



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

© Σχεδίαση FIR Φίλτρων

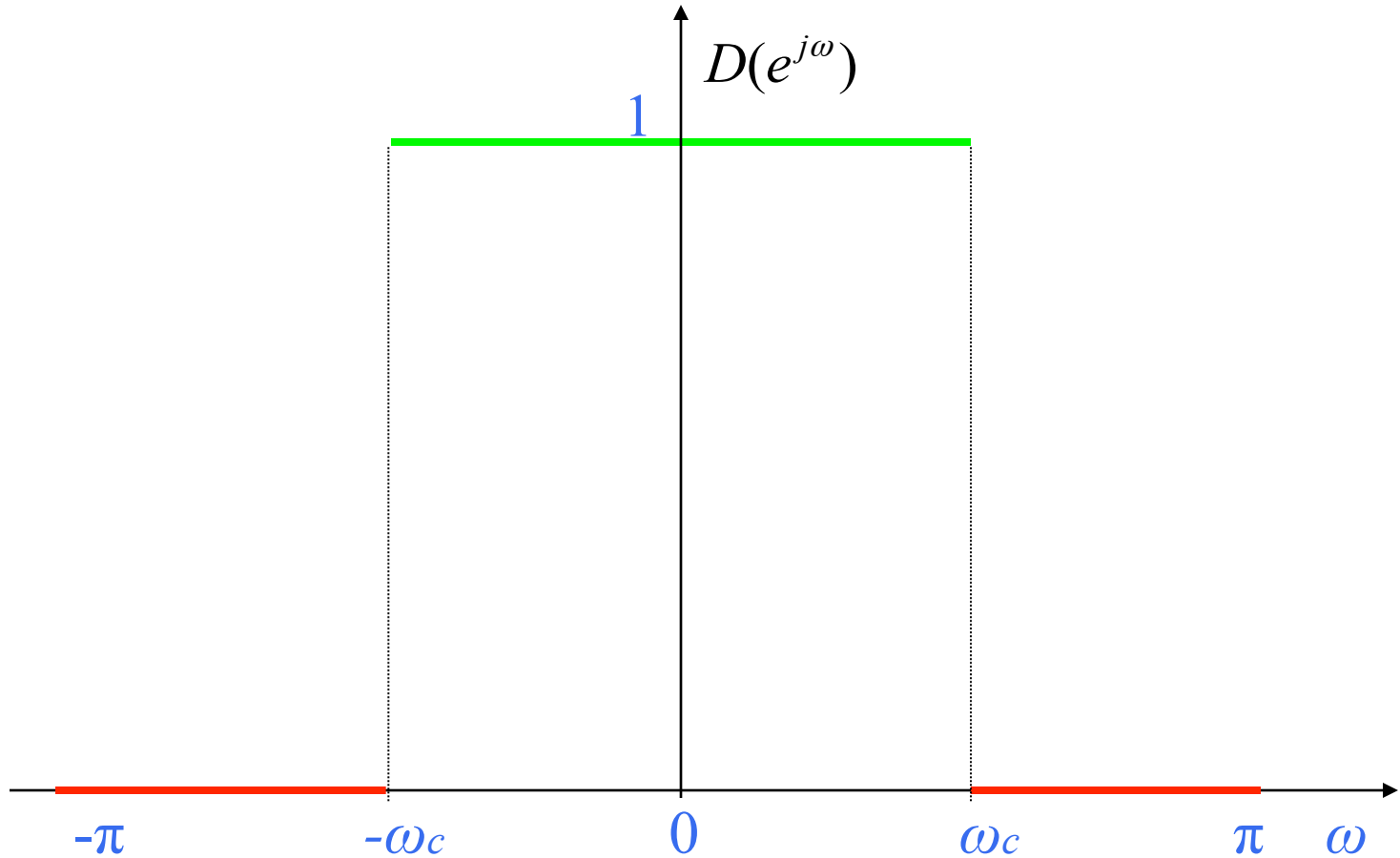
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

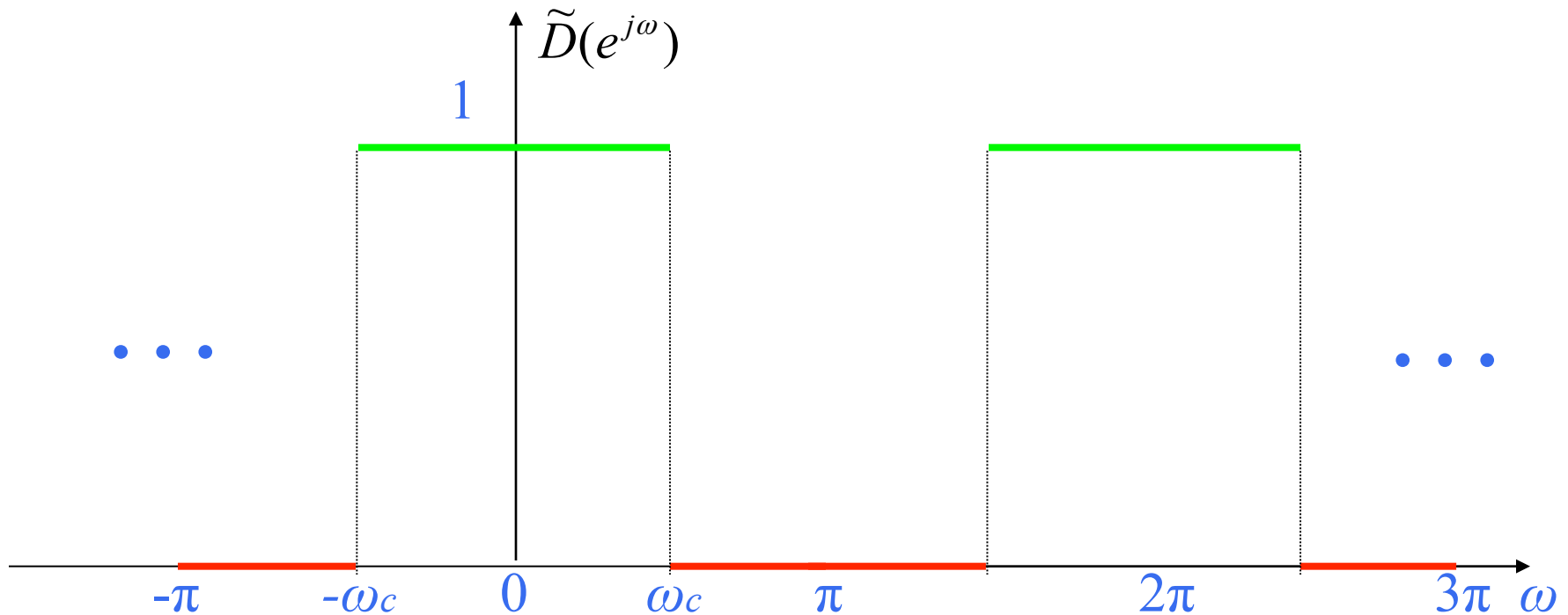
Σχεδίαση Κατωπερατών FIR Φίλτρων

Ιδανικές Προδιαγραφές: $D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Σύνθεσης

