ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Μετασχηματισμός Laplace

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μετασχηματισμός Laplace

•Διευρύνει τη κλάση των σημάτων για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

•Παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας.

•Μας δίνει τη δυνατότητα εναλλακτικών τρόπων παράστασης των συστημάτων.

•Μετατροπή των Δ.Ε. σε αλγεβρικές εξισώσεις.

Μετασχηματισμός Laplace

•Ορισμός: $$L_a\{x(t)\} = X(s) = \int_a^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \;\; s = \sigma + j\Omega$$

•Αν α=-∞, τότε έχουμε τον Αμφίπλευρο Μετασχηματισμό Laplace

•Αν α=±0, τότε έχουμε το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace

Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, \;\; s = \sigma + j\Omega$$

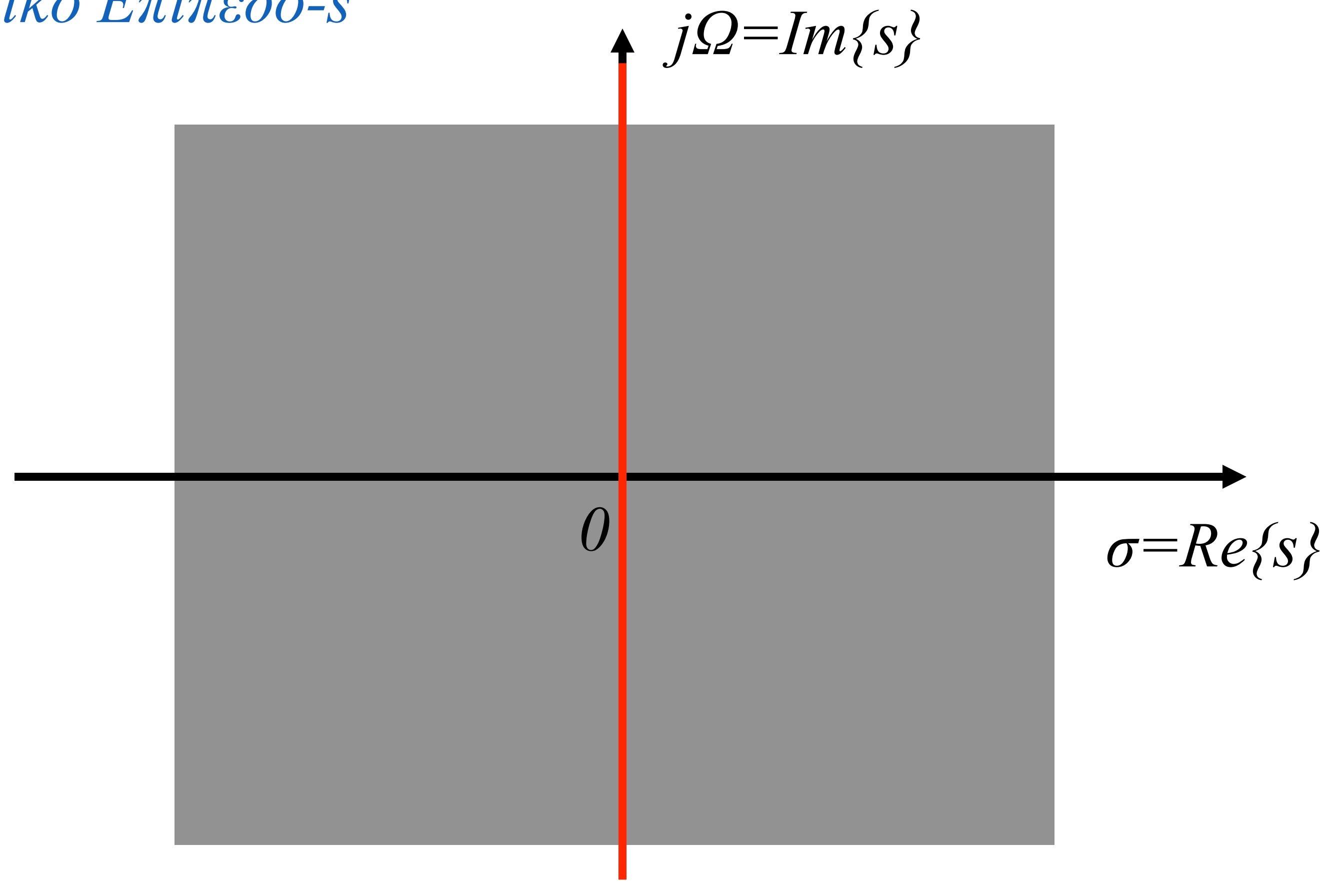
•Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

$$X(s)\Big|_{s=j\Omega} = F\{x(t)\} = X(j\Omega)$$

$$X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού:

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}$$

Τι συμβαίνει; .... Υπάρχει Λάθος;

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού:

