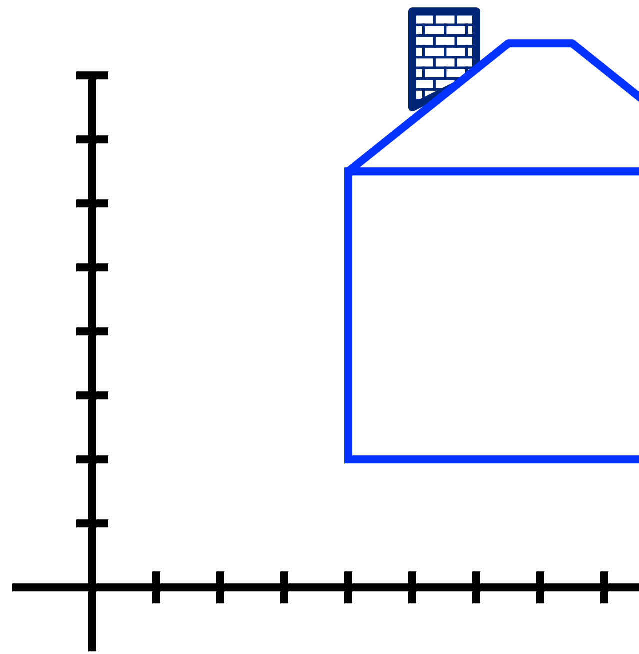
Υπολογιστική Όραση

Παραμετρική Παραμόρφωση-Κλιμάκωση

- *Ομοιόμορφη ή Ισοτροπική Κλιμάκωση*: *Πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου των συντεταγμένων με τον ίδιο βαθμωτό.*



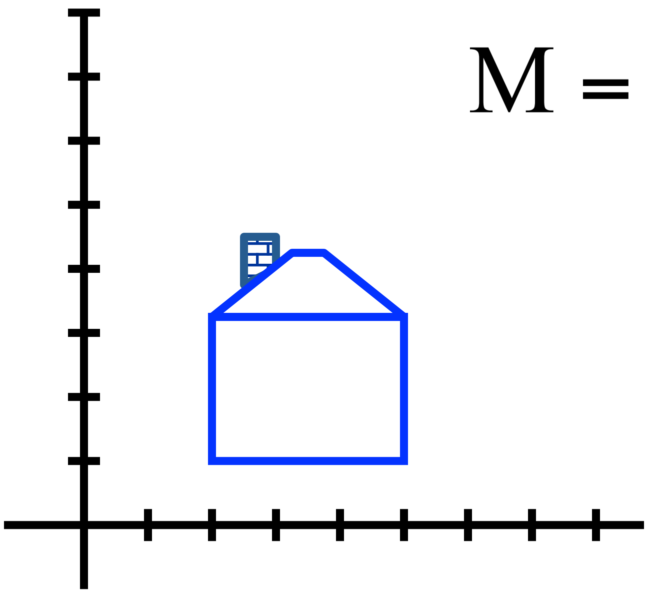
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

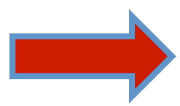


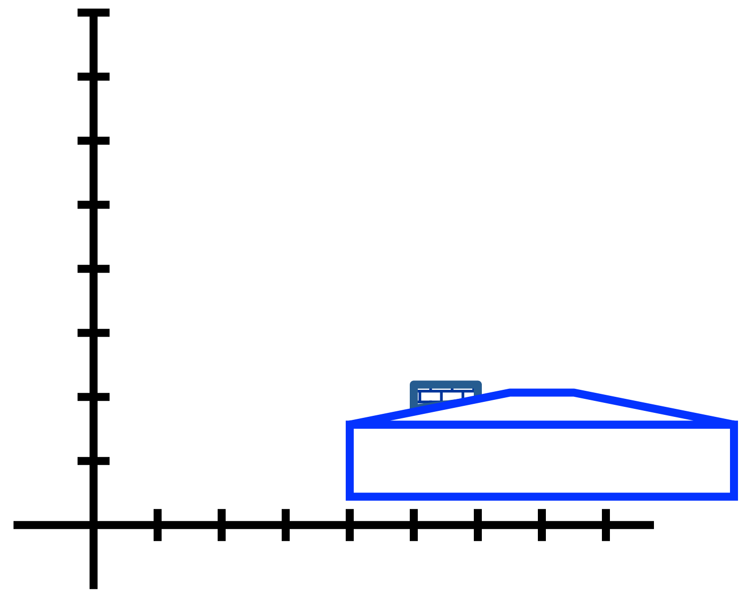
Υπολογιστική Όραση
Παραμετρική Παραμόρφωση-Κλιμάκωση