$$d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

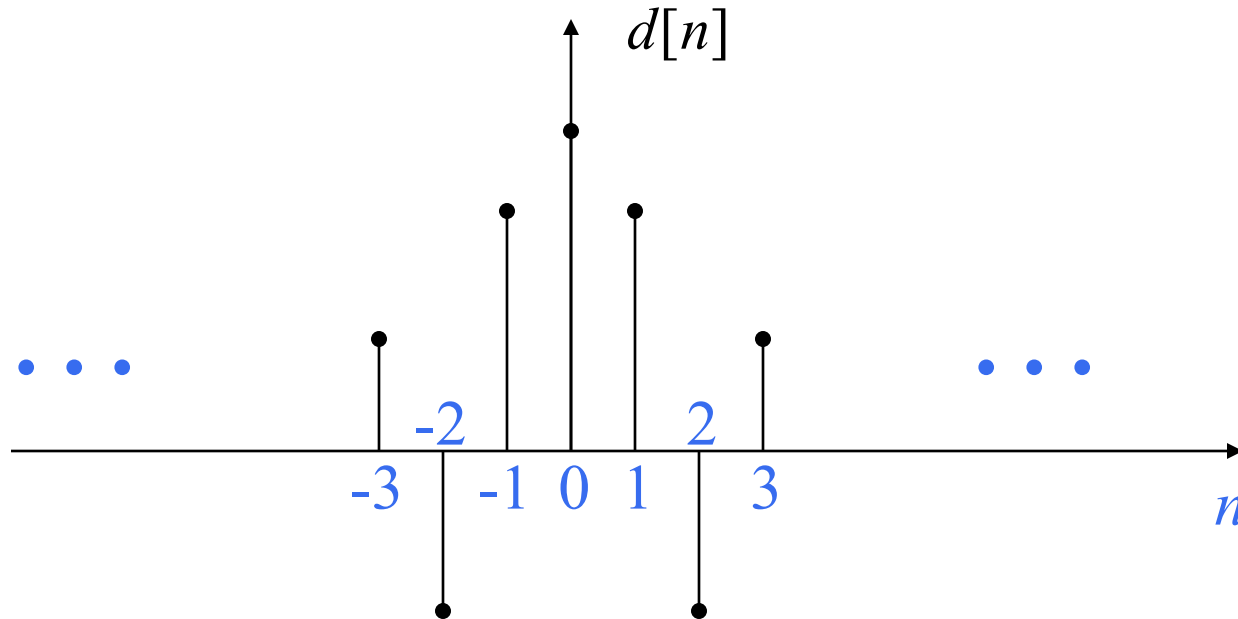
Εξίσωση Ανάλυσης



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier



$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

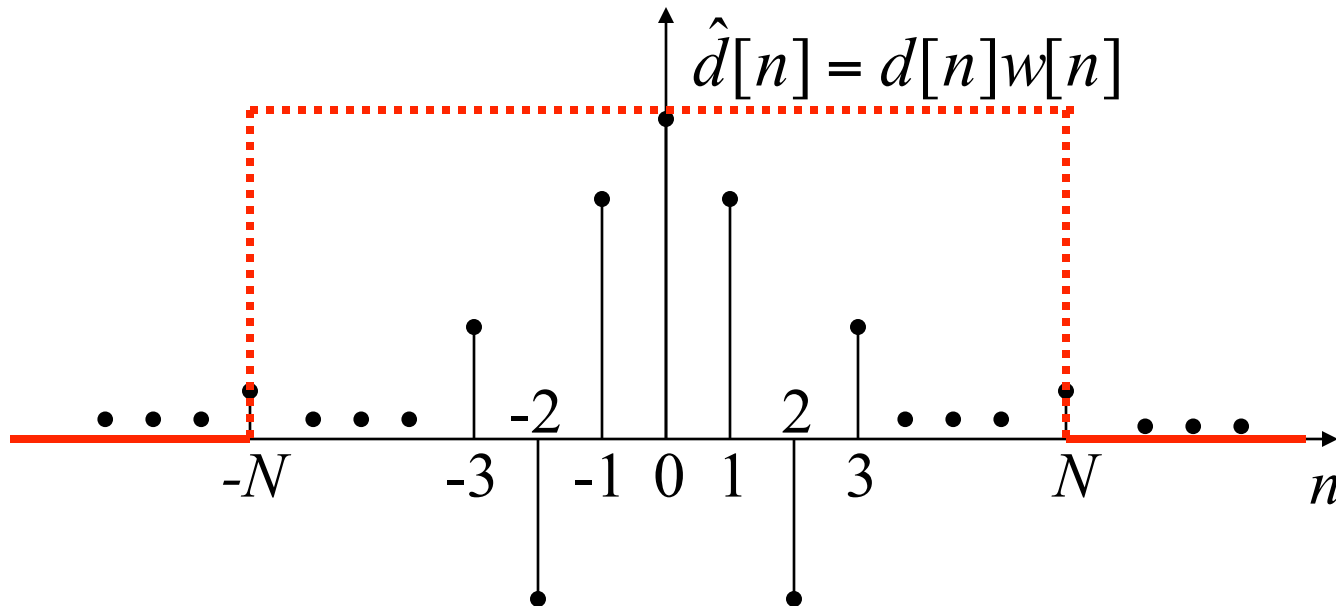


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Περιορισμός της ακολουθίας $d[n]$ με παραθύρωση για να πετύχουμε το επιθυμητό μήκος της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου.

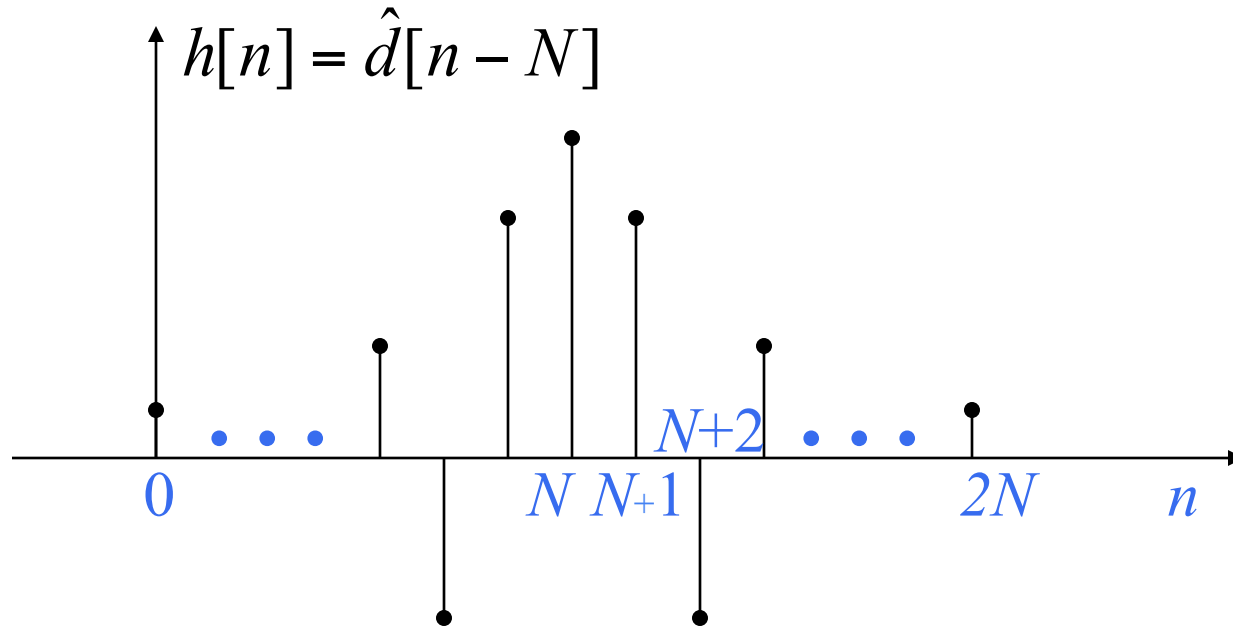
$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0 & \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

