



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

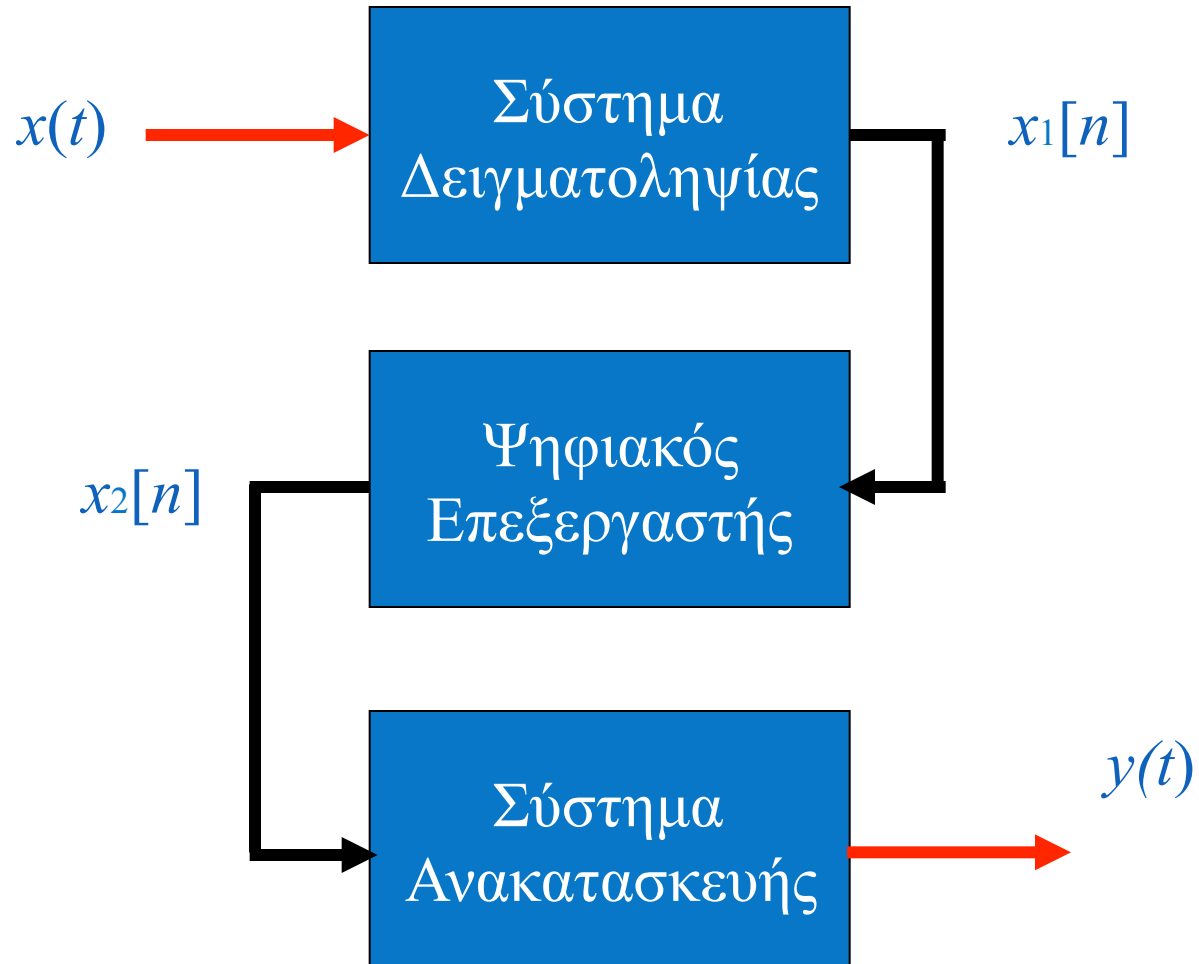
© Δειγματοληψία

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

Πολυτεχνική Σχολή

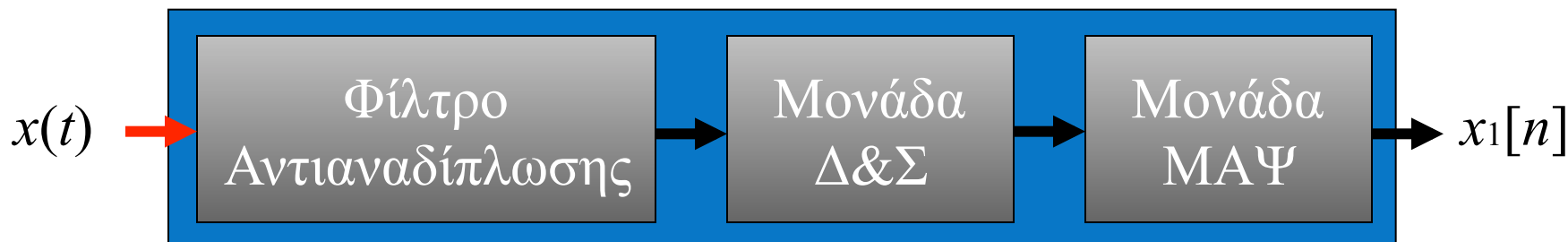
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Σύστημα Επεξεργασίας Σημάτων



Σύστημα Επεξεργασίας Σημάτων

Σύστημα Δειγματοληψίας:



Δειγματοληψία: Ερωτήματα που θα πρέπει να απαντηθούν:

- Ποια είναι η Σχέση Μετασχηματισμού Fourier Αναλογικού & Ψηφιακού Σήματος;
- Κάτω από ποιες προϋποθέσεις ένα σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να ανακατασκευασθεί από τα δείγματά του (Θεώρημα Δειγματοληψίας);
- Τι τρόπο ανακατασκευής προτείνει το Θεώρημα Δειγματοληψίας;



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Δειγματοληψία:

$x(t)$: Σήμα Συνεχούς Χρόνου

$x[n]$: Σήμα Διακριτού Χρόνου

T_s : Περίοδος Δειγματοληψίας

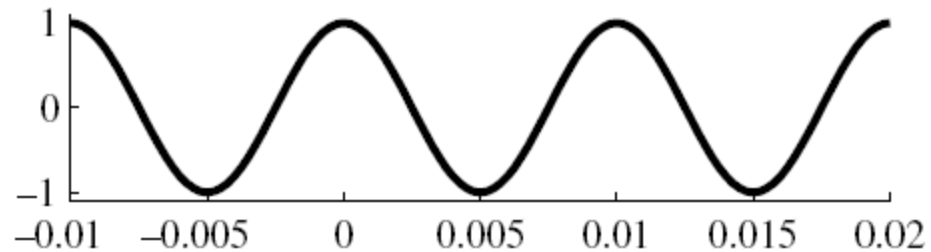
$f_s = \frac{1}{T_s}$: Συχνότητα Δειγματοληψίας

$$x[n] = x(t) \big|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$



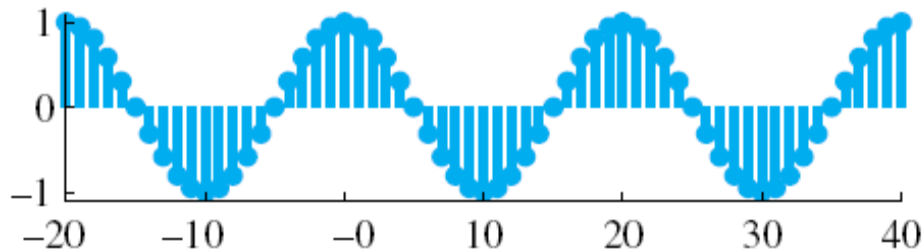
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Συνεχούς Χρόνου $x(t)=\cos(2\pi 100t)$



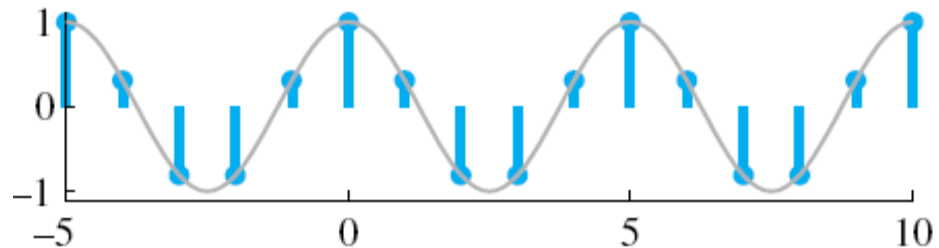
Σήμα Διακριτού Χρόνου: $x[n]=\cos(2\pi 100nT_s)$