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$$

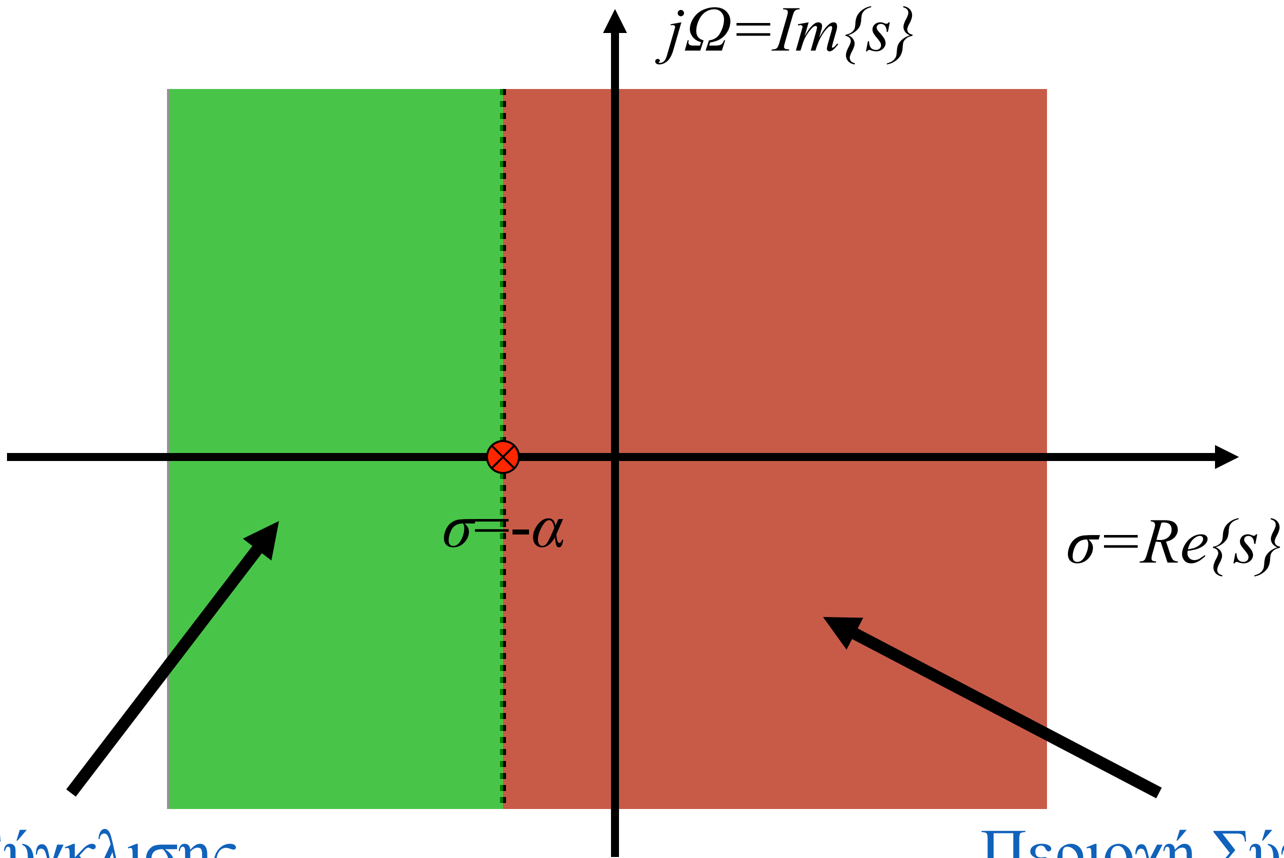
Μετασχηματισμός Laplace

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Μιγαδικό Επίπεδο-s

$$x_1(t) = e^{-at}u(t)$$

⊗ *Πόλος*



Περιοχή Σύγκλισης
$X_2(s)=L\{x_2(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}<-\alpha$

Περιοχή Σύγκλισης
$X_1(s)=L\{x_1(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-\alpha$

Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά Εκθετικά Σήματα: $x(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$

$$x(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

όπου: $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ και $x_2(t) = e^{-t}u(t)$

Όμως:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

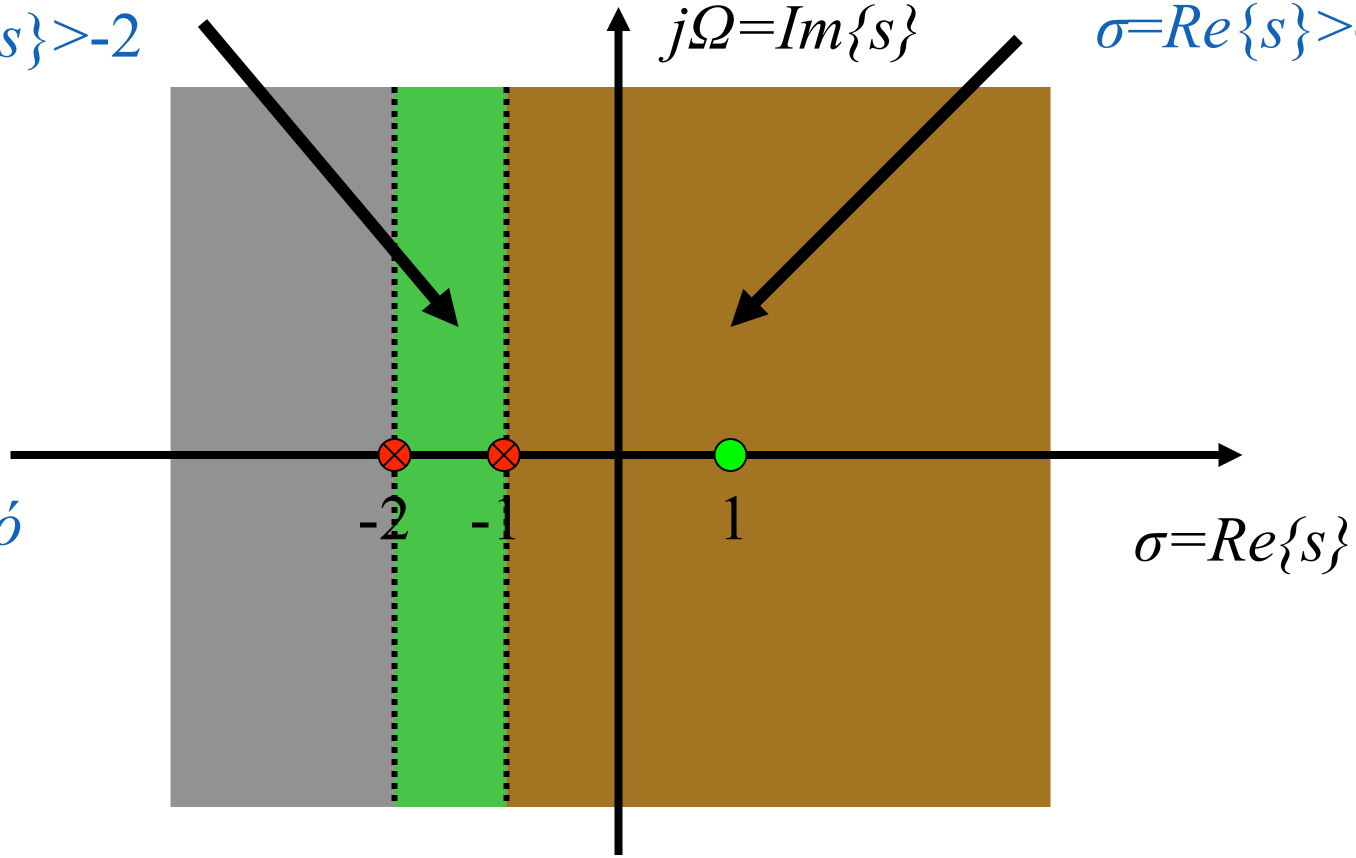
$$X(s) = 3X_1(s) - 2X_1(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης
$X_1(s)=L\{x_1(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-2$