- *Μη-ομοιόμορφη Κλιμάκωση: Πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου των συντεταγμένων με διαφορετικό βαθμωτό.*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$$

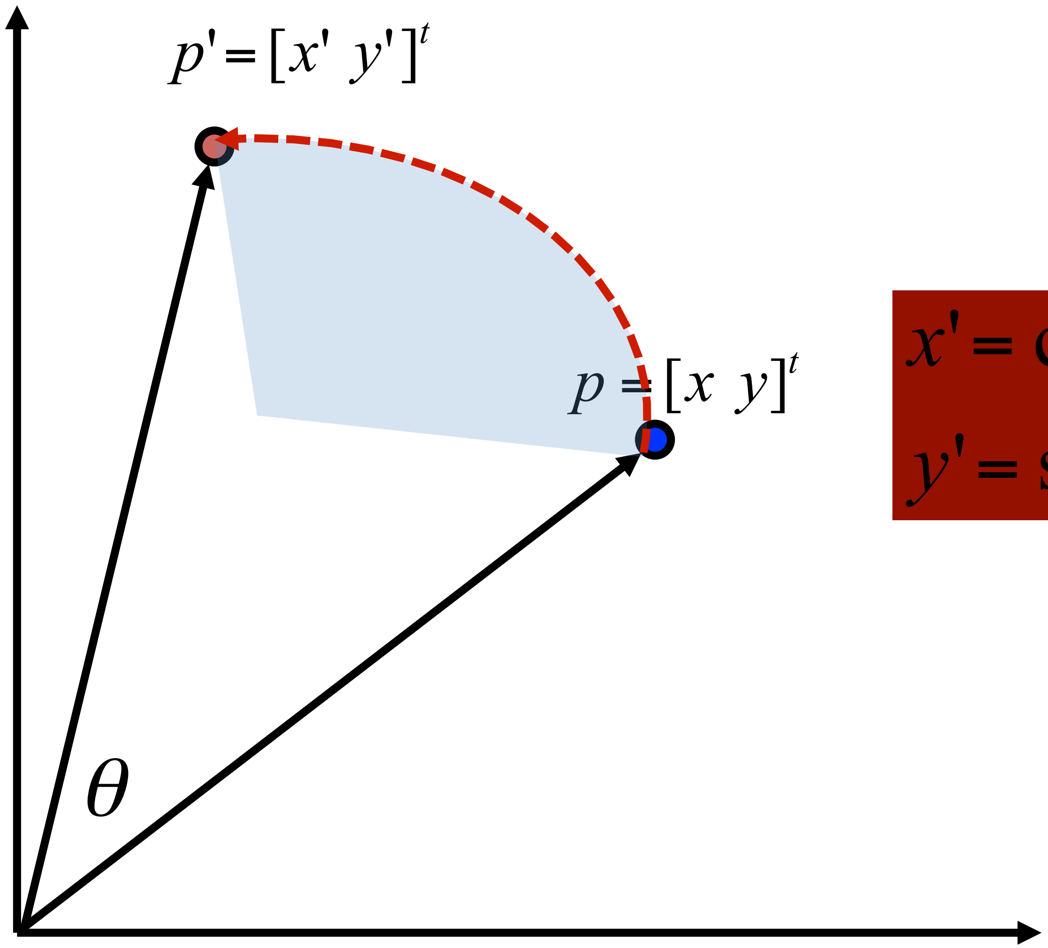






Υπολογιστική Όραση

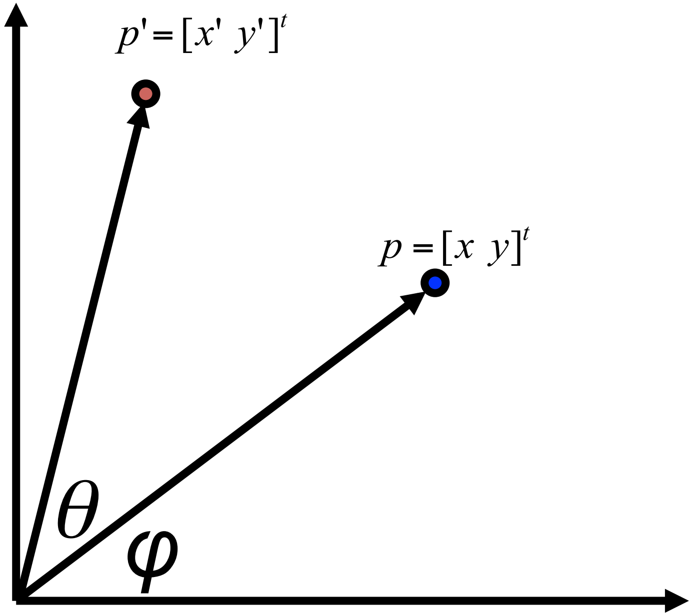
Παραμετρική Παραμόρφωση-Περιστροφή



$$x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y$$

$$y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y$$

Υπολογιστική Όραση
Παραμετρική Παραμόρφωση-Περιστροφή



$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$x' = r\cos(\varphi + \theta)$$
$$y' = r\sin(\varphi + \theta)$$