$T_s=0.5 \text{ msec}$

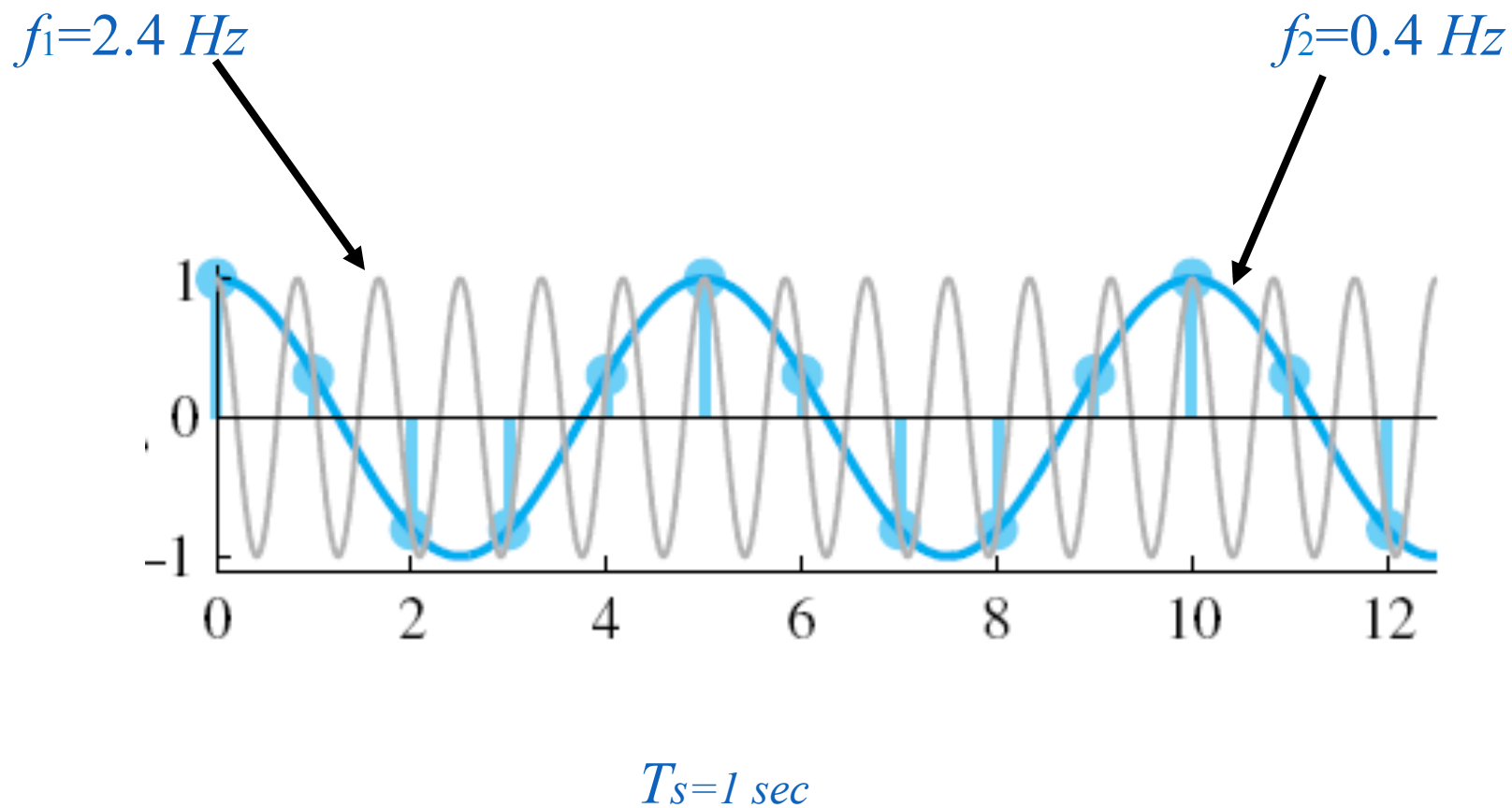


Σήμα Διακριτού Χρόνου: $x[n]=\cos(2\pi 100nT_s)$

$T_s=2 \text{ msec}$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

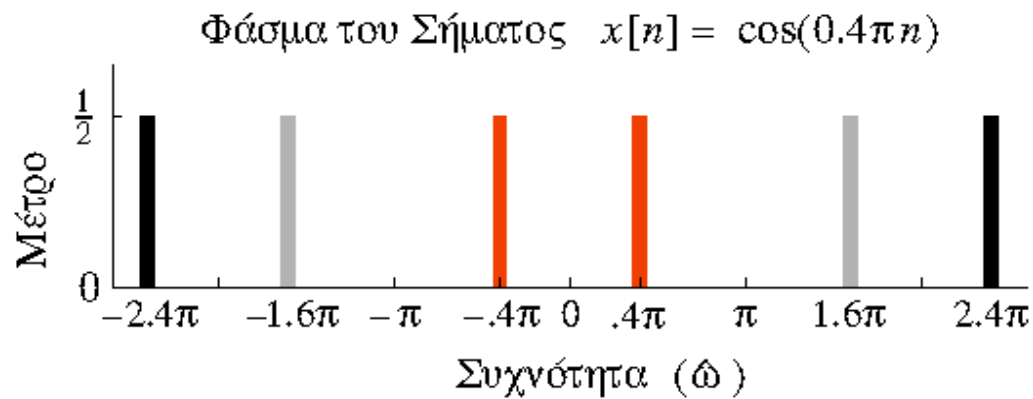
Ψευδώνυμα Συχνοτήτων: $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_0 + 2\pi\ell, 2\pi\ell - \hat{\omega}_0, \quad (\ell = \text{ακέραιος})$

$$\begin{aligned} A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi) &= A \cos((\hat{\omega}_0 + 2\pi\ell)n + \phi) \\ &= A \cos((2\pi\ell - \hat{\omega}_0)n - \phi) \end{aligned}$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

$$y(t) = A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)t + \phi)$$

$$\begin{aligned} y[n] = y(nT_s) &= A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)nT_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$



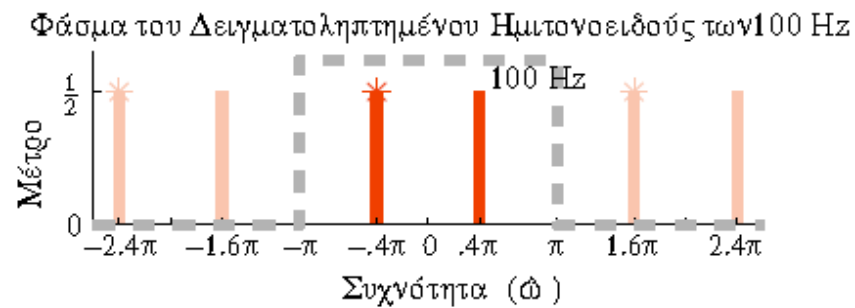
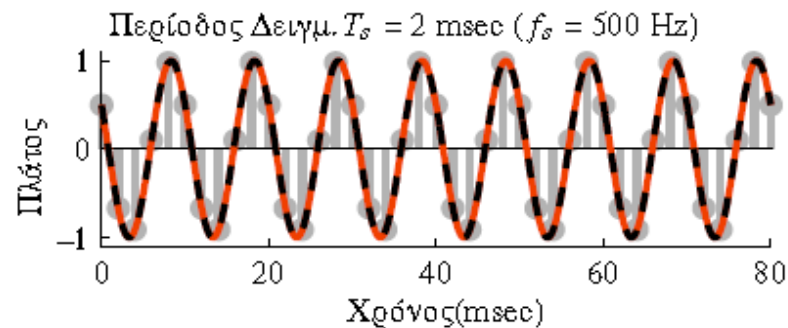
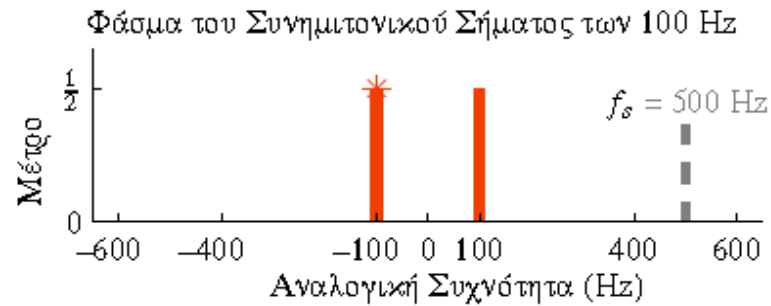
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

$$w(t) = A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)t - \phi)$$

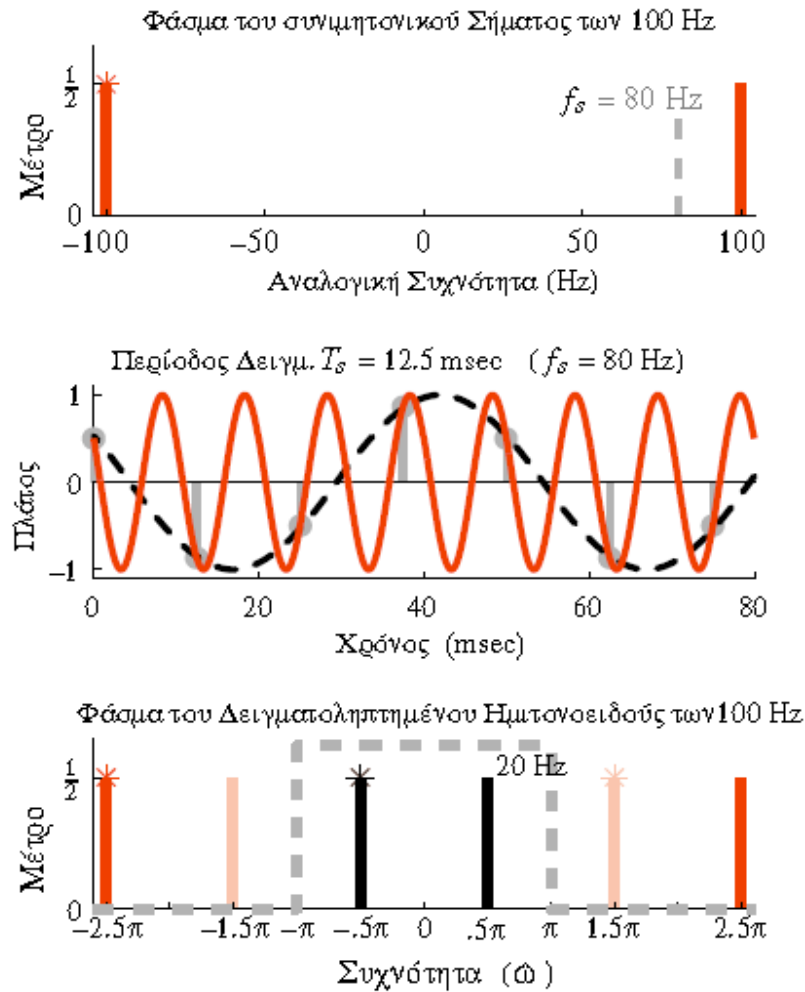
$$\begin{aligned} w[n] = w(nT_s) &= A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)nT_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi n \ell - \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$



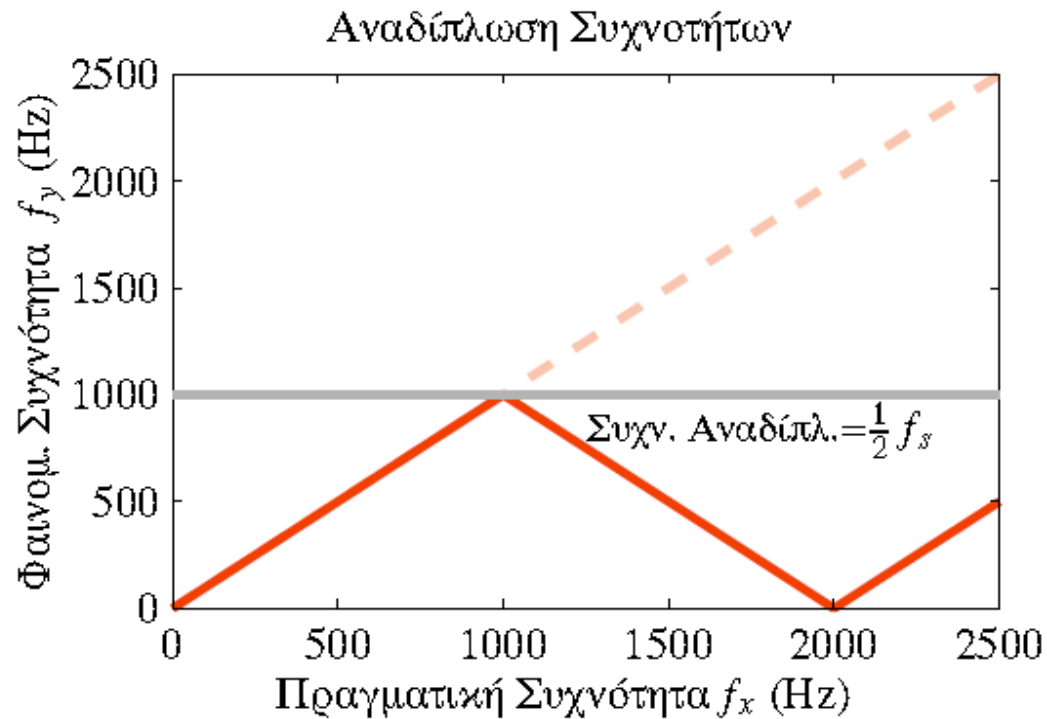
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



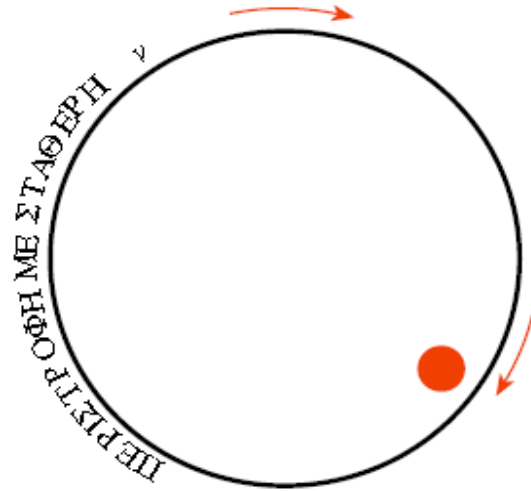
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



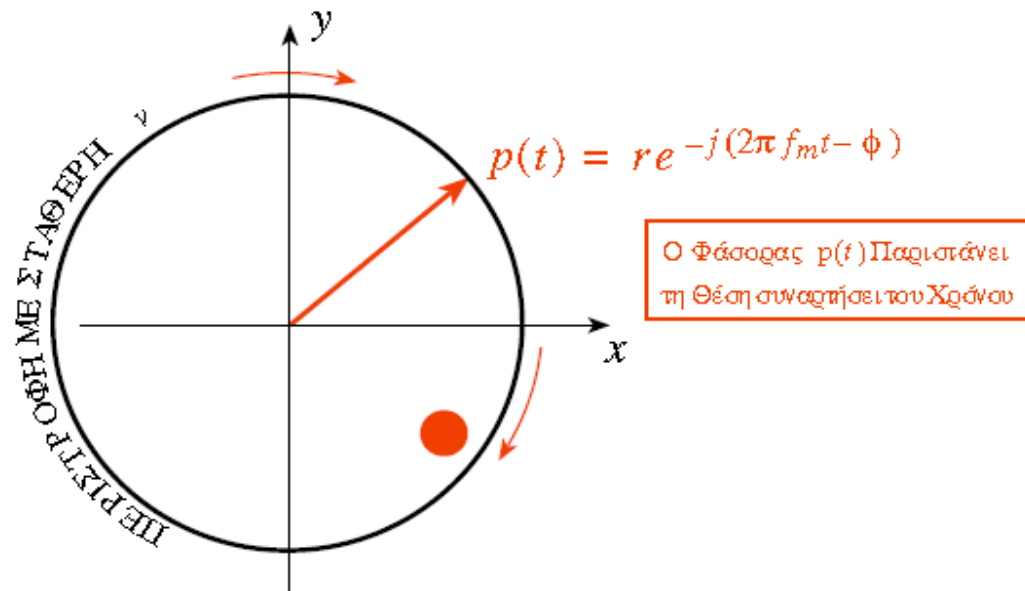
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