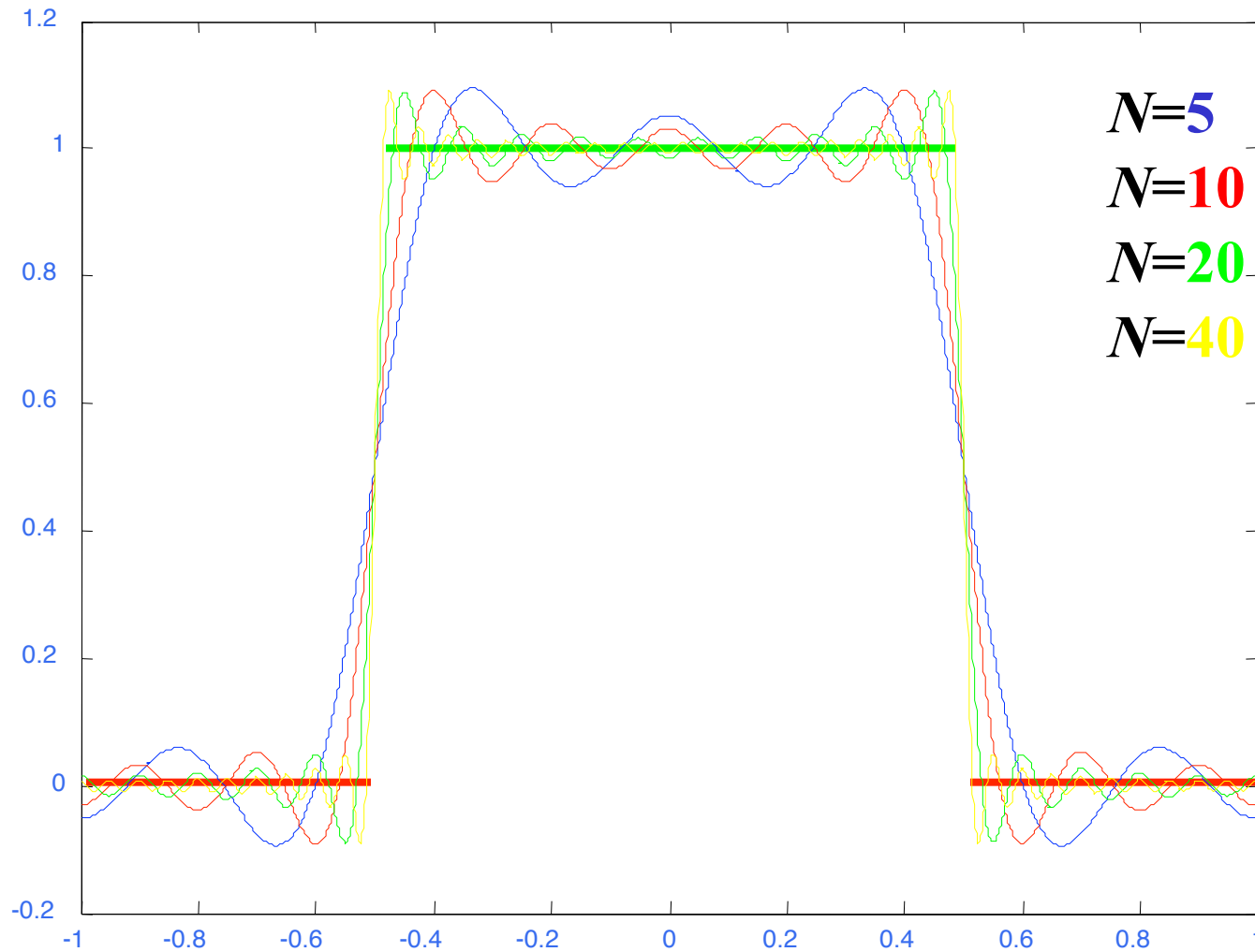
Εισαγωγή καθυστέρησης, με δεξιά ολίσθηση της ακολουθίας $\hat{d}[n]$ κατά N δείγματα, για αιτιατότητα:



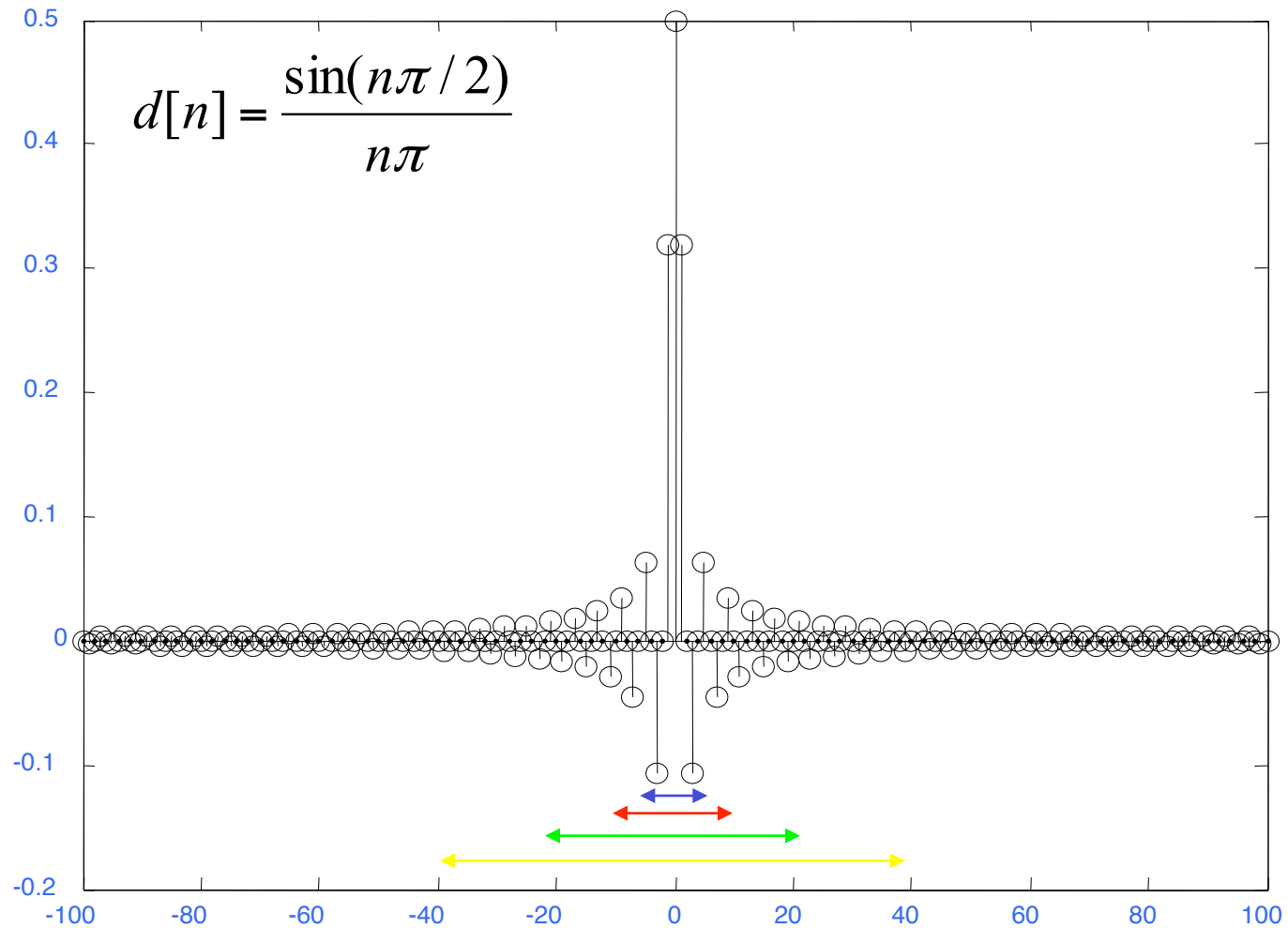
Απόκριση Συχνότητας:
$$H_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h[n]e^{-jn\omega}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