Ταυτότητα…

$$x' = r\cos(\varphi)\cos(\theta) - r\sin(\varphi)\sin(\theta)$$
$$y' = r\sin(\varphi)\cos(\theta) + r\cos(\varphi)\sin(\theta)$$

Αντικατάσταση…

$$x' = x\,\mathbf{cos}(\theta) - y\,\mathbf{sin}(\theta)$$
$$y' = x\,\mathbf{sin}(\theta) + y\,\mathbf{cos}(\theta)$$

Υπολογιστική Όραση

Παραμετρική Παραμόρφωση-Περιστροφή

- Περιστροφή σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Αν και το sin(θ) και το cos(θ) είναι μη γραμμικές συναρτήσεις του θ, τα:
  - ***x’ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των x και y***
  - ***y’ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των x και y***

Υπολογιστική Όραση

Παραμετρική Παραμόρφωση-Περιστροφή

- Ποιός είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός ;
  - Περιστροφή κατά $-\theta$.

$$x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \qquad x = \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'$$

$$y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \qquad y = -\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y'$$

  - Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ Ταυτοτικός

$$x' = x$$
$$y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ Κλιμάκωση

$$x' = s_x x$$
$$y' = s_y y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ Περιστροφή

$$x' = \cos\Theta x - \sin\Theta y$$
$$y' = \sin\Theta x + \cos\Theta y$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ Στρέβλωση

$$x' = x + sh_x y$$
$$y' = sh_y x + y$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{sh_x} \\ \boldsymbol{sh_y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα Y

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2x2 Μητρώα

- Τι τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

2-Δ αντικατοπτρισμός ως προς το (0, 0)

$$x' = -x$$
$$y' = -y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Όραση
Γραμμική Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

2-Δ Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

- Οι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί είναι **συνδυασμοί** …
  - Κλιμακώσεων,
  - Περιστροφών,
  - Στρεβλώσεων και
  - Αντικατοπτρισμών

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

Υπολογιστική Όραση
Γραμμική Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

- Ιδιότητες των Γραμμικών Μετασχηματισμών:
  - Η αρχή «απεικονίζεται» στην αρχή
  - Γραμμές «απεικονίζονται» σε γραμμές
  - Παράλληλες Γραμμές «παραμένουν» παράλληλες
  - Οι λόγοι «διατηρούνται»
  - Κλειστότητα στη Σύνθεση

2x2 Μητρώα

- Τι Τύποι μετασχηματισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα 2x2 μητρώο;

Μόνο Γραμμικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

2-Δ Μετατοπίσεις;

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

ΟΧΙ !!!

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

- Ερώτηση:

  Πώς μπορούμε να παραστήσουμε την *μετατόπιση*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

με ένα 3x3 μητρώο;

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

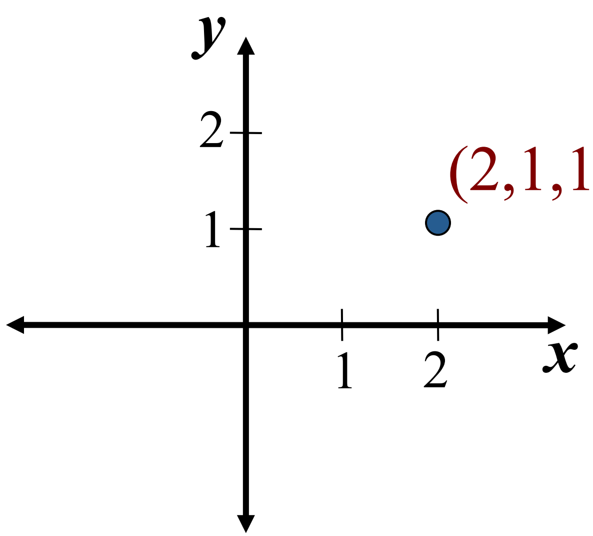
- ***Ομογενείς Συντεταγμένες***
  - Παράσταση 2-Δ συντεταγμένων με τη βοήθεια 3X1 διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\textbf{Ομογενείς}} \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ k \end{bmatrix}$$

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

- Πρόσθεση μιας τρίτης συντεταγμένης σε κάθε 2-Δ σημείο
  - (x, y, z) παριστάνει το σημείο στη θέση $(x/z, y/z)$
  - $(x, y, 0)$ παριστάνει το σημείο στο άπειρο
  - (0, 0, 0) δεν επιτρέπεται.