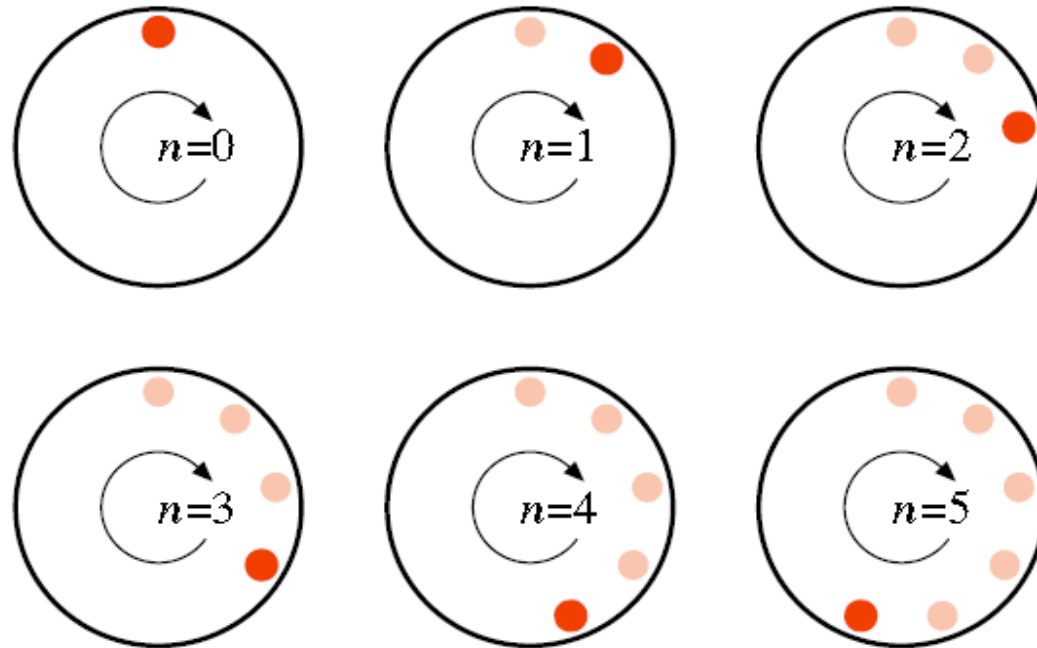


$$p(t) = r e^{-j(2\pi f_m t - \phi)}$$

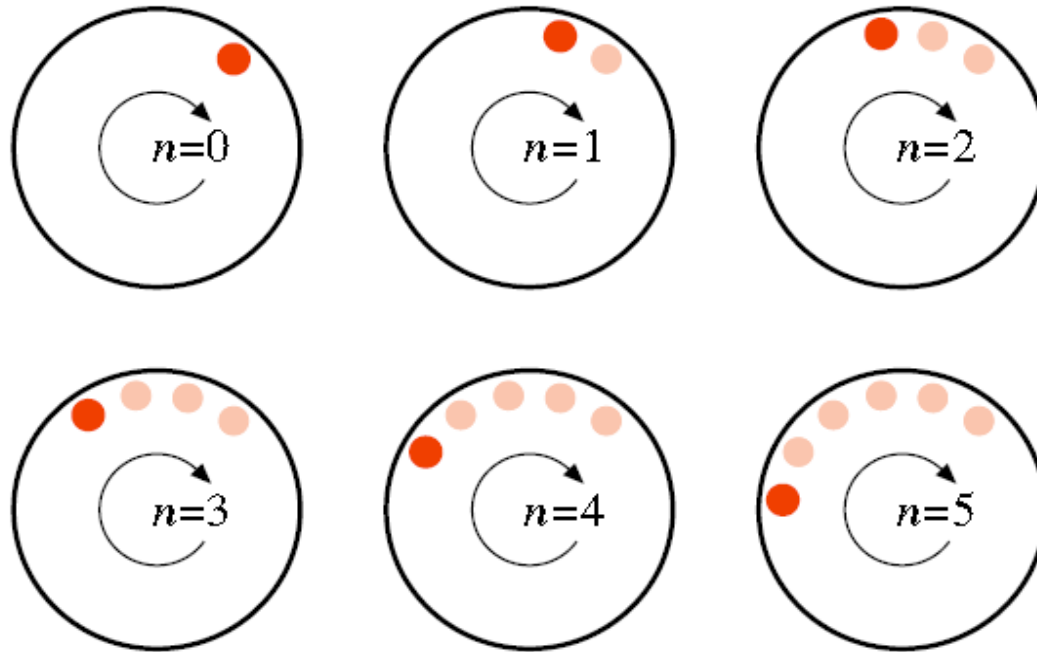
$$p[n] = r e^{-j(2\pi(f_m/f_s)n - \phi)}$$



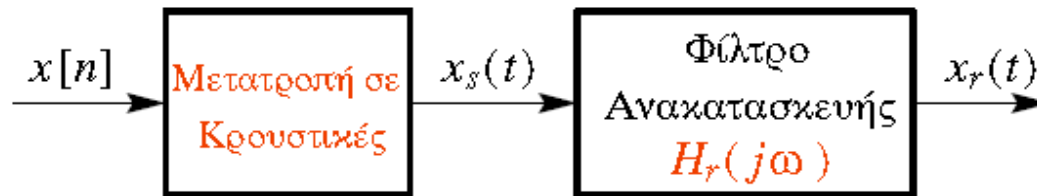
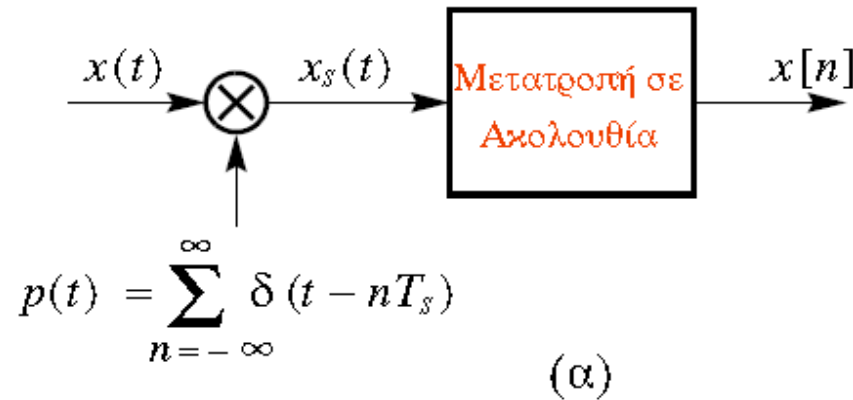
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



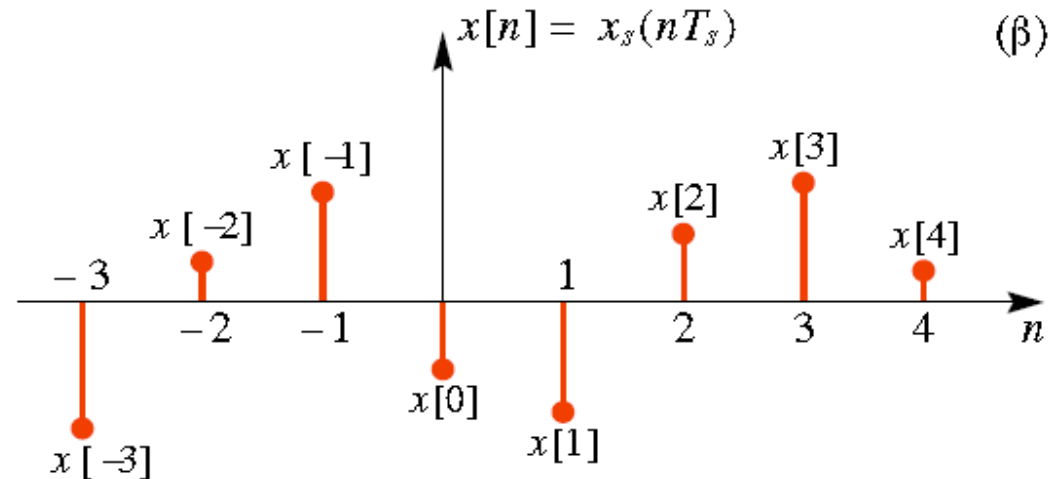
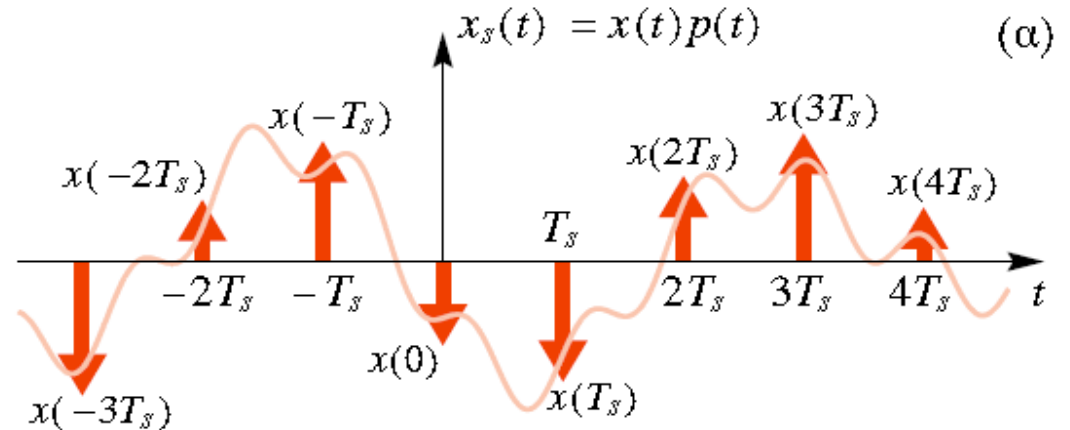
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

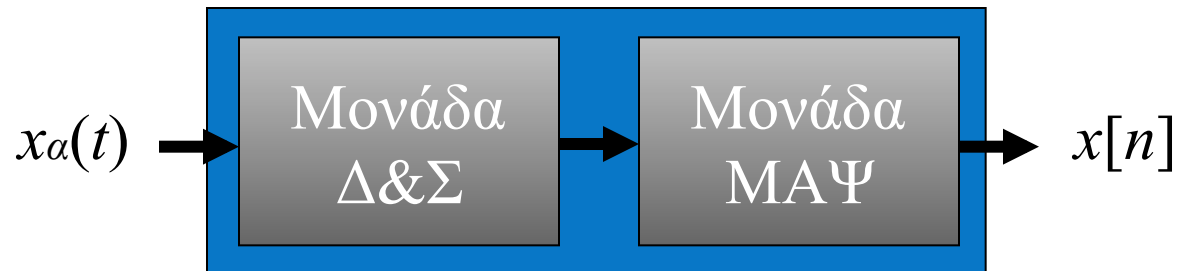
$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