Μιγαδικό Επίπεδο-s

Περιοχή Σύγκλισης
$X(s)=L\{x(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-1$



⊗ *Πόλος*

● *Μηδενικό*

Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά & Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα:

$$x(t) = (3e^{-2t} + \cos(3t)e^{-t})u(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t)$$

όπου:

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-(1-3j)t}u(t)$$

$$x_3(t) = e^{-(1+3j)t}u(t)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Πραγματικά & Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: (*Συνέχεια*)

Όμως:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

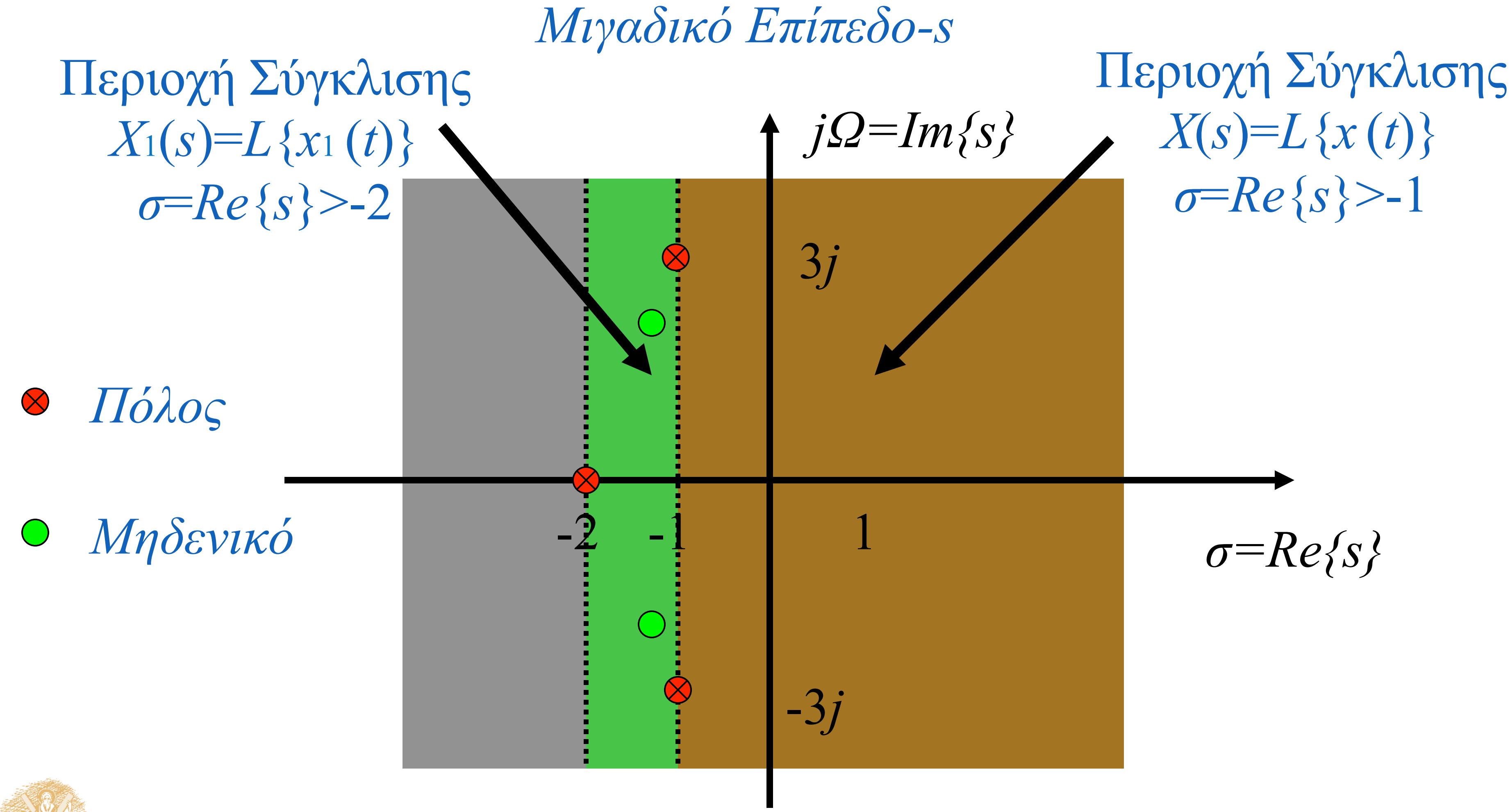
$$X_3(s) = \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