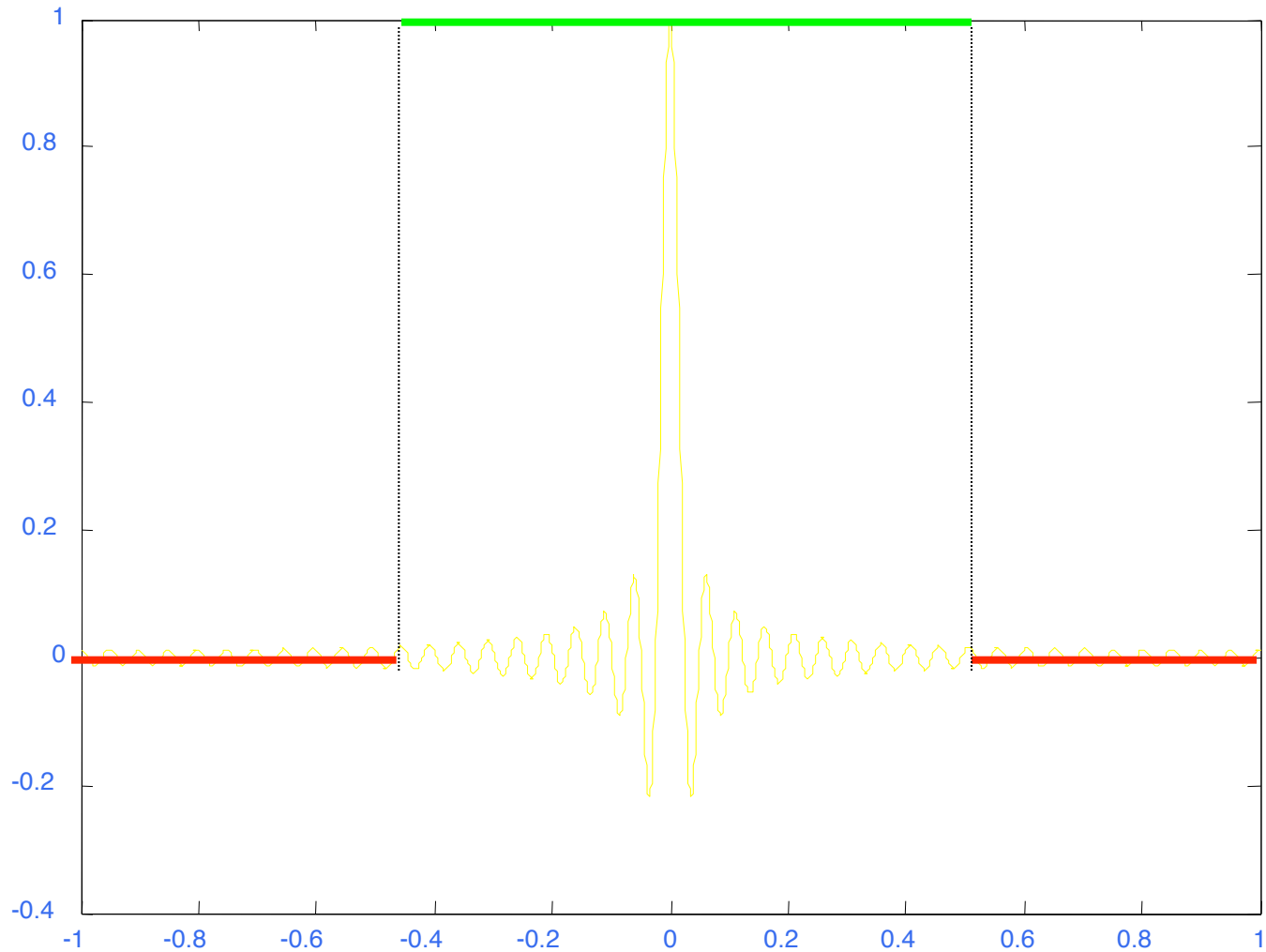


Σχεδίαση FIR Φίλτρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

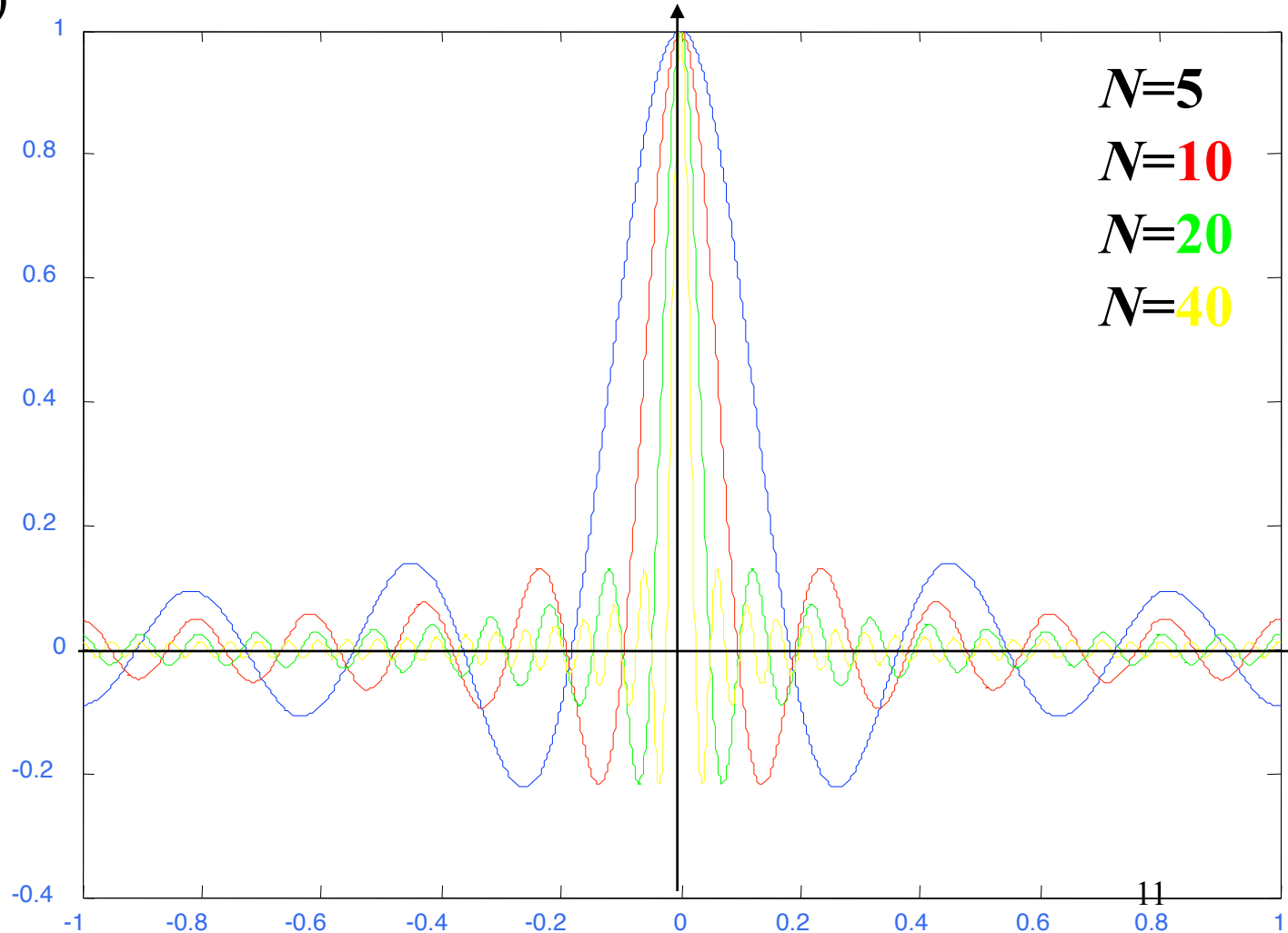
Πεδίο Συχνότητων-Φαινόμενο *Gibbs*



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πεδίο Συχνοτήτων-Φαινόμενο *Gibbs*

$$R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)}$$

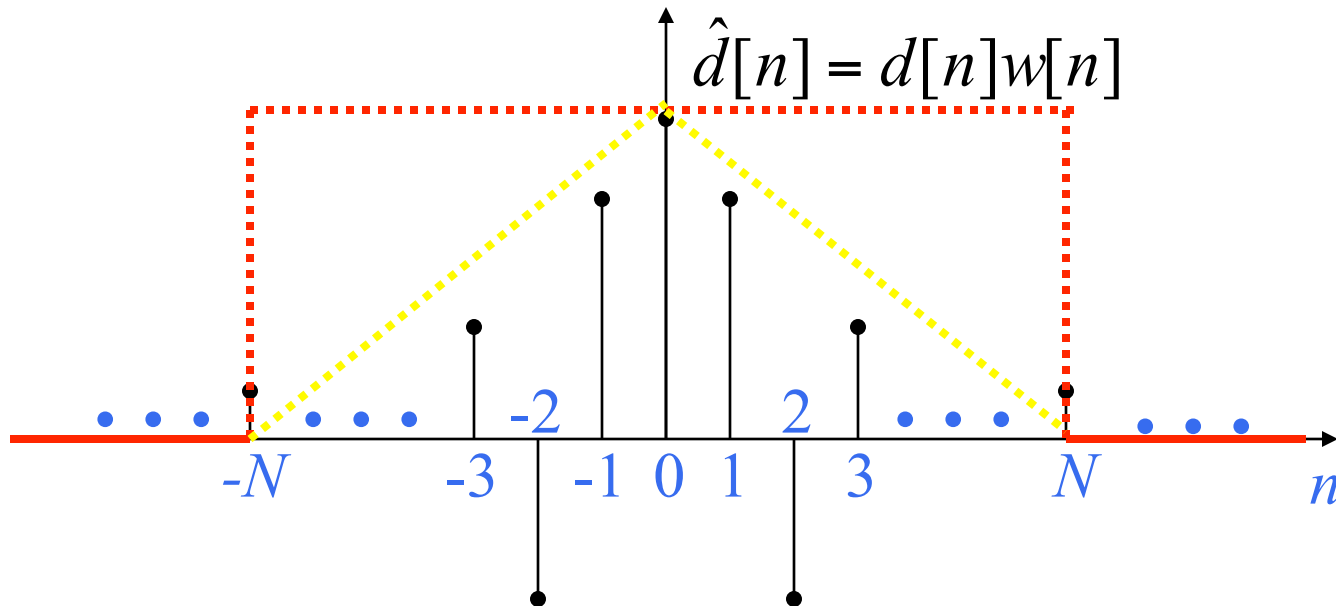


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0 & \end{cases}$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση