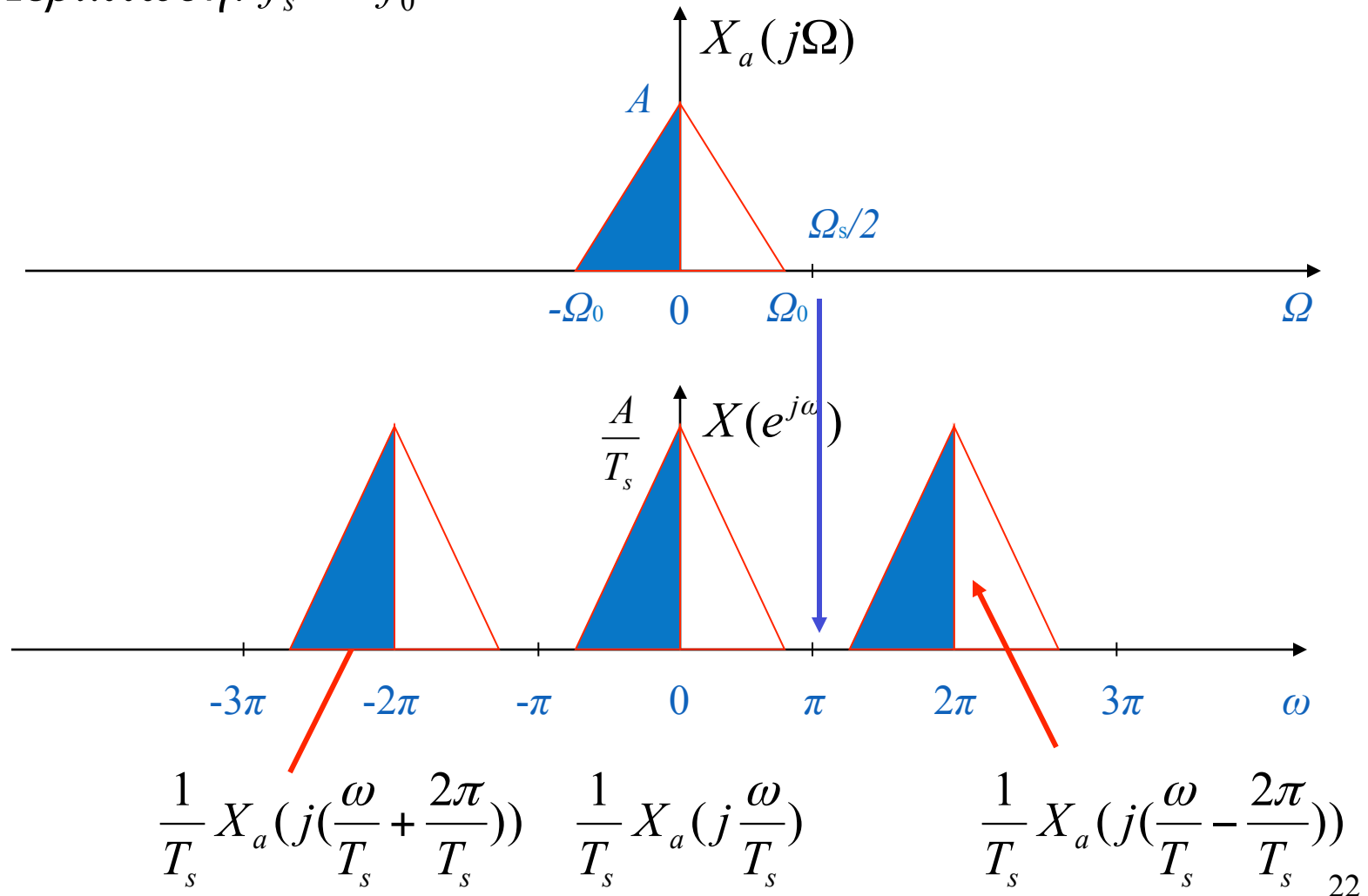
Σχέση ΔΧΜΦ και ΣΧΜΦ:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}))$$



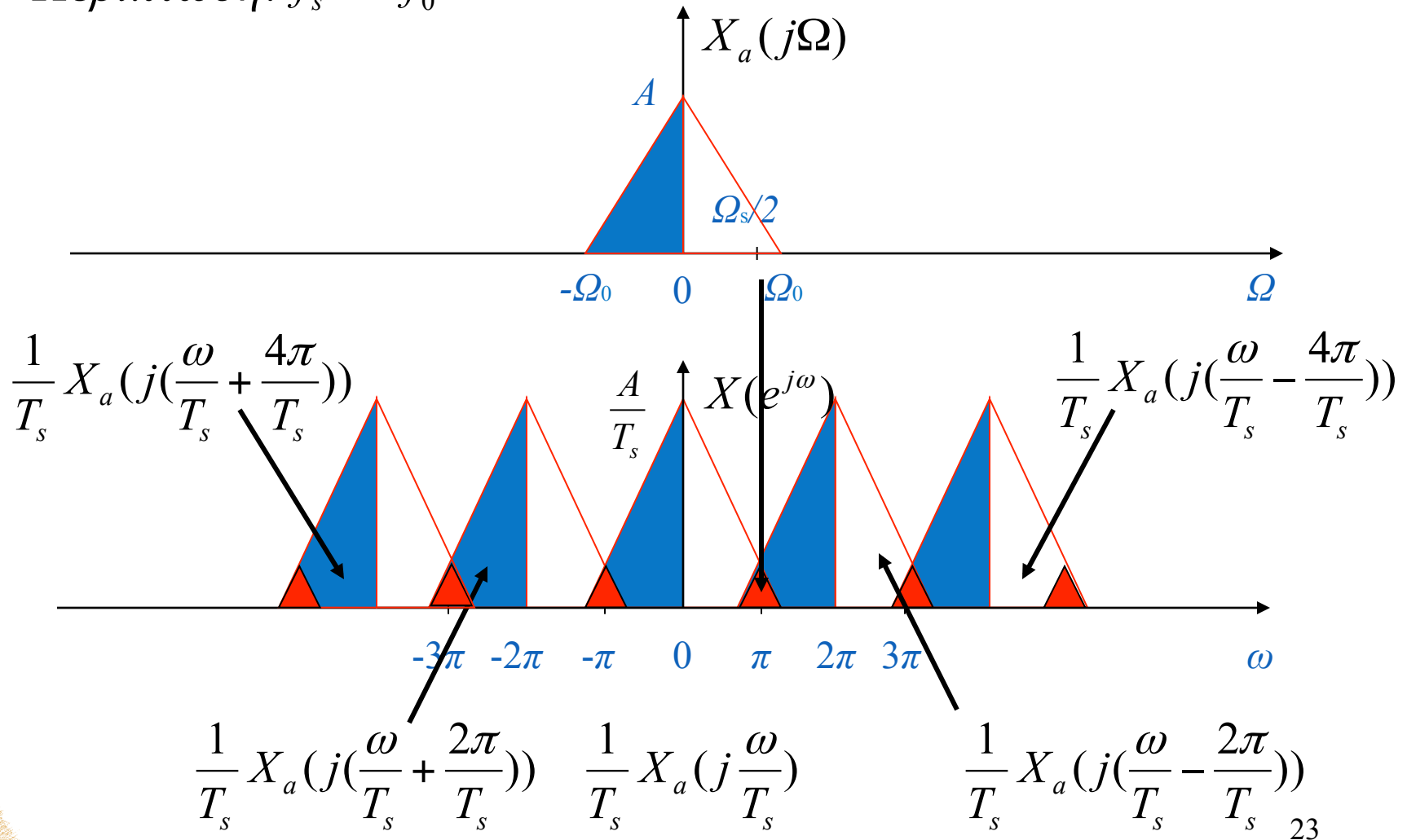
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

Περίπτωση: $f_s \geq 2f_0$

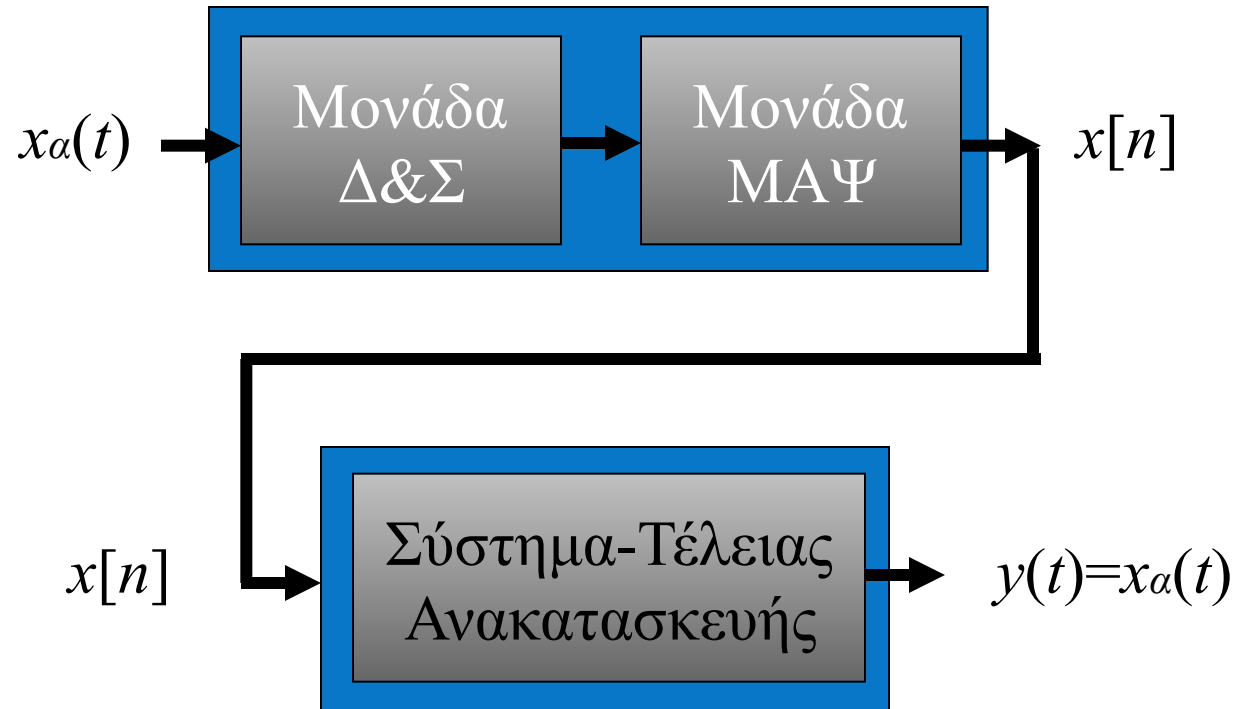


Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

Περίπτωση: $f_s < 2f_0$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

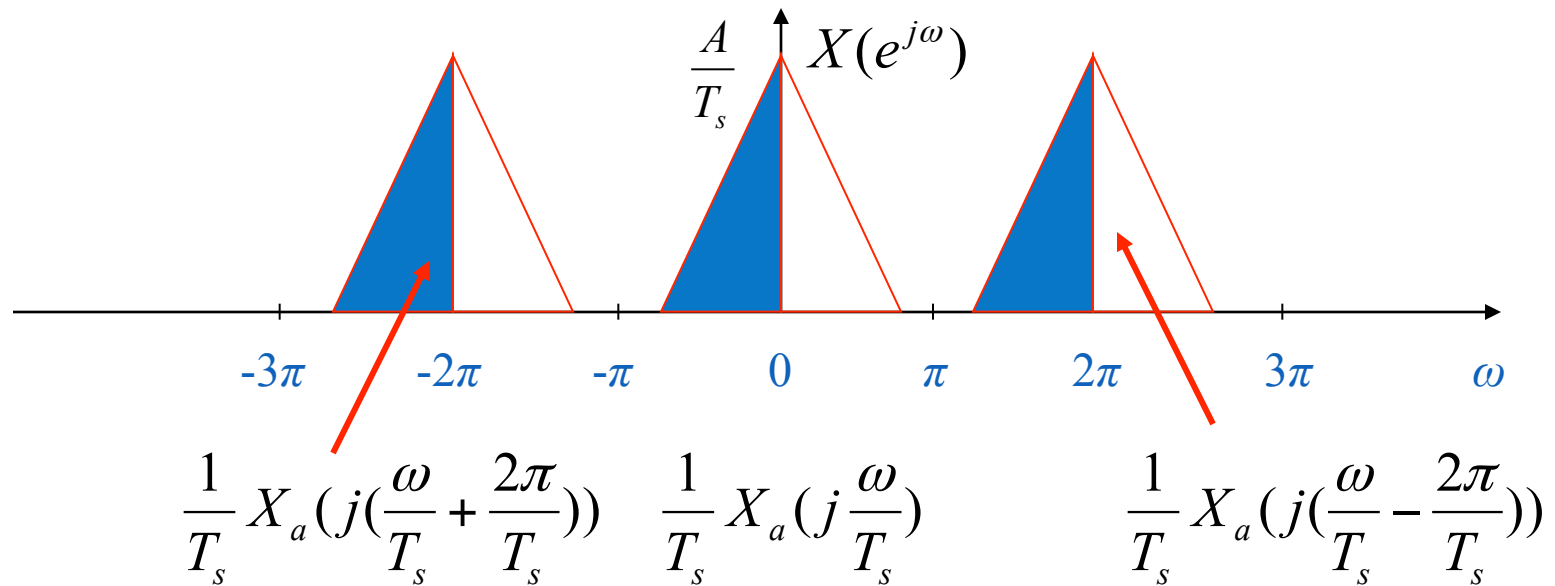


Βασική Προϋπόθεση: $f_s \geq 2f_0$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Για την περίπτωση που $f_s \geq 2f_0$