$$X(s) = X_1(s) + \frac{1}{2}X_2(s) + \frac{1}{2}X_3(s)$$

$$= \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}, \ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Κρουστικά Σήματα: $$x(t) = \delta(t) + (\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t})u(t)$$

$$x(t) = x_1(t) - \frac{4}{3}x_2(t) + \frac{1}{3}x_3(t)$$

όπου:

$$x_1(t) = \delta(t)$$

$$x_2(t) = e^{-t}u(t)$$

$$x_3(t) = e^{2t}u(t)$$

Μετασχηματισμός Laplace

Κρουστικά Σήματα: *(Συνέχεια)*

Όμως: $X_1(s) = 1, \quad \forall s$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Γραμμικότητας:

$$X(s) = X_1(s) - \frac{4}{3}X_2(s) + \frac{1}{3}X_3(s)$$

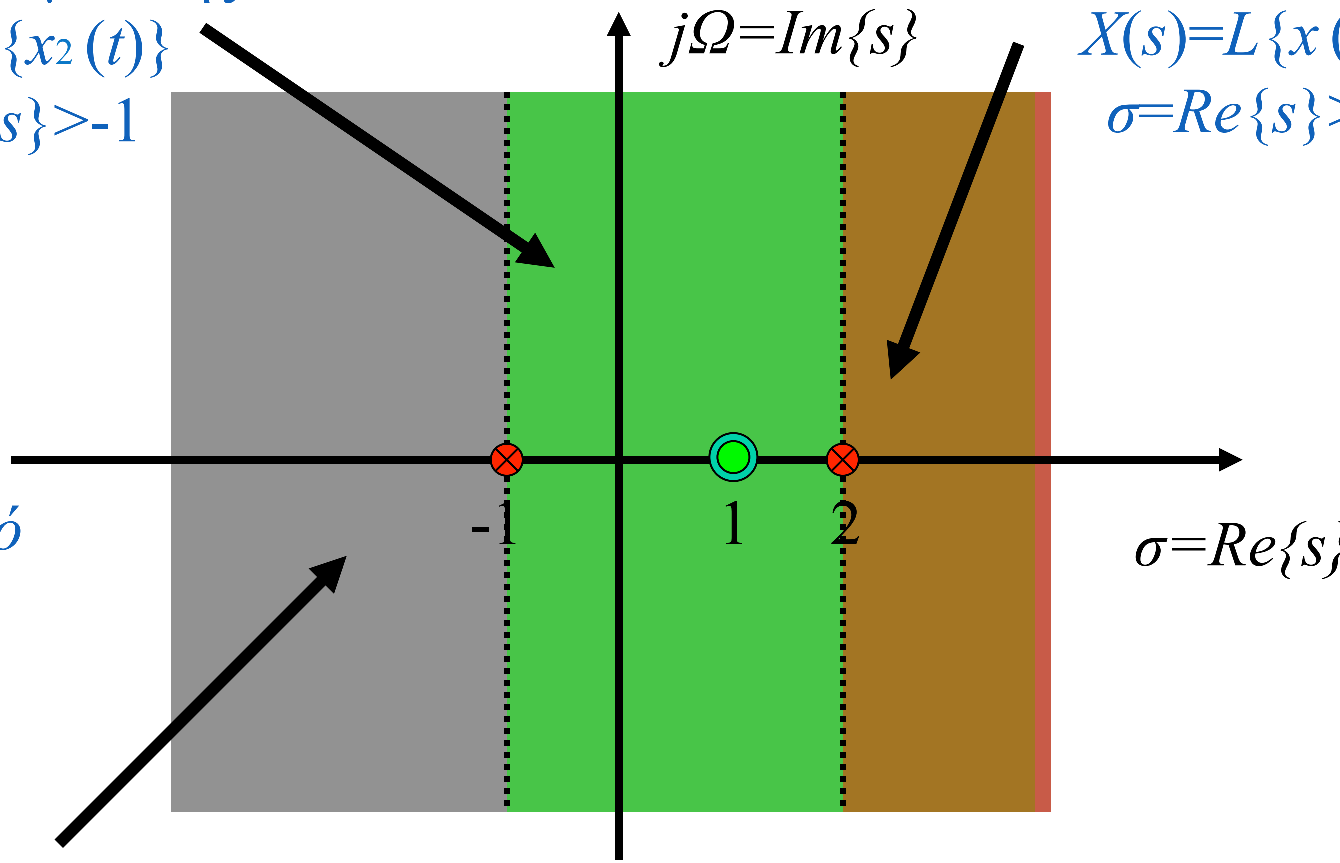
$$= \frac{(s-1)^2}{(s-2)(s+1)}, \ \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s

Περιοχή Σύγκλισης
$X_2(s)=L\{x_2(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>-1$