Τετραγωνικό Παράθυρο: $\varpi_n = 1, 0 \leq n \leq L-1$

Τριγωνικό (Bartlett): $\varpi_n = 1 - \left| 1 - 2\frac{n+1}{L+1} \right|, 0 \leq n \leq L-1.$

Hanning: $\varpi_n = 0.5 - 0.5 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L-1$

Hamming: $\varpi_n = 0.54 - 0.46 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L-1.$

Blackman: $\varpi_n = 0.52 - 0.5 \cos 2\pi \frac{n+1}{L+1} + 0.08 \cos 4\pi \frac{n+1}{L+1}, 0 \leq n \leq L-1.$

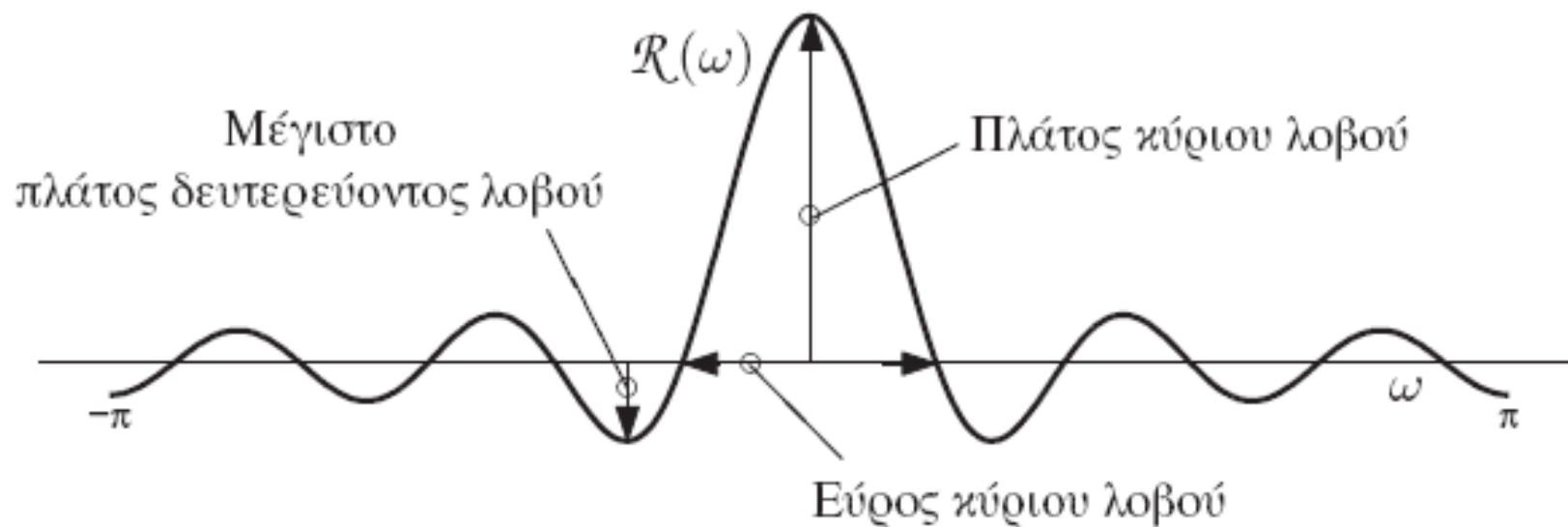
Kaiser: $\varpi_n = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{n}{L-1} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)}, 0 \leq n \leq L-1$

$$\varpi_n = \frac{T_{L-1}(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{L-1}{2} \right]} \cos \frac{(2n-L+1)k\pi}{L} T_{L-1} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{L} \right)}{T_{L-1}(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{L-1}{2} \right]} T_{L-1} \left(\beta \cos \frac{k\pi}{L} \right)}$$



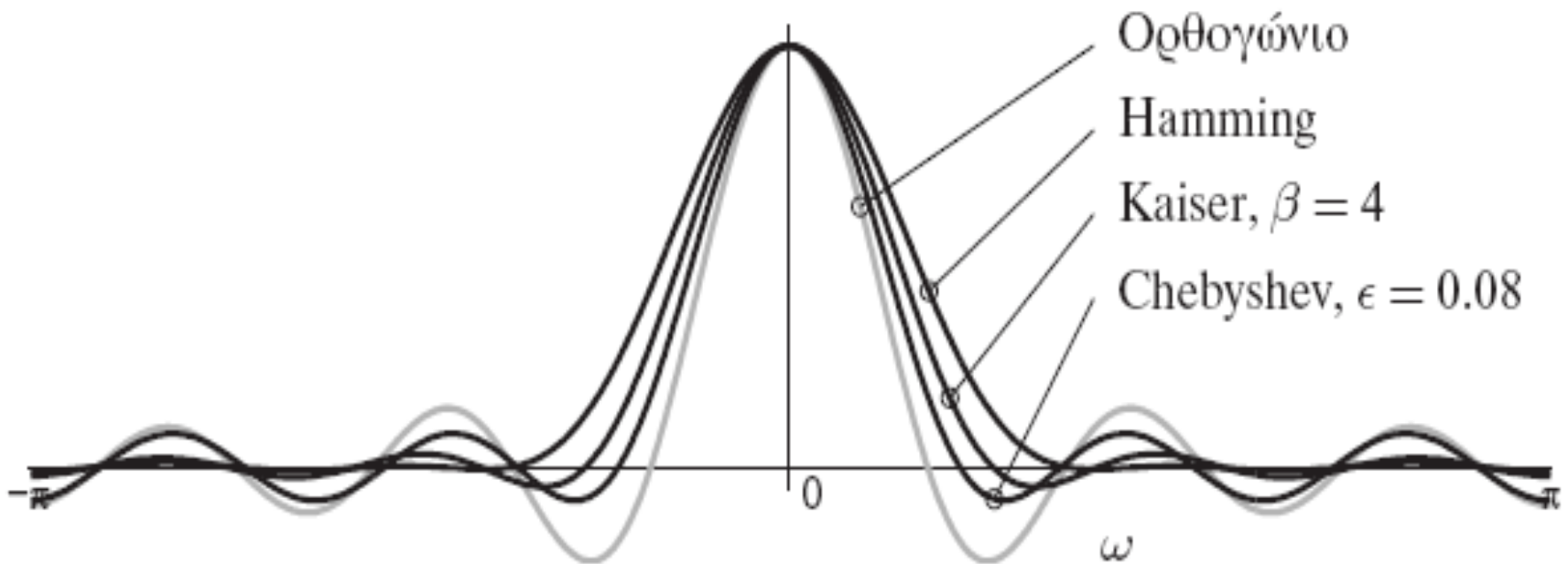
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