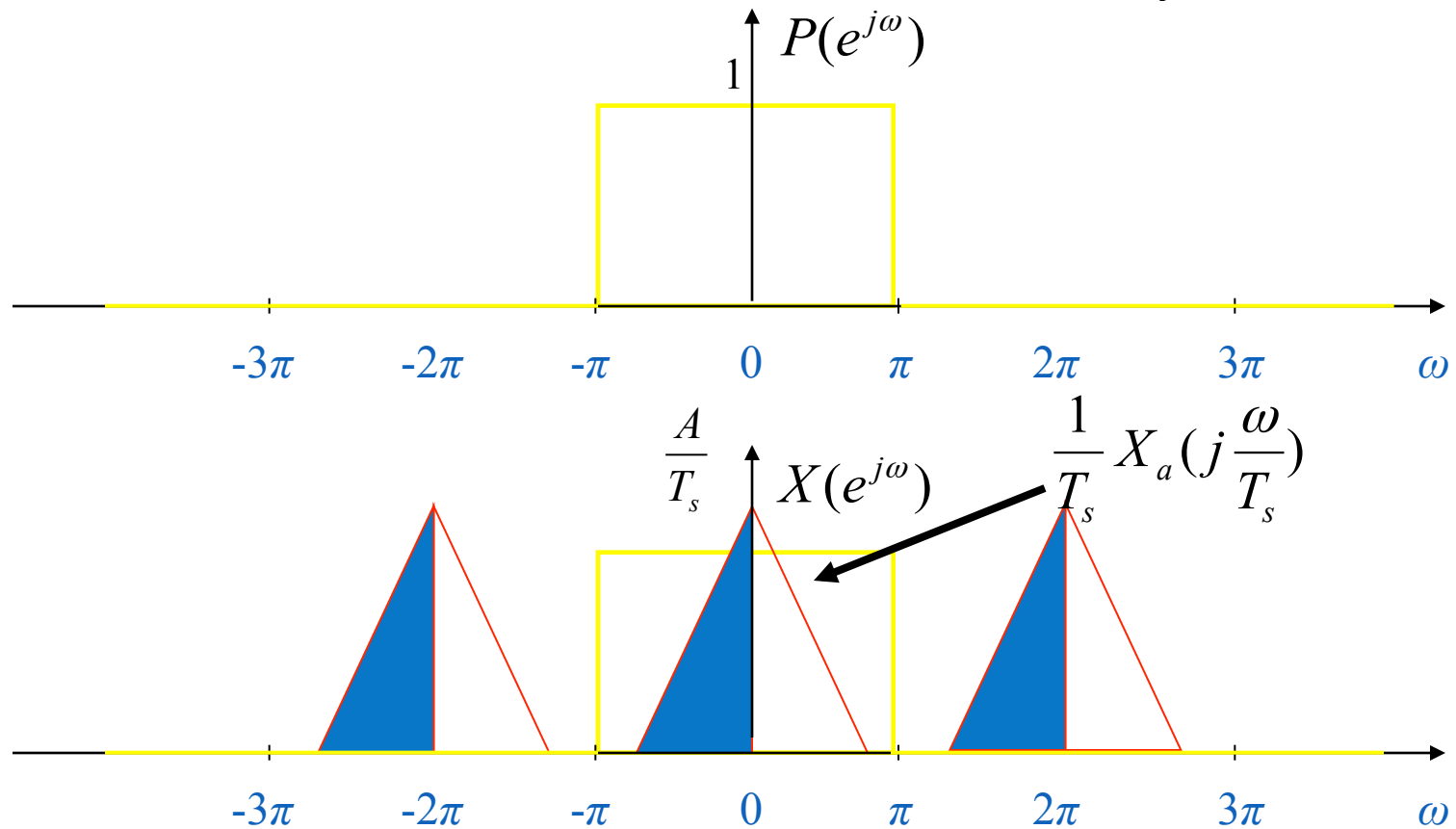


Είναι προφανές ότι ισχύει $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a(j\frac{\omega}{T_s}), \quad |\omega| \leq \pi$



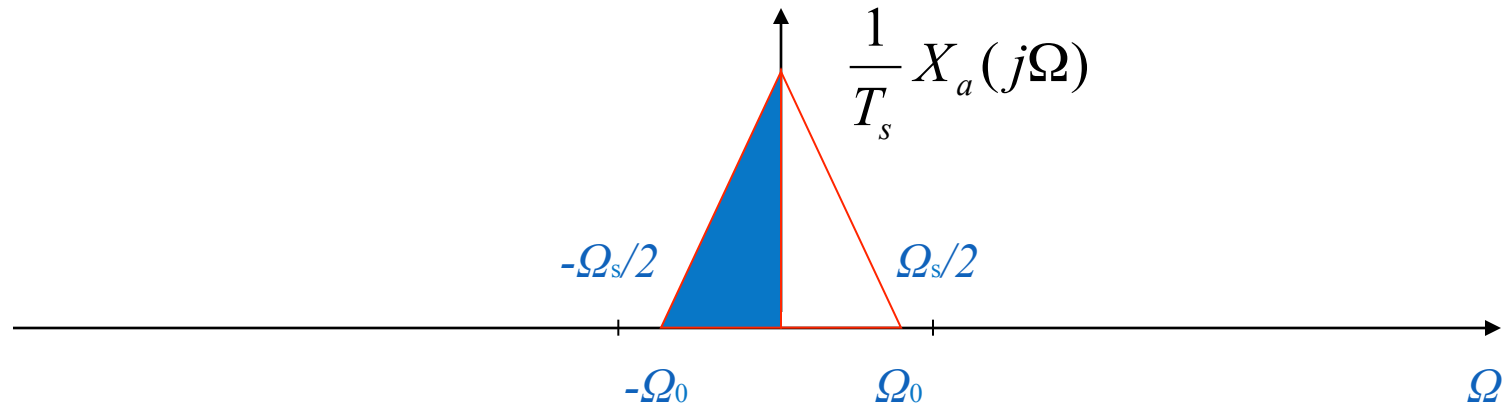
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Επομένως αν ορίσουμε την συνάρτηση: $P(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

$$\text{Επομένως: } X(e^{j\omega})P(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a(j\frac{\omega}{T_s})$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Επομένως:

$$x_a(t) = IFT\{X_a(j\Omega)\} = IFT\{T_s X(e^{jT_s\Omega})P(e^{jT_s\Omega})\}$$

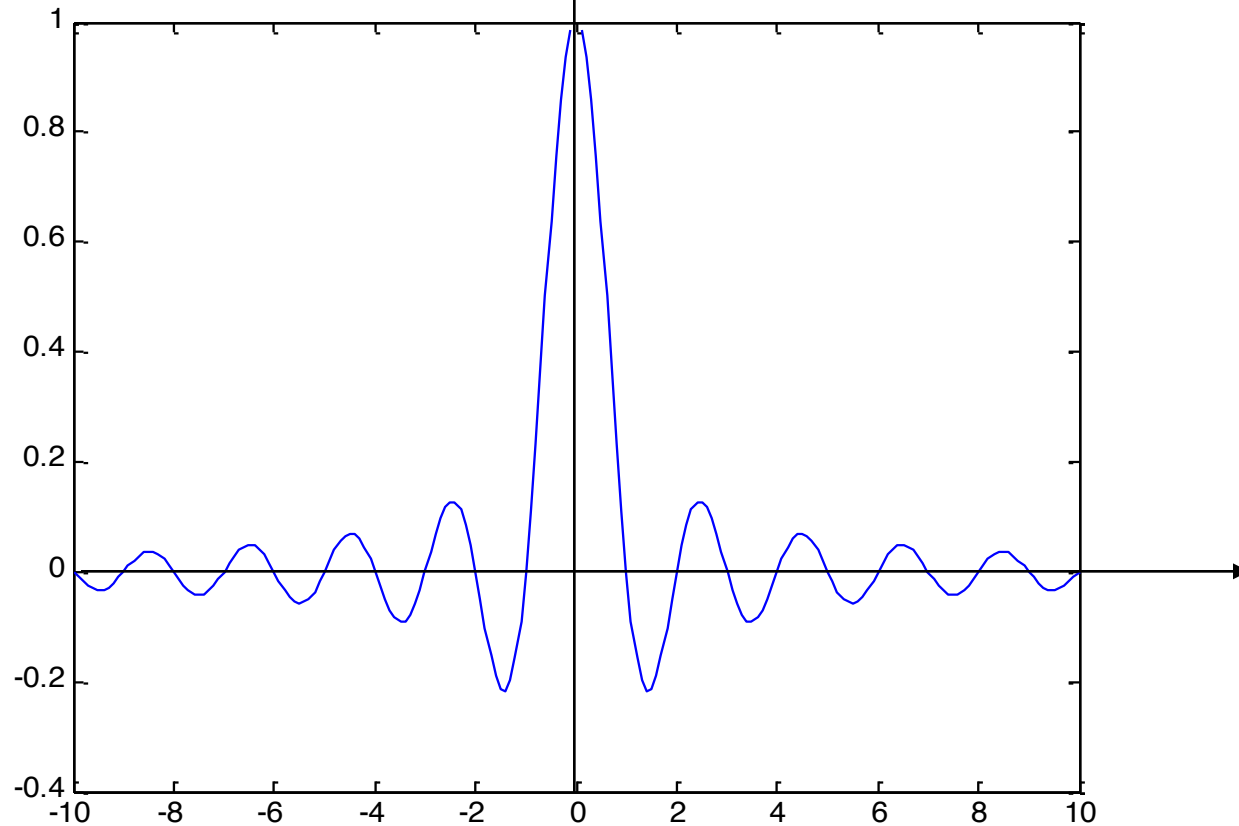
ή ισοδύναμα:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin((\frac{t}{T_s} - n)\pi)}{(\frac{t}{T_s} - n)\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{Sinc}((\frac{t}{T_s} - n))$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

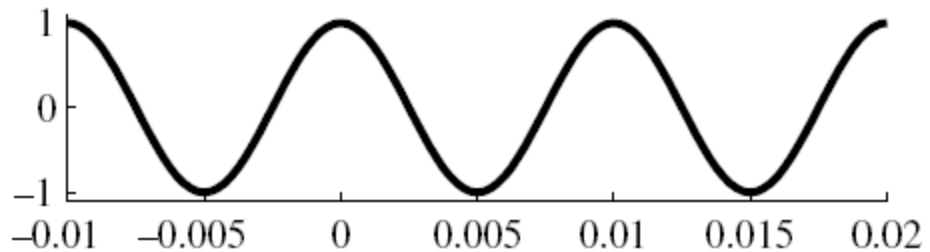
$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



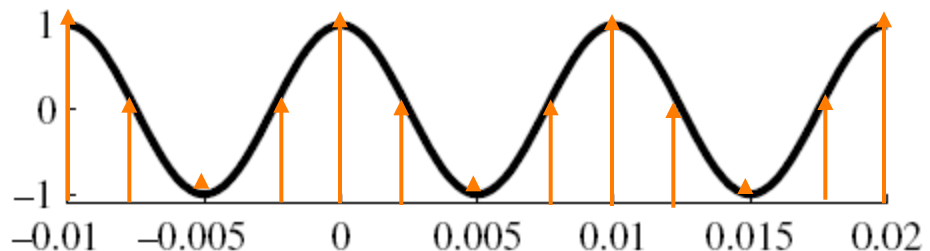
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