Περιοχή Σύγκλισης
$X(s)=L\{x(t)\}$
$\sigma=Re\{s\}>2$



⊗ *Πόλος*

● *Μηδενικό*

Περιοχή Σύγκλισης
$X_1(s)=L\{\delta(t)\}$

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

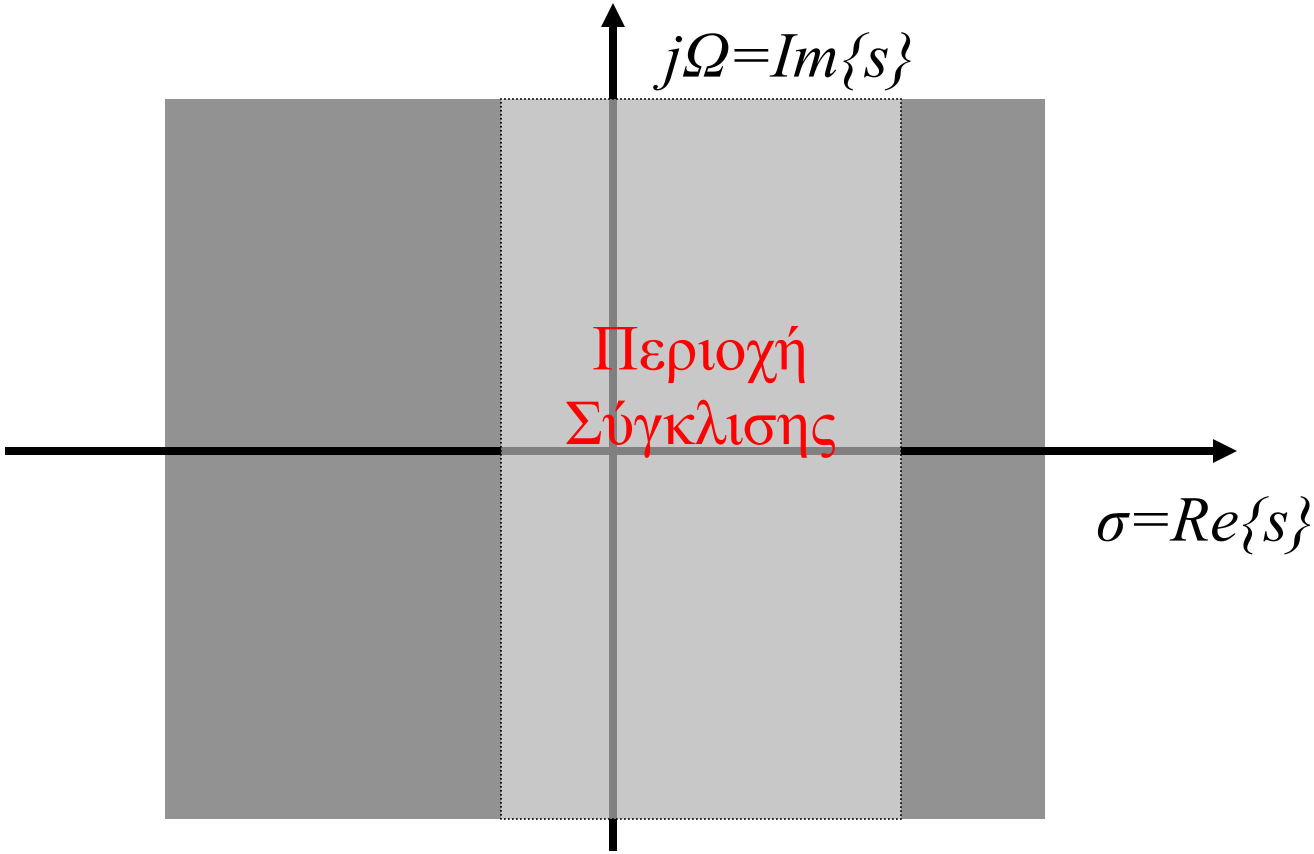
Ιδιότητα 1: Η ΠΣ του $X(s)$ συντίθεται από λωρίδες παράλληλες στον άξονα $-j\Omega$.

- Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης λ αν:

$$\exists M > 0, \lambda, t_0 : | e^{-\lambda t} x(t) | < M , \forall t \geq t_0$$

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



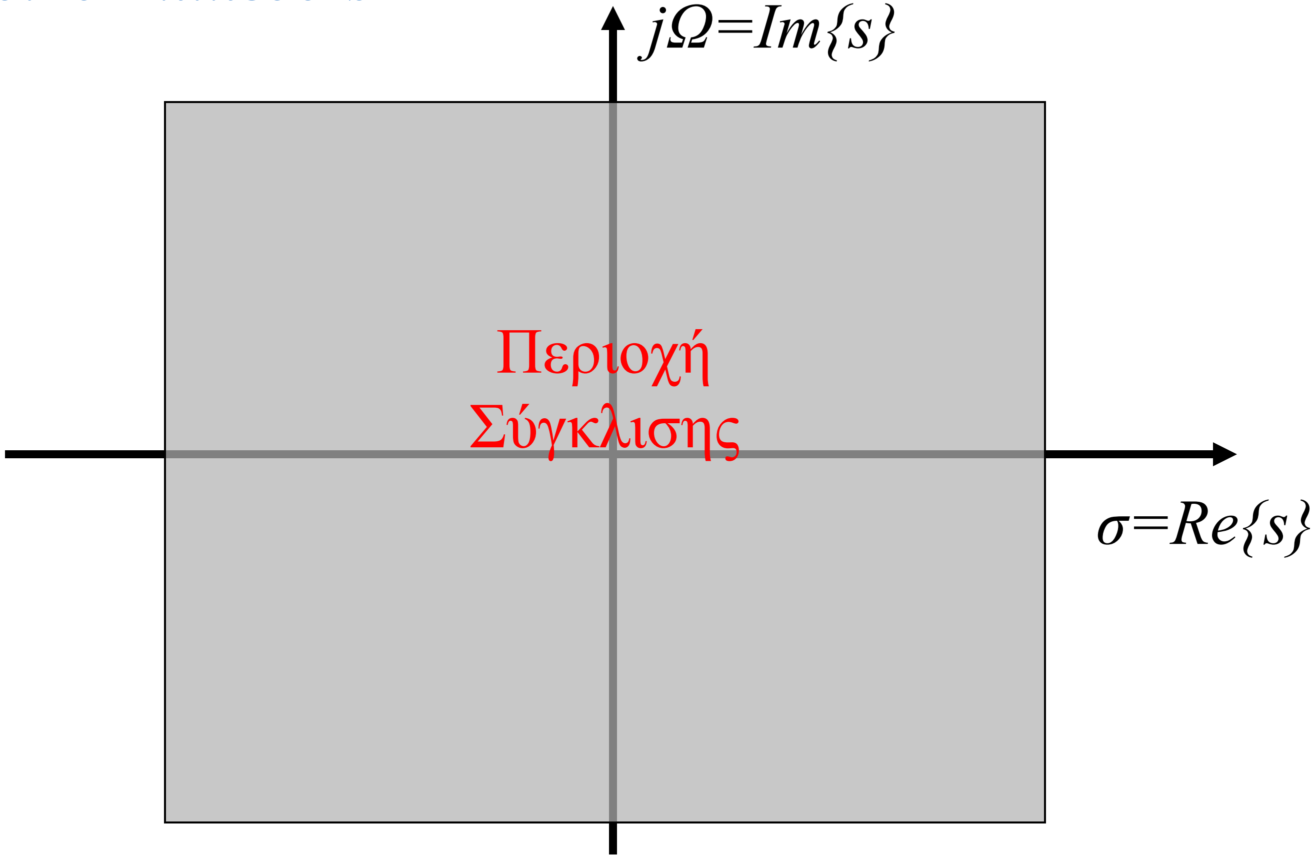
Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 2: Αν το $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και ολοκληρώσιμο (κατ' απόλυτη τιμή), η ΠΣ του $X(s)$ είναι ολόκληρο το επίπεδο-s.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