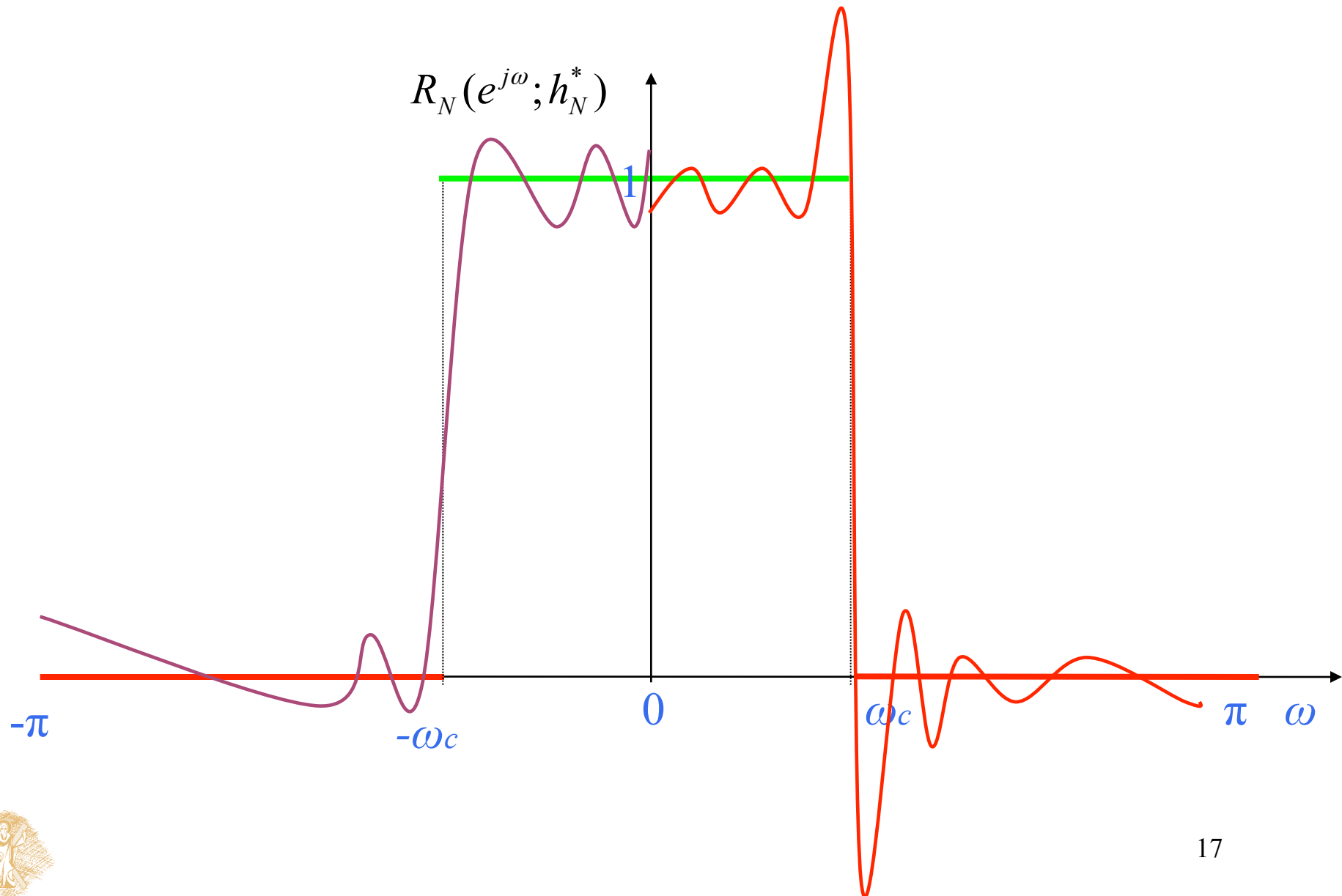
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνотικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων

Παράθυρο	Πλάτος Δευτ. Λοβού	Εύρος Κύριου Λοβού
Ορθογώνιο	2.17×10^{-1}	$\frac{4\pi}{L}$
Bartlett	4.72×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hanning	2.66×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hamming	7.33×10^{-3}	$\frac{8\pi}{L}$
Blackman	1.24×10^{-3}	$\frac{12\pi}{L}$
Kaiser	$2.17 \times 10^{-1} \times \frac{\beta}{\sinh \beta}$	$\frac{4}{L} [\pi^2 + \beta^2]^{1/2}$
Chebyshev	ϵ	$\frac{2}{L} [\pi^2 + 4 (\cosh^{-1}(\frac{1}{\epsilon}))^2]^{1/2}$



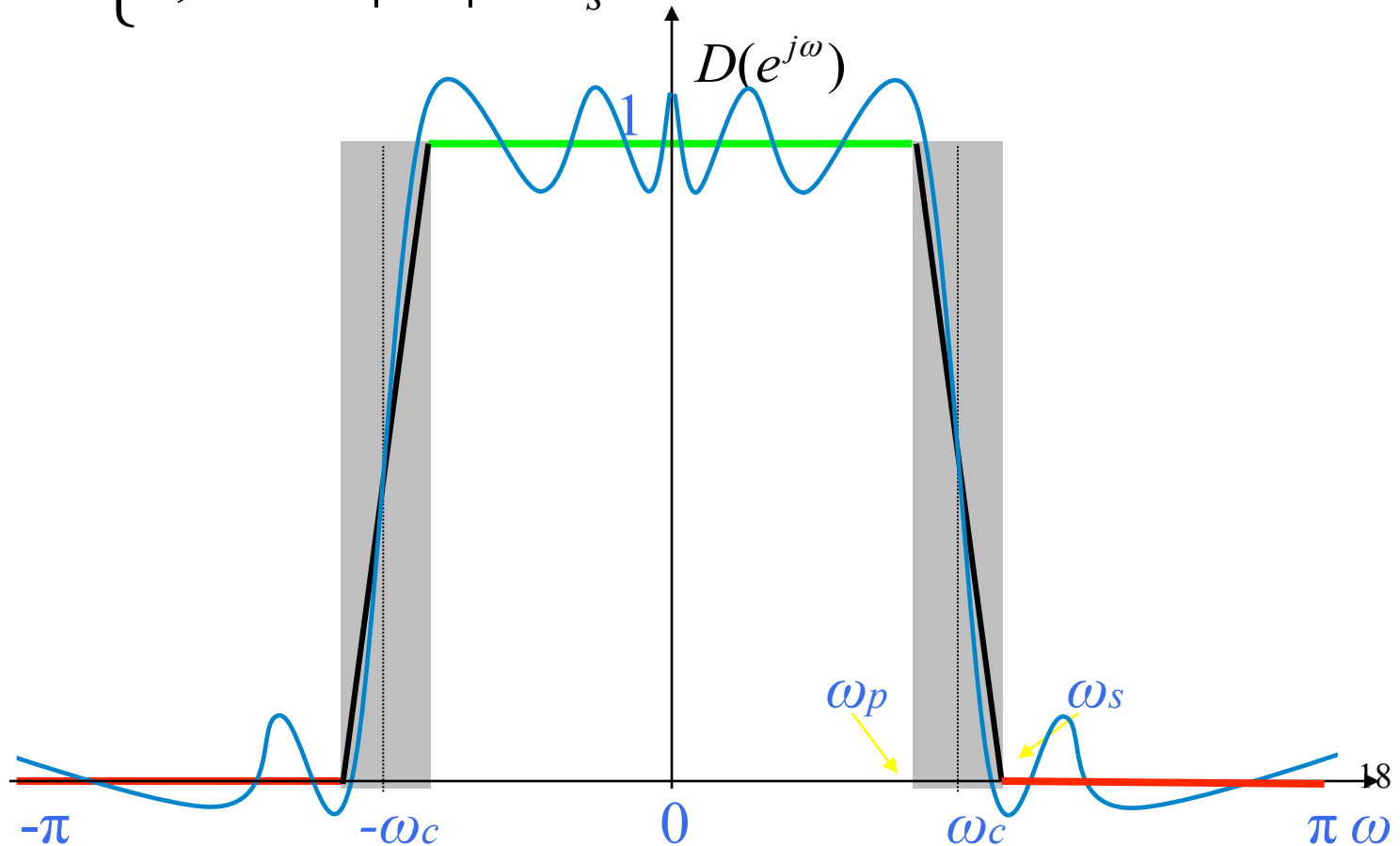
Σχεδίαση FIR Φίλτρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πρακτικές Προδιαγραφές

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πρακτικές Προδιαγραφές

Χρησιμοποίηση της εξίσωσης Ανάλυσης των Σειρών Fourier ;