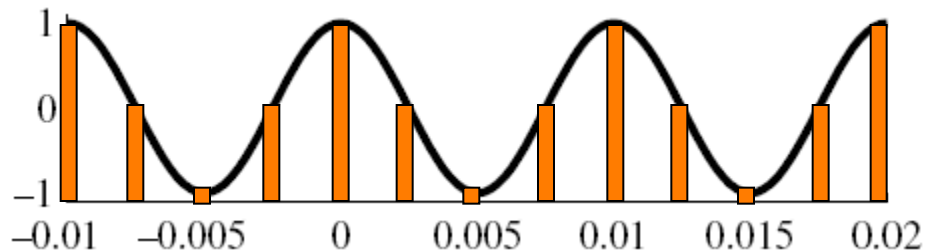
Αρχικό Σήμα:



Ιδανική Δειγματοληψία:



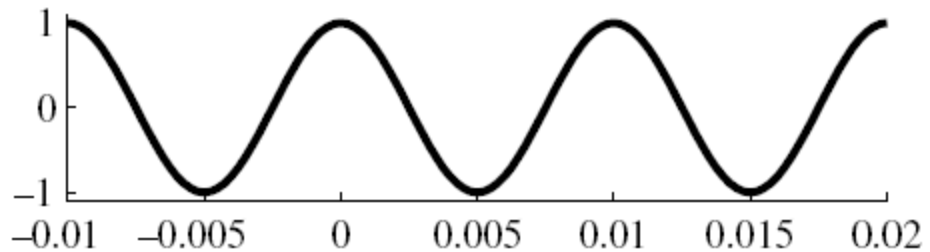
Πραγματική Δειγματοληψία
(PAM):



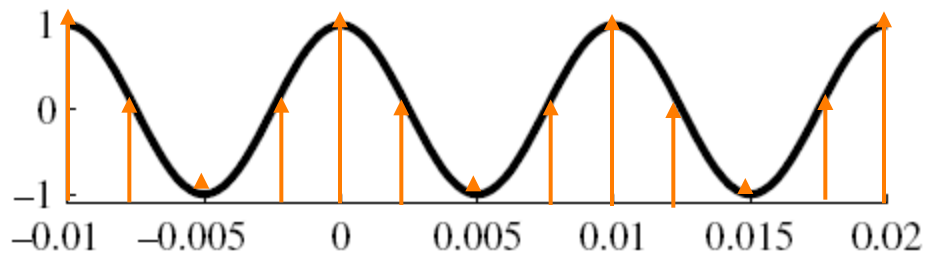
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

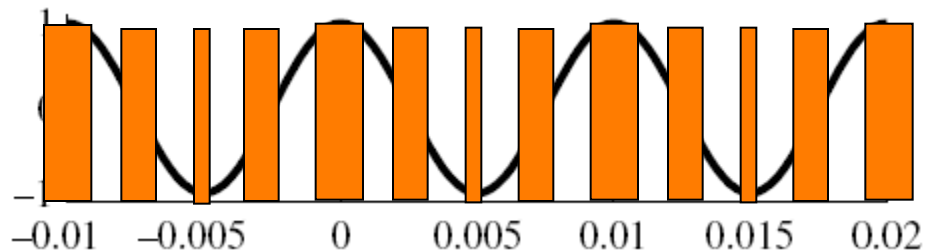
Αρχικό Σήμα:



Ιδανική Δειγματοληψία:



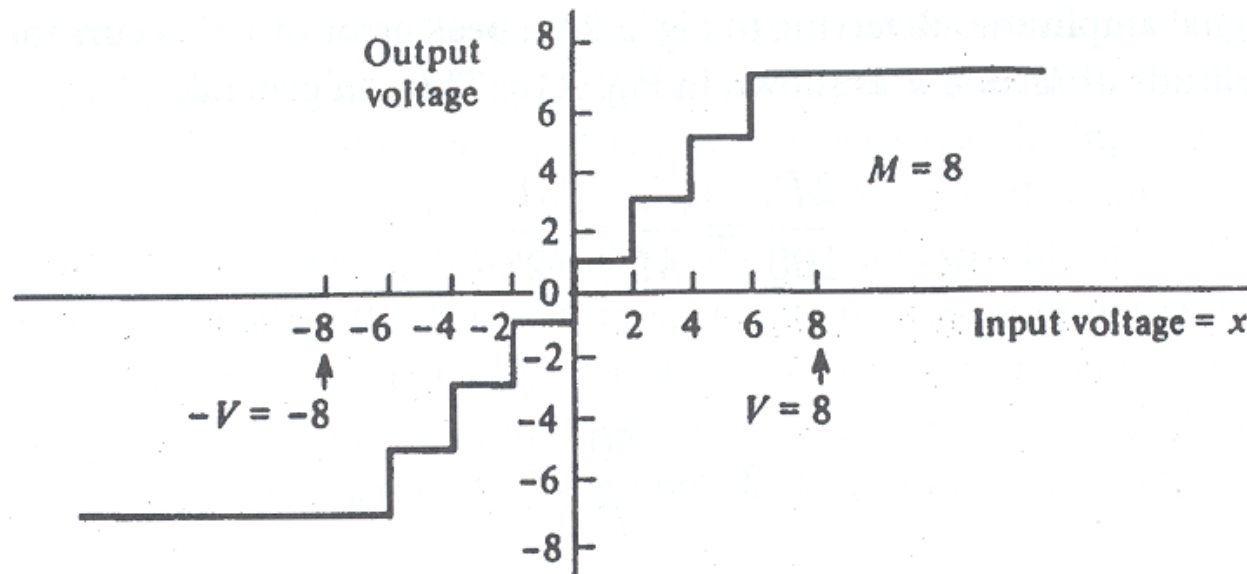
PWM:



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

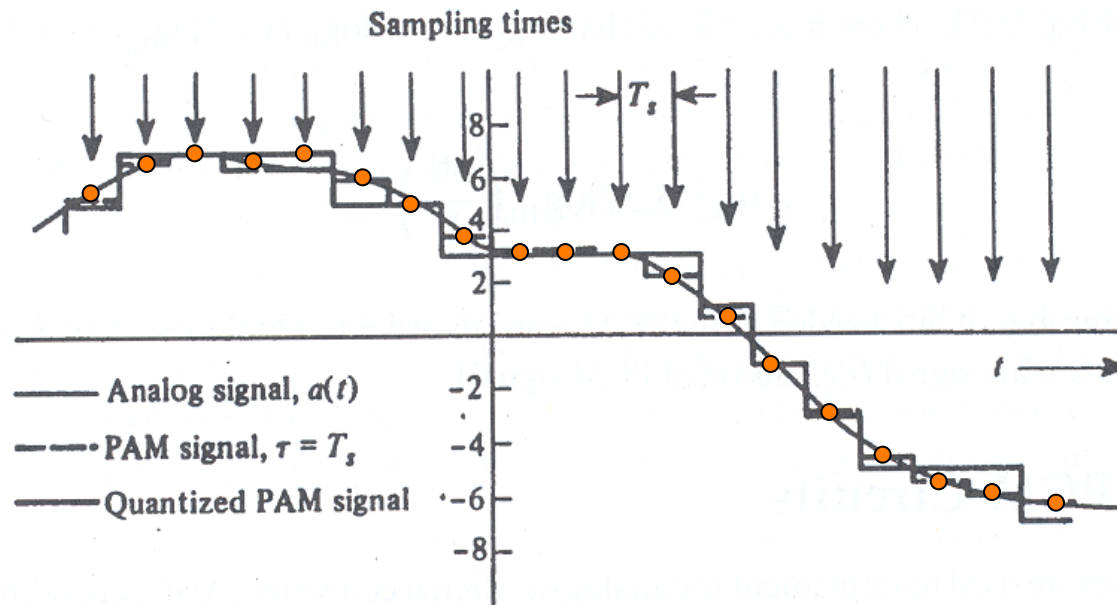
Χαρακτηριστική Κβαντιστή:



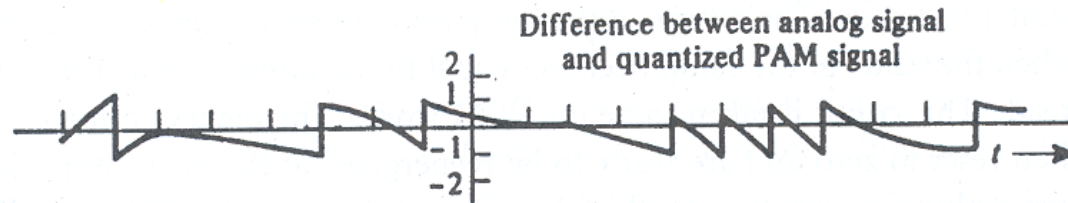
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Αρχικό Σήμα –PAM-QPAM:



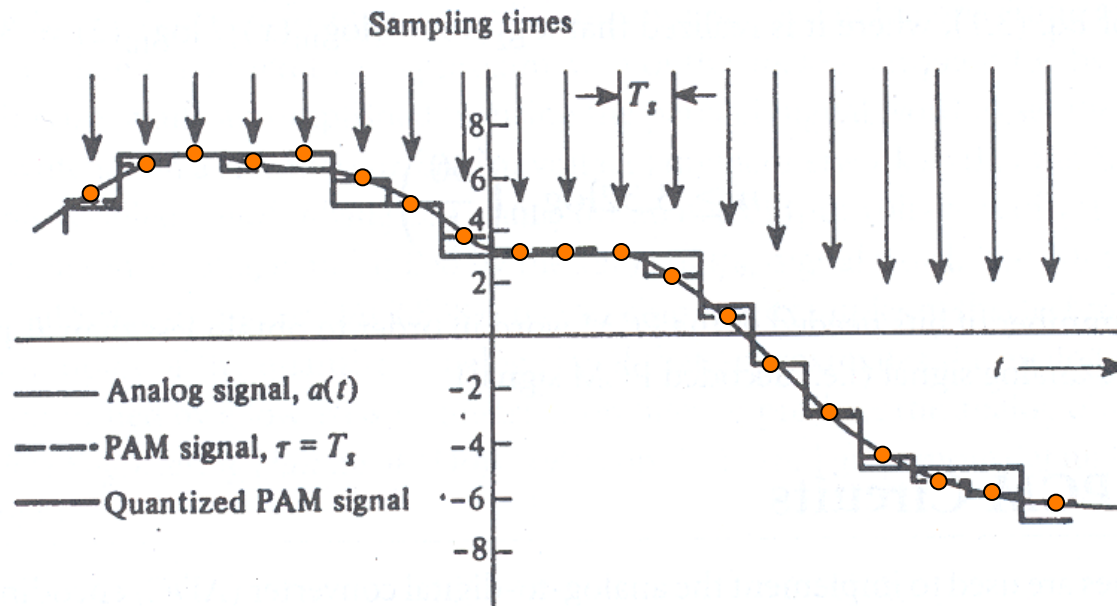
Σφάλμα:



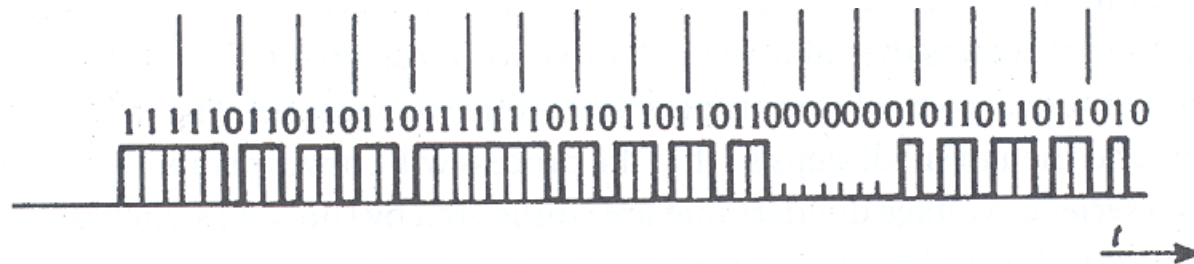
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Αρχικό Σήμα –PAM-QPAM:



Σήμα PCM:



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Προσεγγιστική Ανακατασκευή:



$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \phi\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