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου



(2,1,1) ή (4,2,2) ή (6,3,3)

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

- Ερώτηση:

  Πώς μπορούμε να παραστήσουμε την *μετατόπιση*

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

με ένα 3x3 μητρώο;

Ομογενείς Συντεταγμένες Σημείου

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Όραση

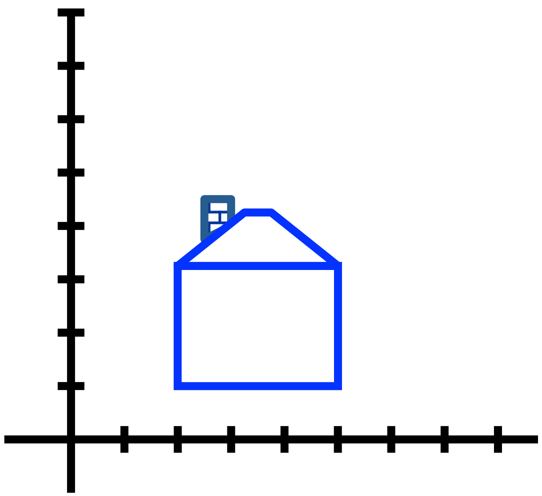
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Μετατόπιση

Ομογενείς Συντεταγμένες

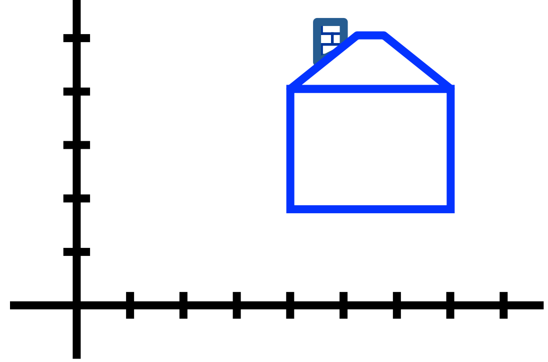
- Παράδειγμα Μετατόπισης

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$t_x = 2$

$t_y = 1$



Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

- Βασικοί 2-Δ μετασχηματισμοί ως 3x3 μητρώα

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κλιμάκωση

Βασικοί 2-Δ Μετασχηματισμοί

- Βασικοί 2-Δ μετασχηματισμοί ως 3x3 μητρώα

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Περιστροφή

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{sh_x} & 0 \\ \boldsymbol{sh_y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση

Μετασχηματισμοί Συγγένειας(Affine)

- Οι μετασχηματισμοί συγγένειας είναι συνδυασμοί …
  - Γραμμικών Μετασχηματισμών και
  - Μετασχηματισμών μετατοπίσεων

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί Συγγένειας(Affine)

- Ιδιότητες των Μετασχηματισμών Συγγενείας:
  - Η αρχή δεν απεικονίζεται απαραίτητα στην αρχή
  - Γραμμές «απεικονίζονται» σε γραμμές
  - Παράλληλες Γραμμές «παραμένουν» παράλληλες
  - Οι λόγοι «διατηρούνται»
  - Κλειστότητα στη Σύνθεση

Υπολογιστική Όραση
Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων

Γενίκευση Μετασχηματισμών Συγγένειας

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- Ιδιότητες των Μετασχηματισμών Συγγενείας:
  - Η αρχή δεν απεικονίζεται απαραίτητα στην αρχή
  - Γραμμές «απεικονίζονται» σε γραμμές
  - Παράλληλες Γραμμές «δεν παραμένουν απαραίτητα» παράλληλες
  - Οι λόγοι «δεν διατηρούνται»
  - Κλειστότητα στη Σύνθεση

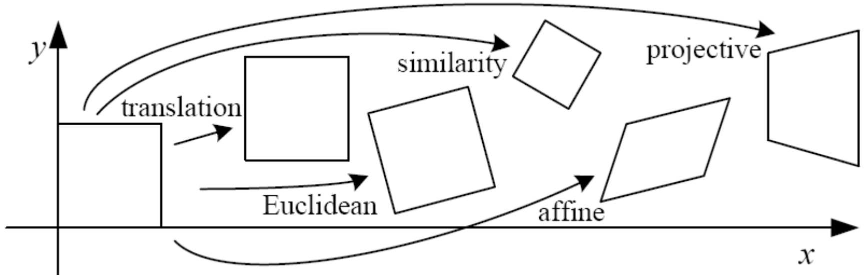
Σύνθεση

- Οι μετασχηματισμοί μπορούν να συνδυαστούν με πολλαπλασιασμό μητρώων

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Όραση

Γεωμετρική Παραμόρφωση Εικόνων



Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
similarity	$\begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
affine	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}_{3\times 3}$			