Εξίσωση Σύνθεσης:
$$\tilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Ανάλυσης:
$$d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Συνάρτηση Σφάλματος:

$$\varepsilon(e^{j\omega}; h_N) = D(e^{j\omega}) - R(e^{j\omega}; h_N)$$

Συνάρτηση Κόστους:

$$E_p^p(h_N) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon(e^{j\omega}; h_N)|^p d\omega$$

Σκοπός μας η λύση του προβλήματος:

$$\min_{h_N} E_p^p(h_N)$$

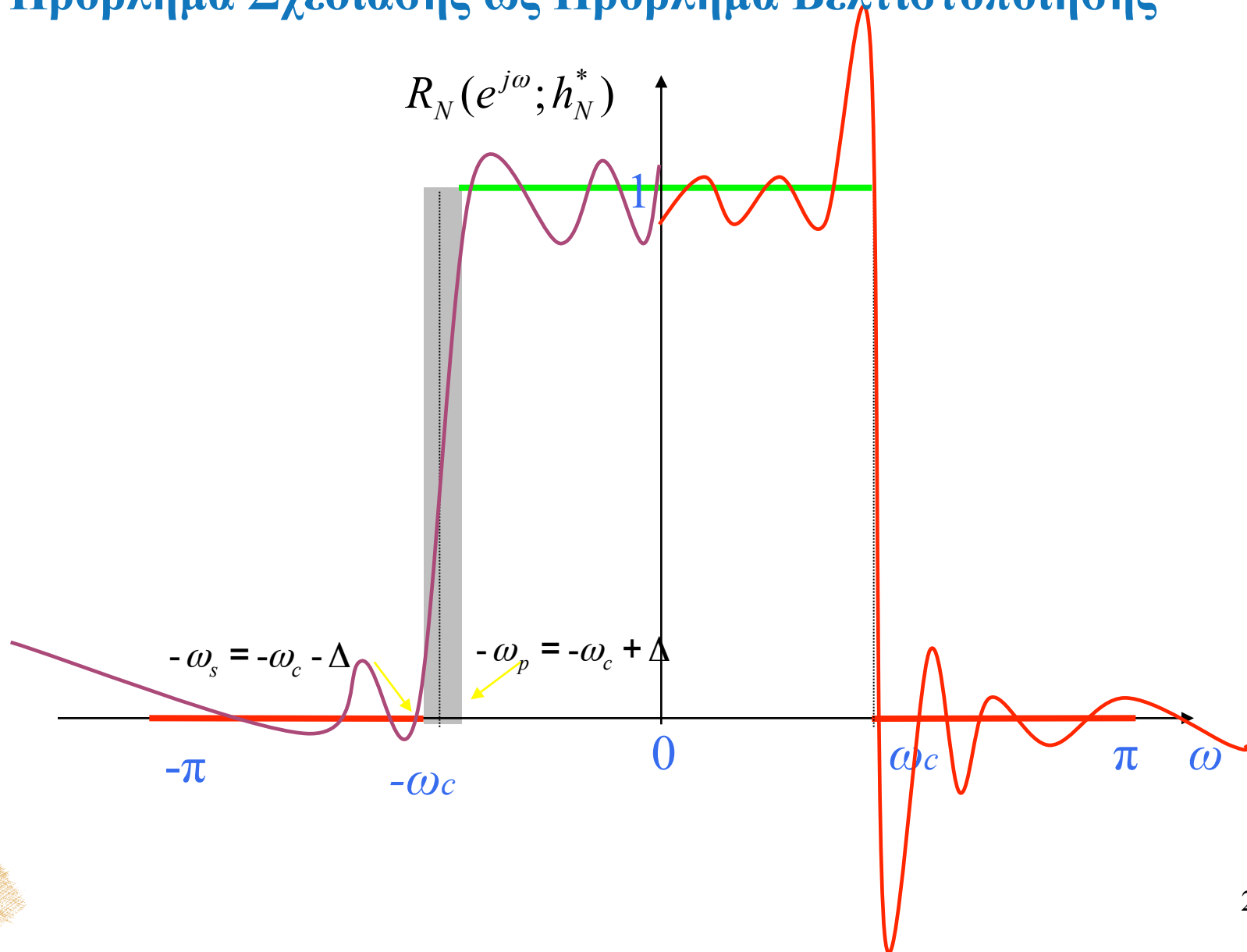
Η βέλτιστη λύση :

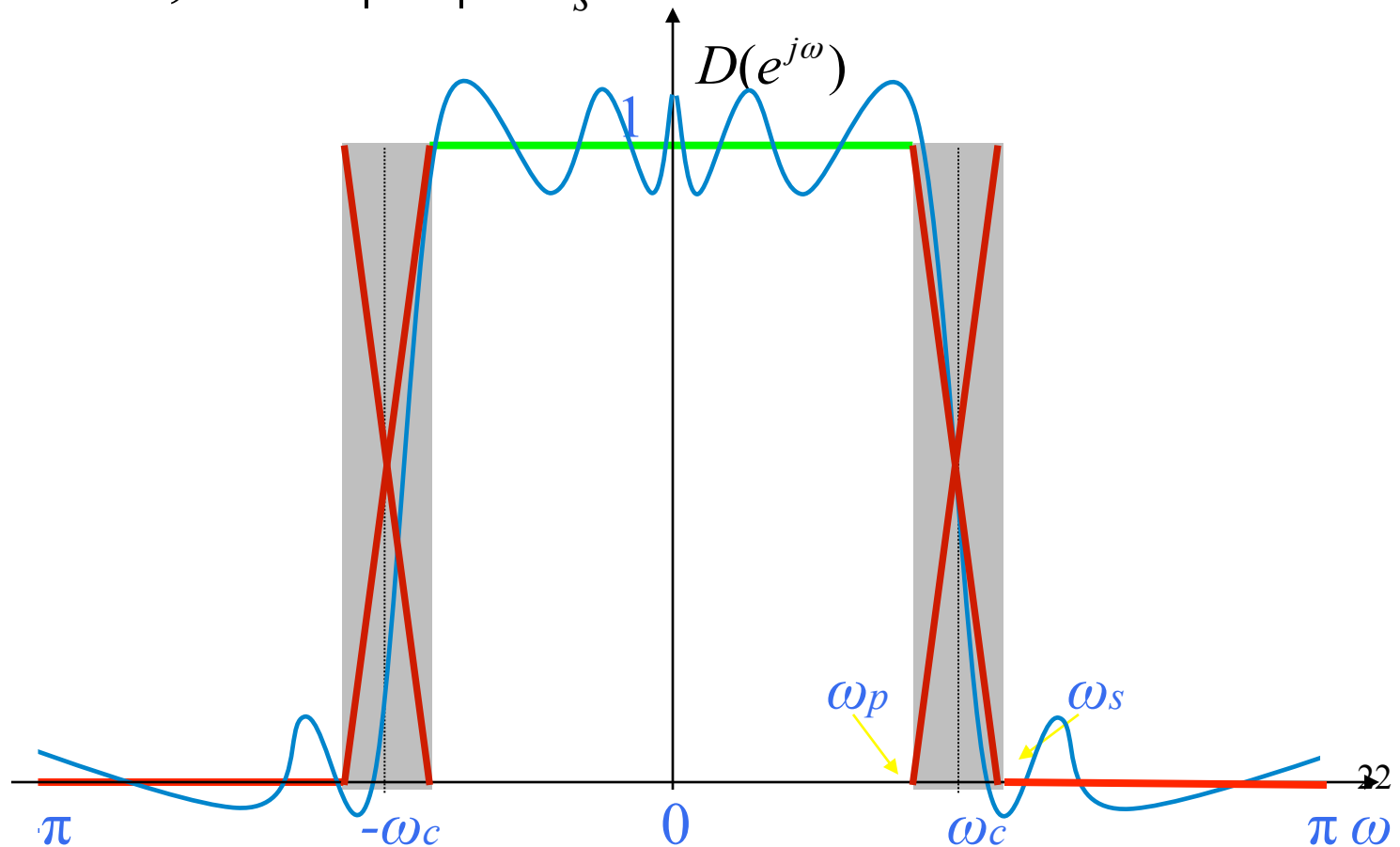
$$h_N^* = \arg \min_{h_N} E_p^p(h_N)$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