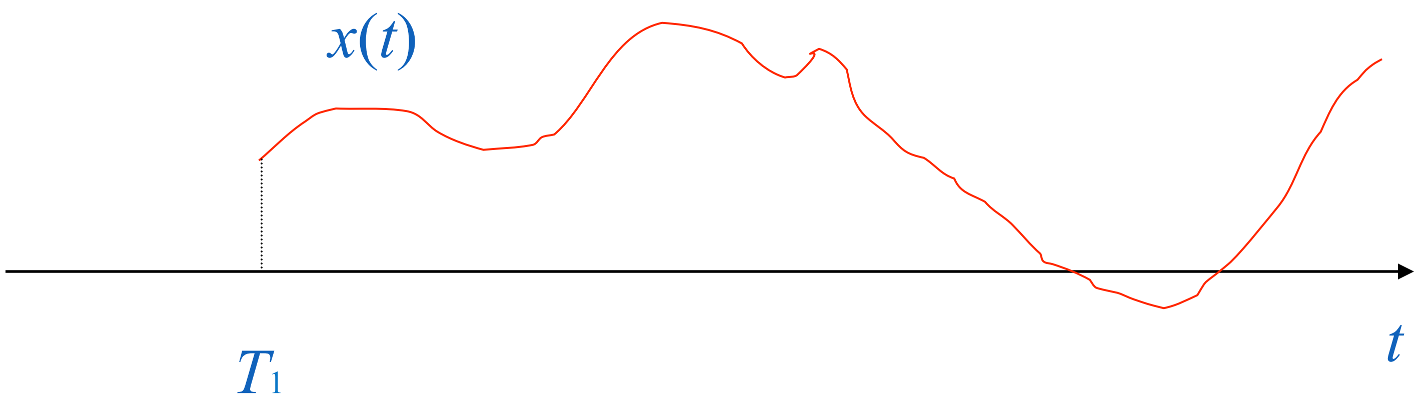
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 3: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα δεξιάς επέκτασης και η ευθεία

$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

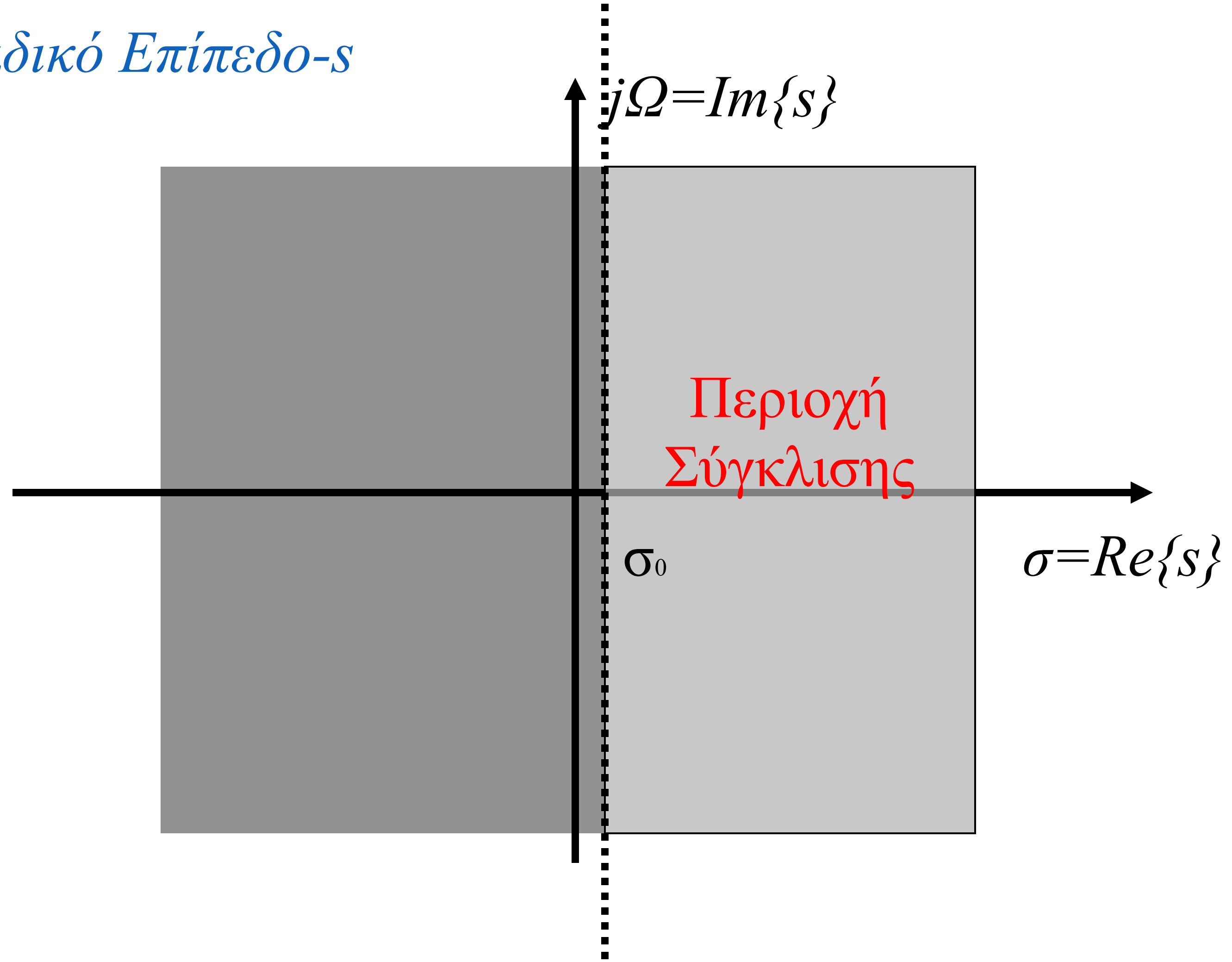
ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