όπου $\phi(t)$ μια συνάρτηση πεπερασμένης χρονικής διάρκειας



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Προσεγγιστική Ανακατασκευή με χρήση B-spline:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 1/2, & |t| = 1/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Phi_0(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega/2)}{\Omega/2}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \phi_0(t) * \phi_0(t) \quad \Phi_1(j\Omega) = \Phi_0^2(j\Omega)$$

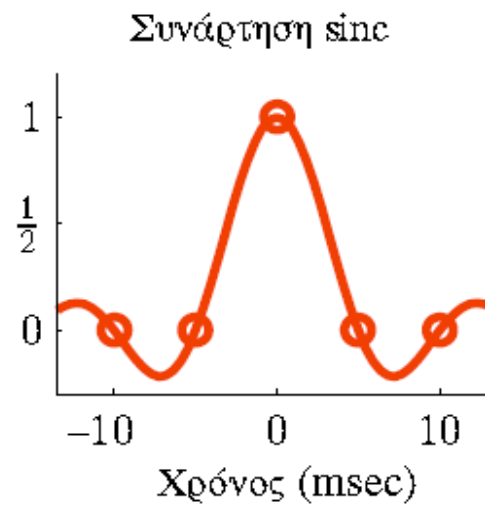
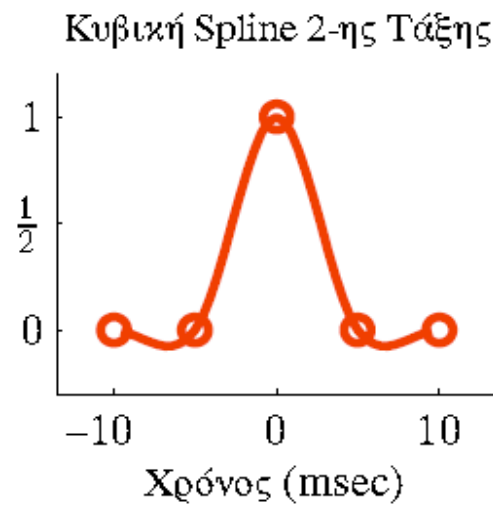
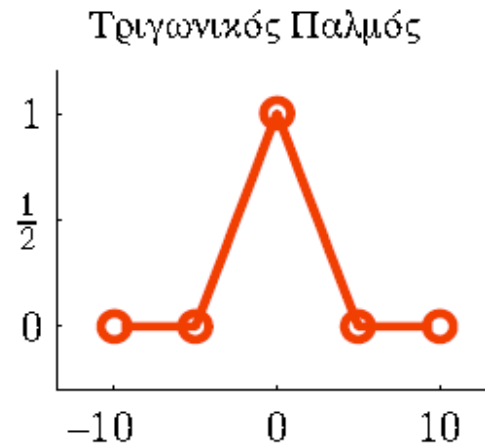
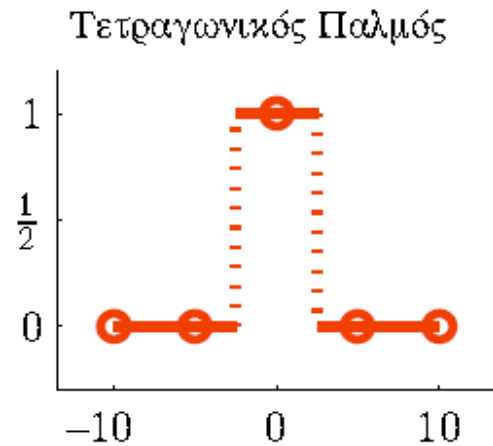
Γενίκευση:

$$\phi_k(t) = \underbrace{\phi_0(t) * \dots * \phi_0(t)}_{k+1}$$

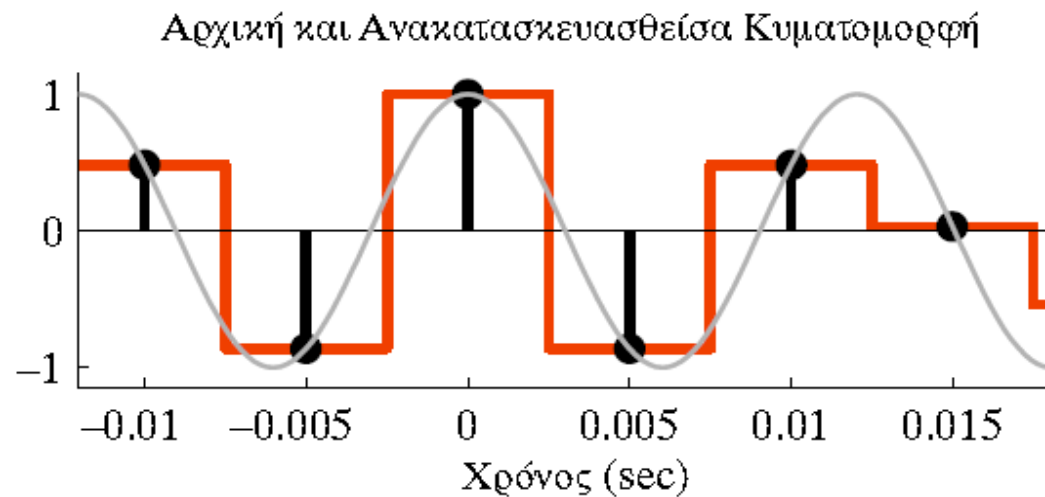
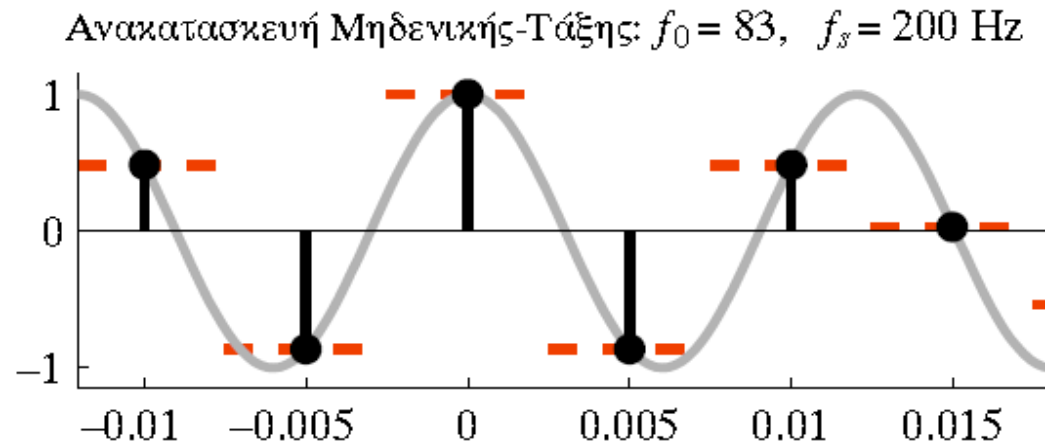
$$\Phi_k(j\Omega) = \Phi_0^{k+1}(j\Omega)$$



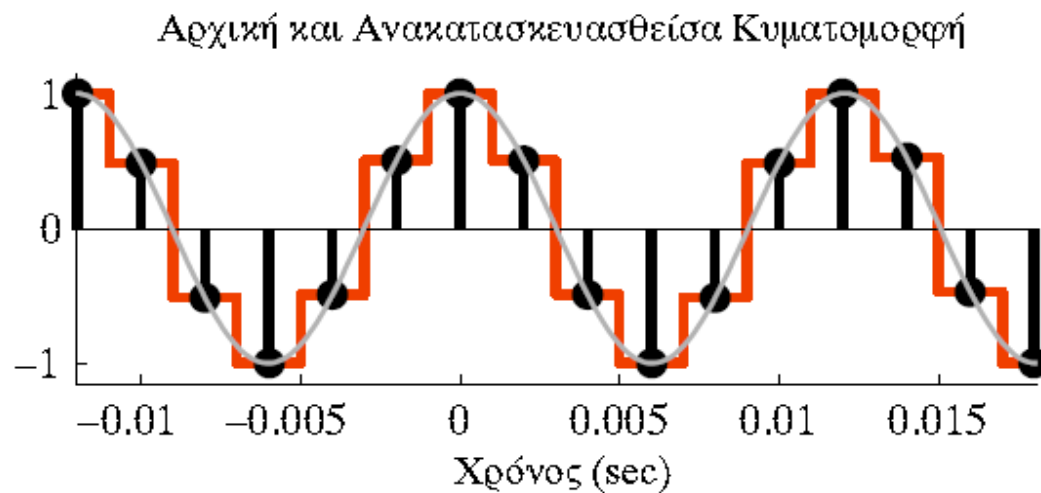
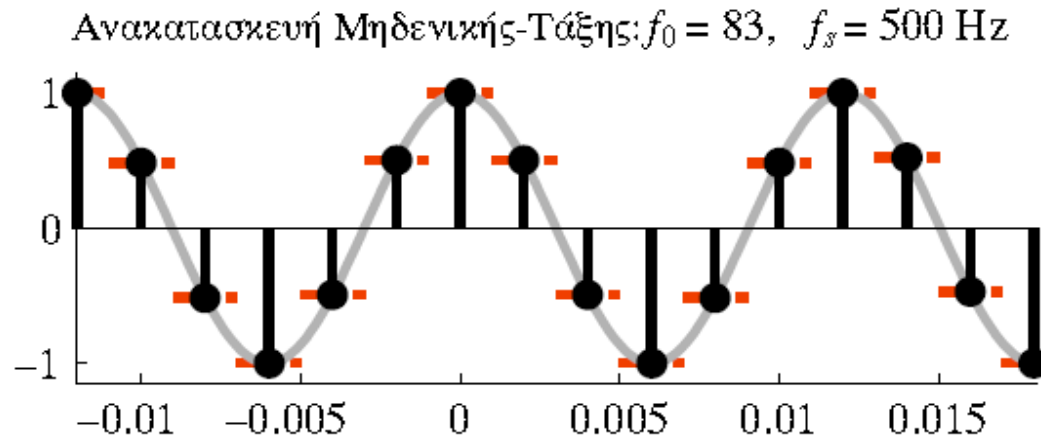
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



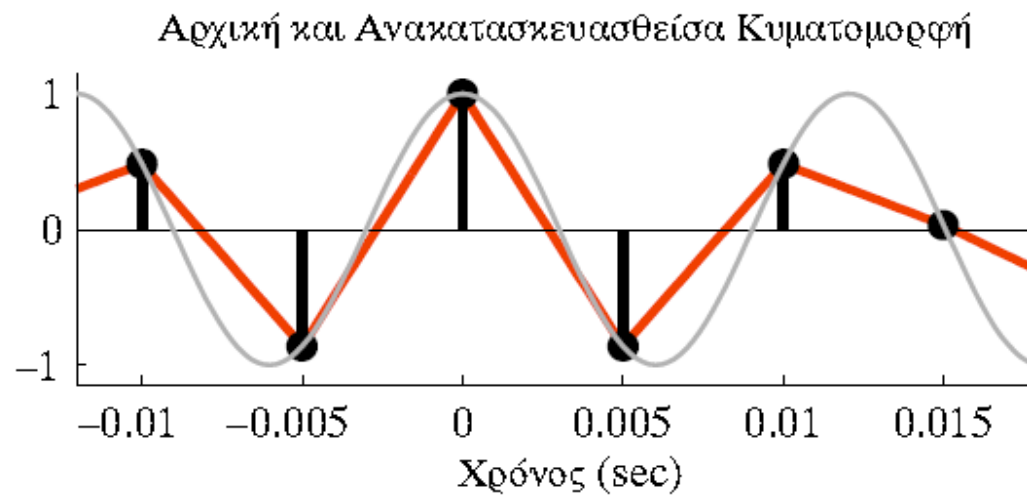
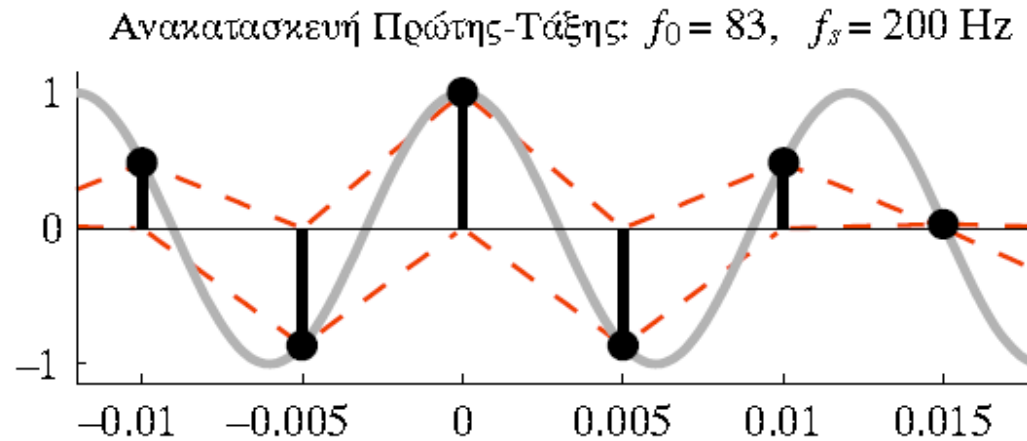
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