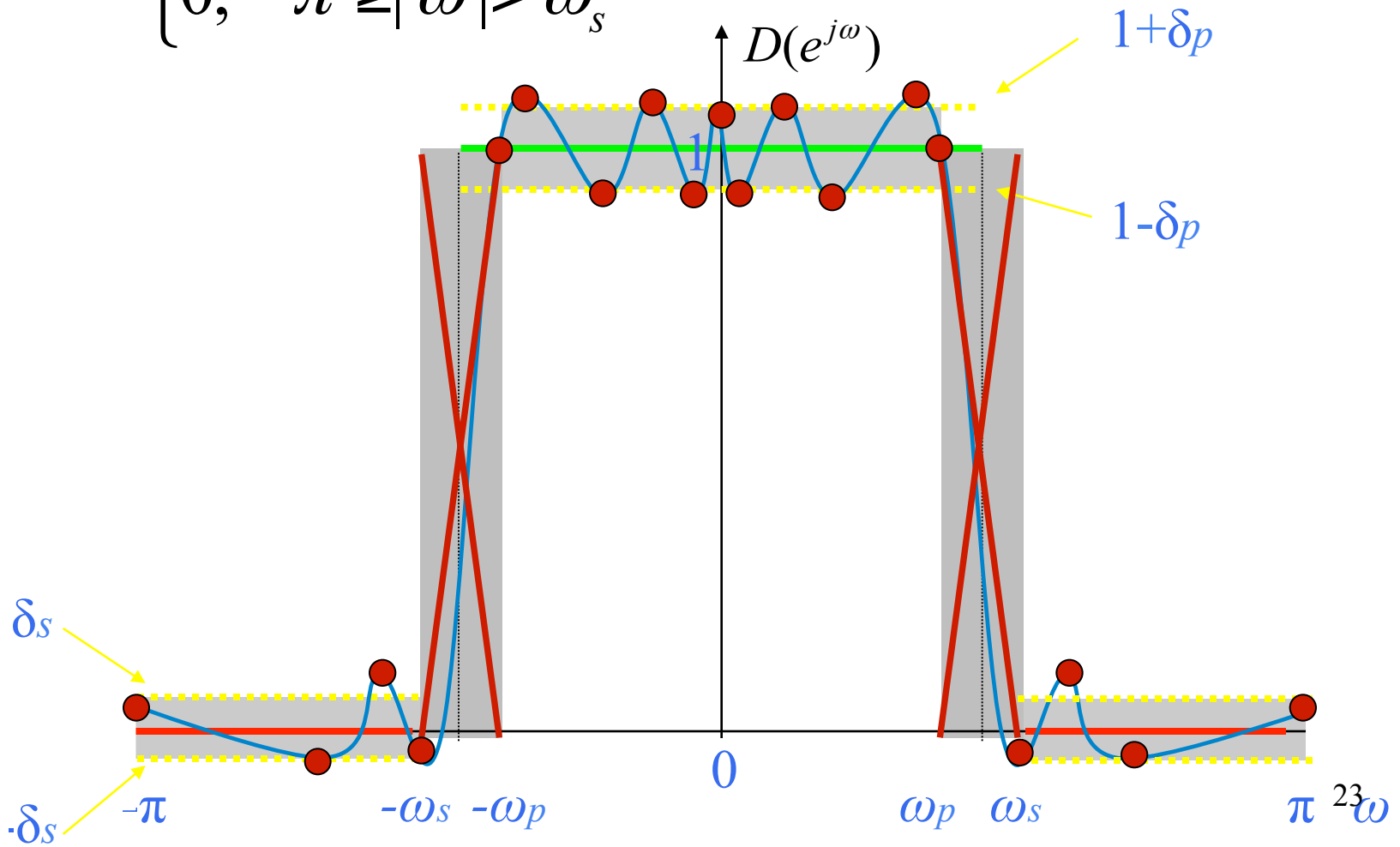


$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

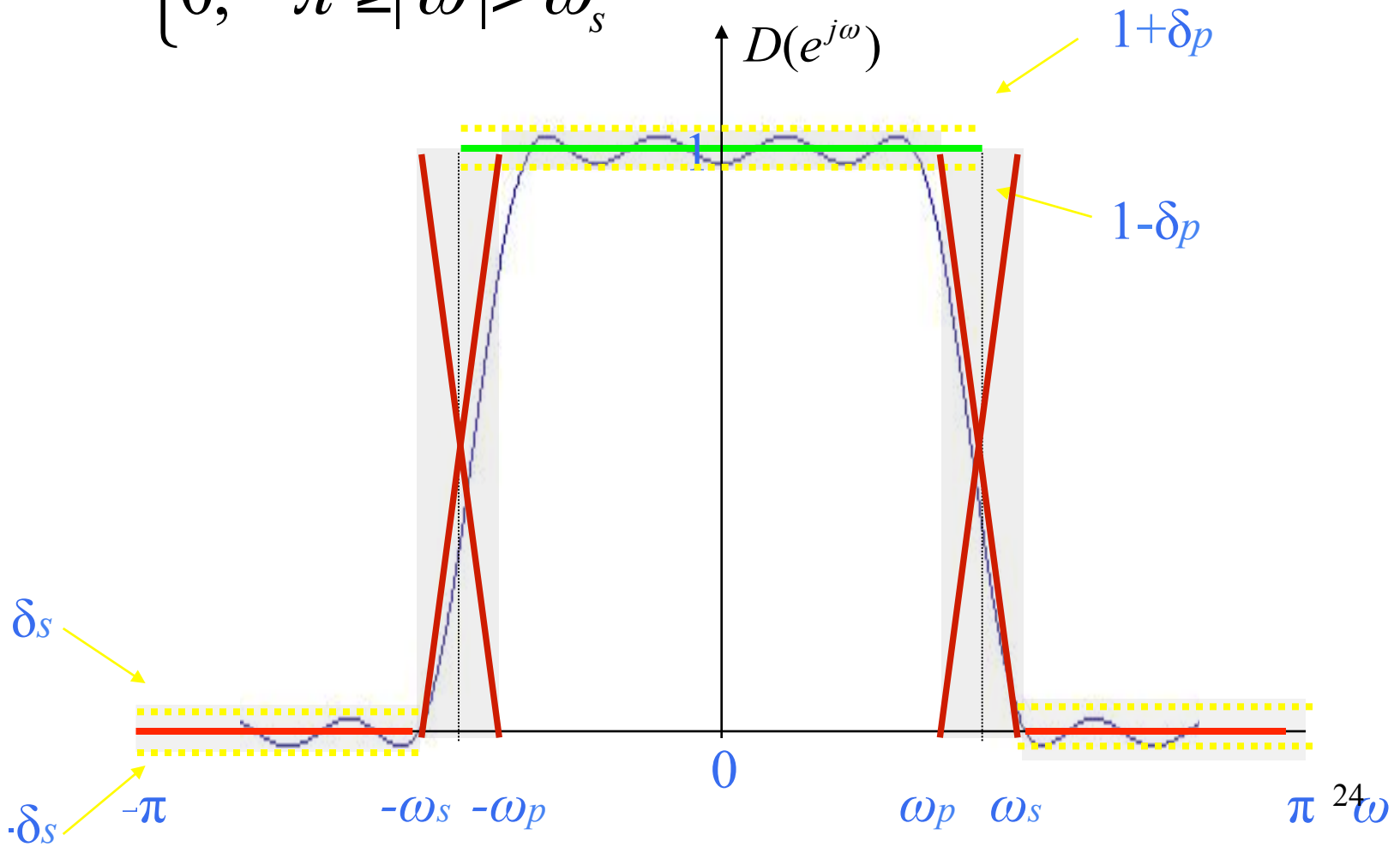
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Δίνεται το πολυώνυμο

$$D(x) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n, \quad |x| \leq 1$$

Προσεγγίστε το παραπάνω πολυώνυμο με ένα FIR φίλτρο μήκους $2N+1$

Με την έννοια:

- των ελαχίστων τετραγώνων
- του ελάχιστο-μέγιστου

Για κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις, υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης.



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πολυώνυμα Chebyshev

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)), & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

Αναδρομική σχέση ορισμού των πολωνύμων:

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x), \quad n \geq 2$$