ευθεία $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$

Μετασχηματισμός Laplace

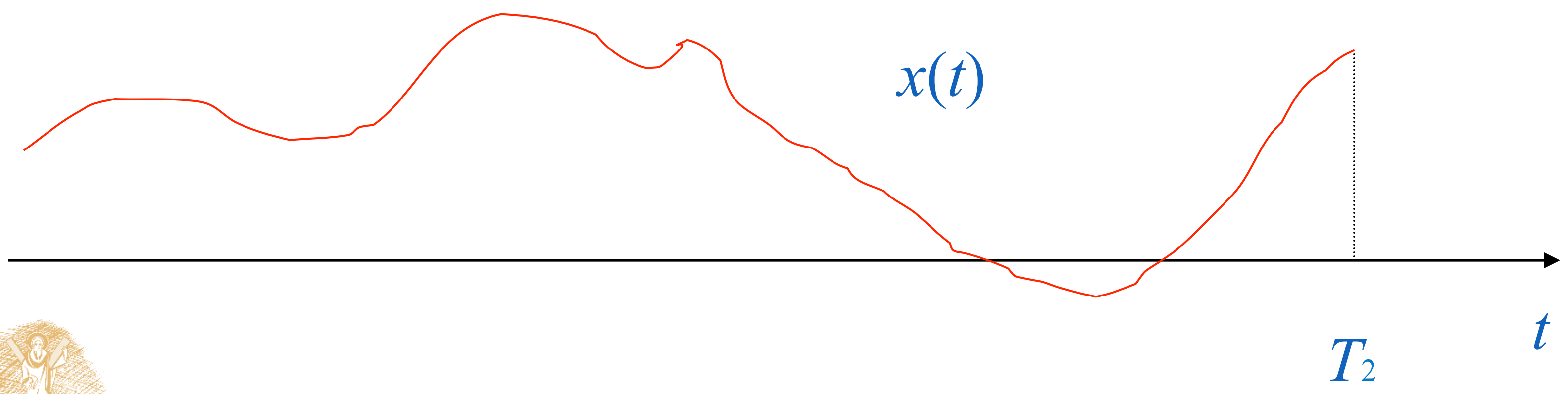
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 4: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αριστερής επέκτασης και η ευθεία:

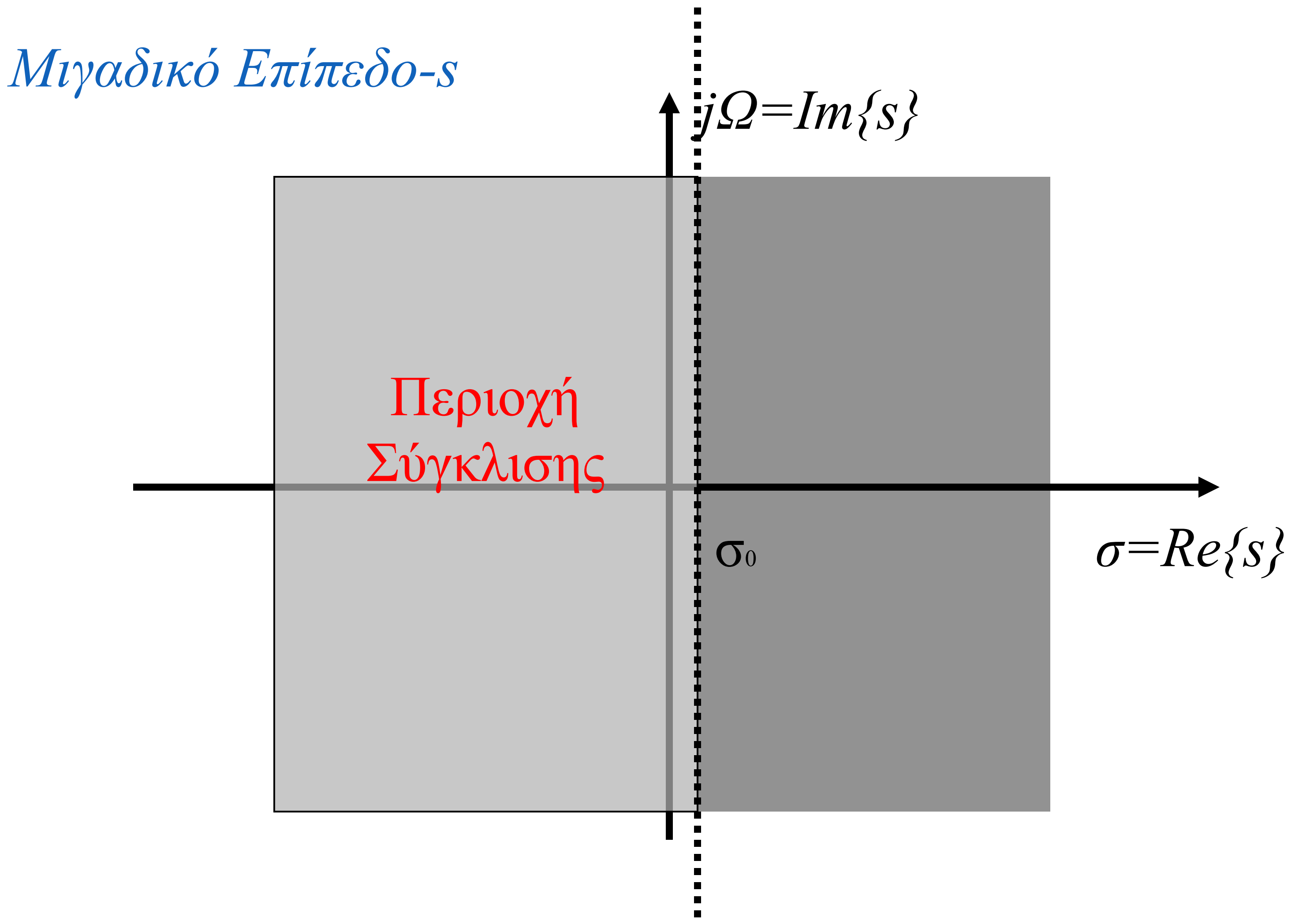
$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