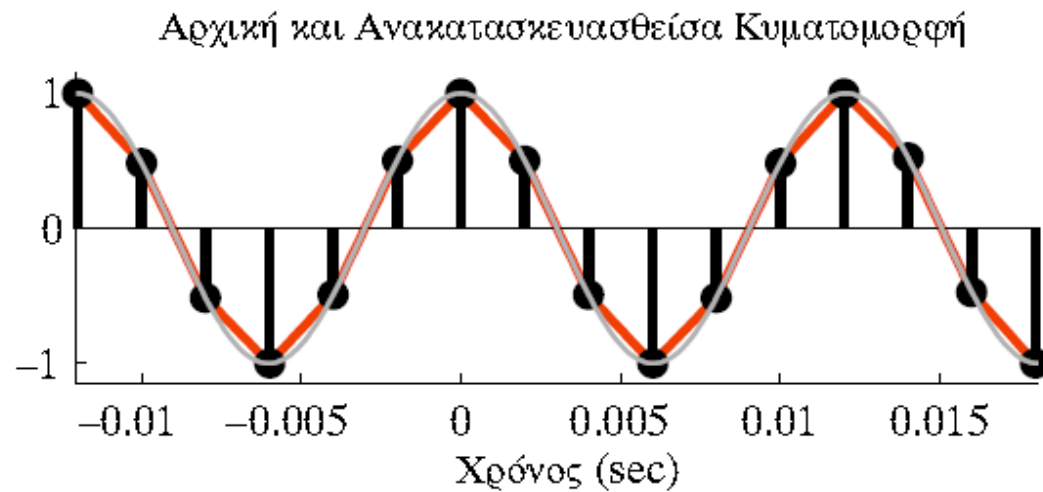
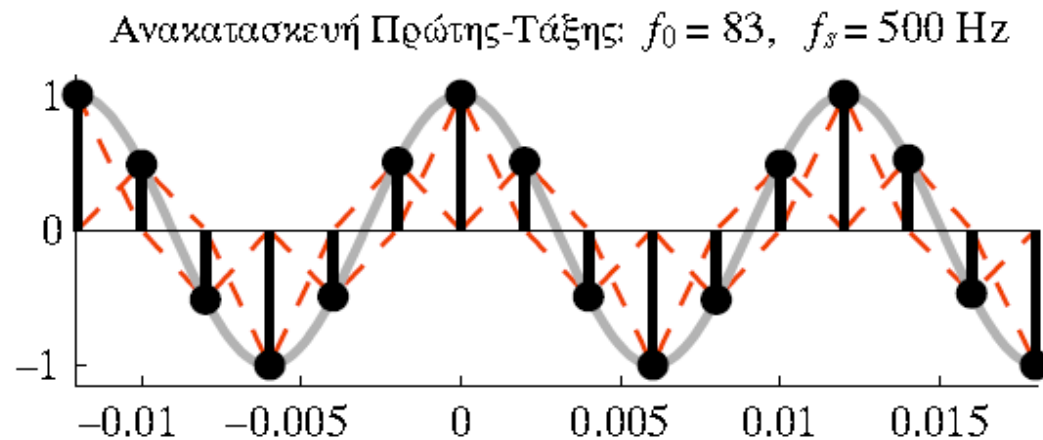
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



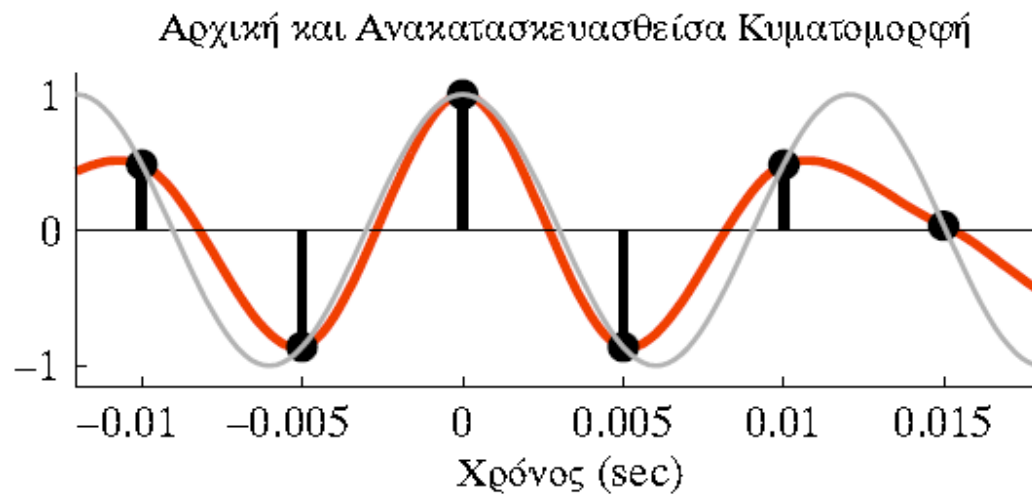
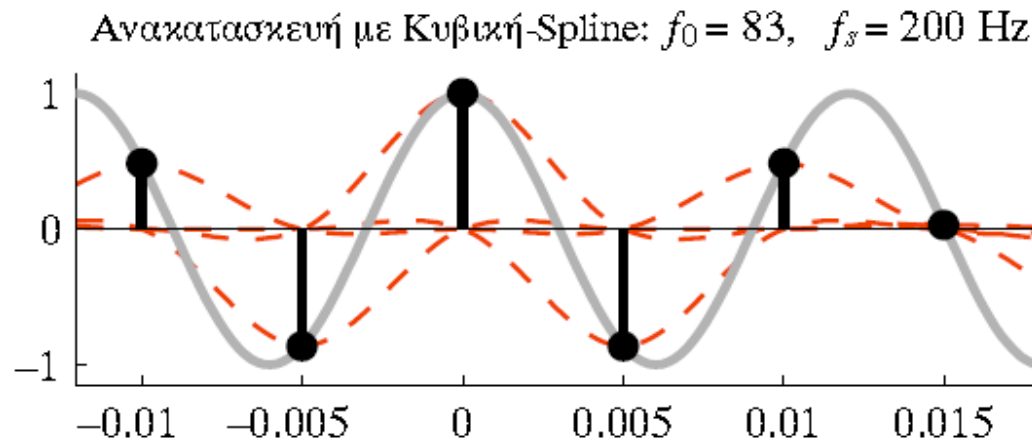
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



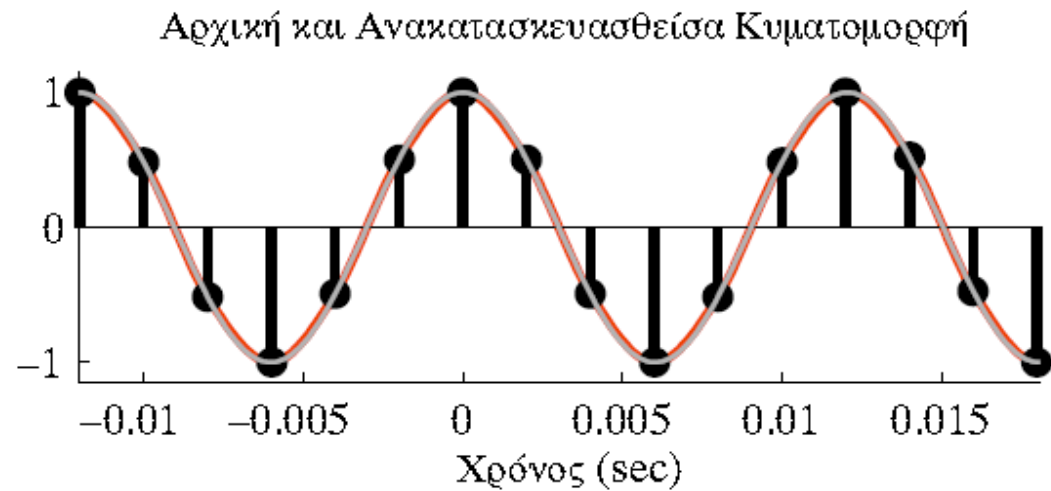
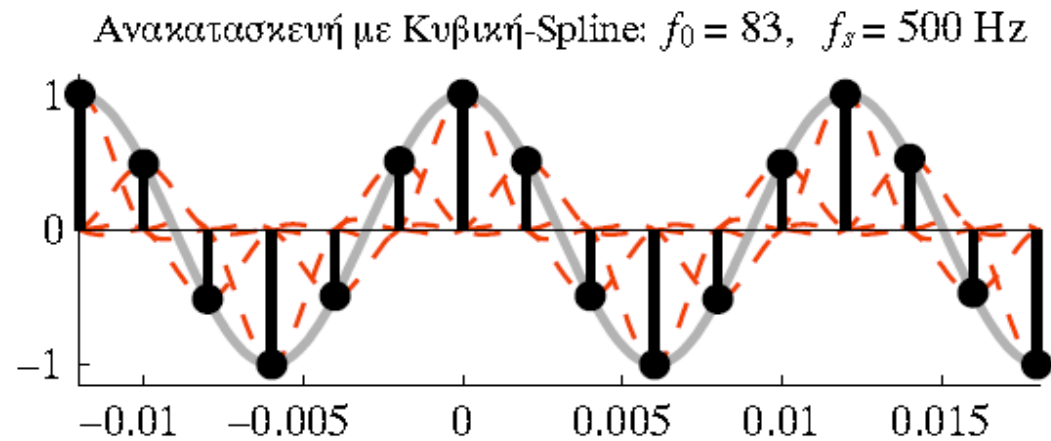
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

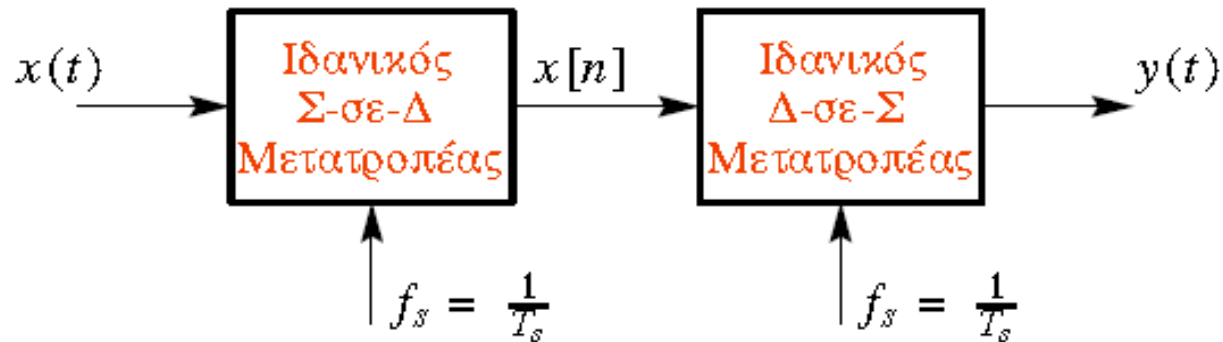


Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Φαινόμενο Ψευδωνυμίας-Αναδίπλωση:



$$x(t) = \cos(\pi f_s t^2)$$

$$x[n] = \cos(\pi n^2 / f_s)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