Μετασχηματισμός Laplace



ευθεία $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 5: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αμφίπλευρης επέκτασης και η ευθεία:

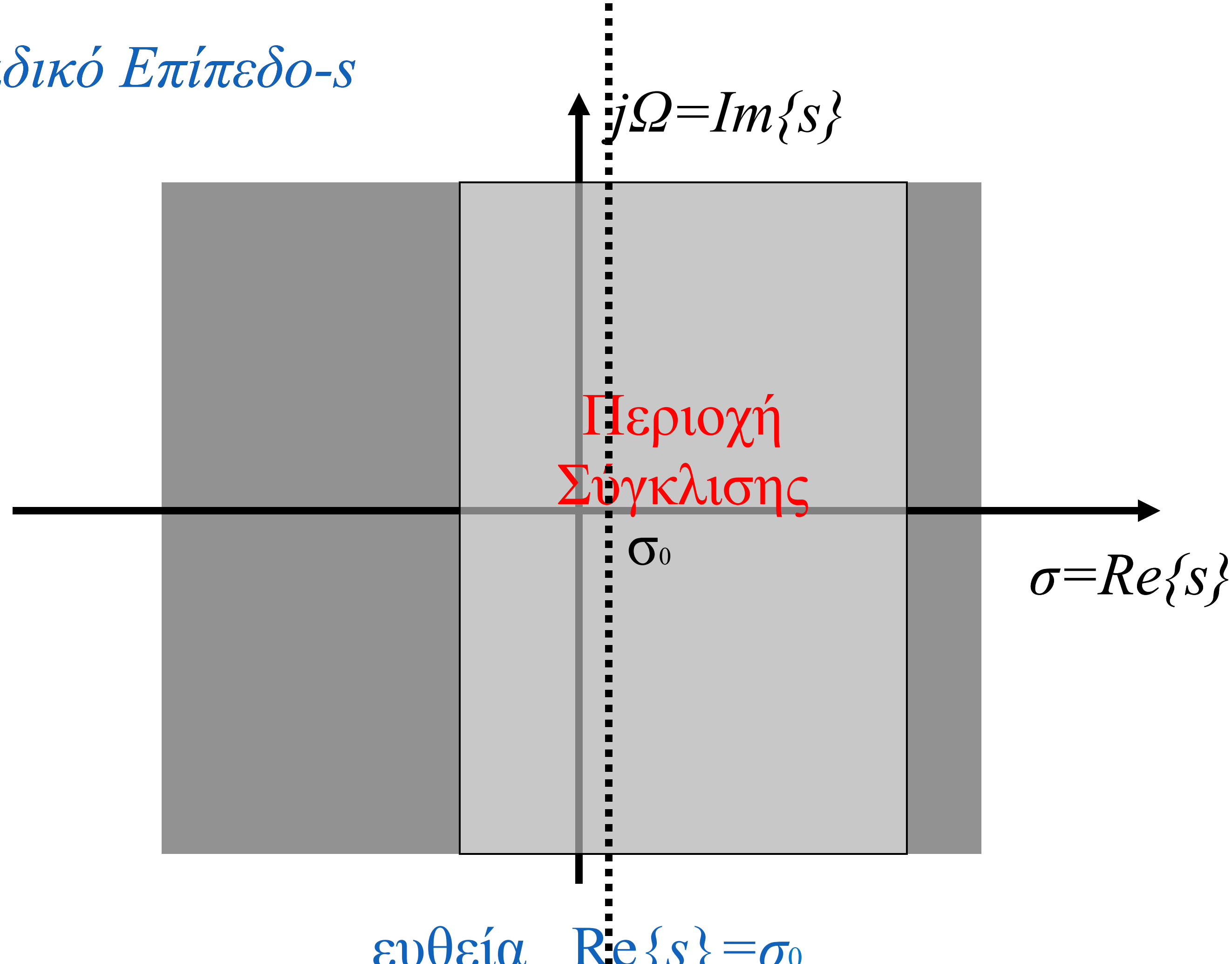
$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

Η ΠΣ θα είναι μια λωρίδα στο επίπεδο- s που θα περιλαμβάνει την ευθεία $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$.

Μετασχηματισμός Laplace

Μιγαδικό Επίπεδο-s



ευθεία $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$

Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού: Μερικές Ιδιότητες

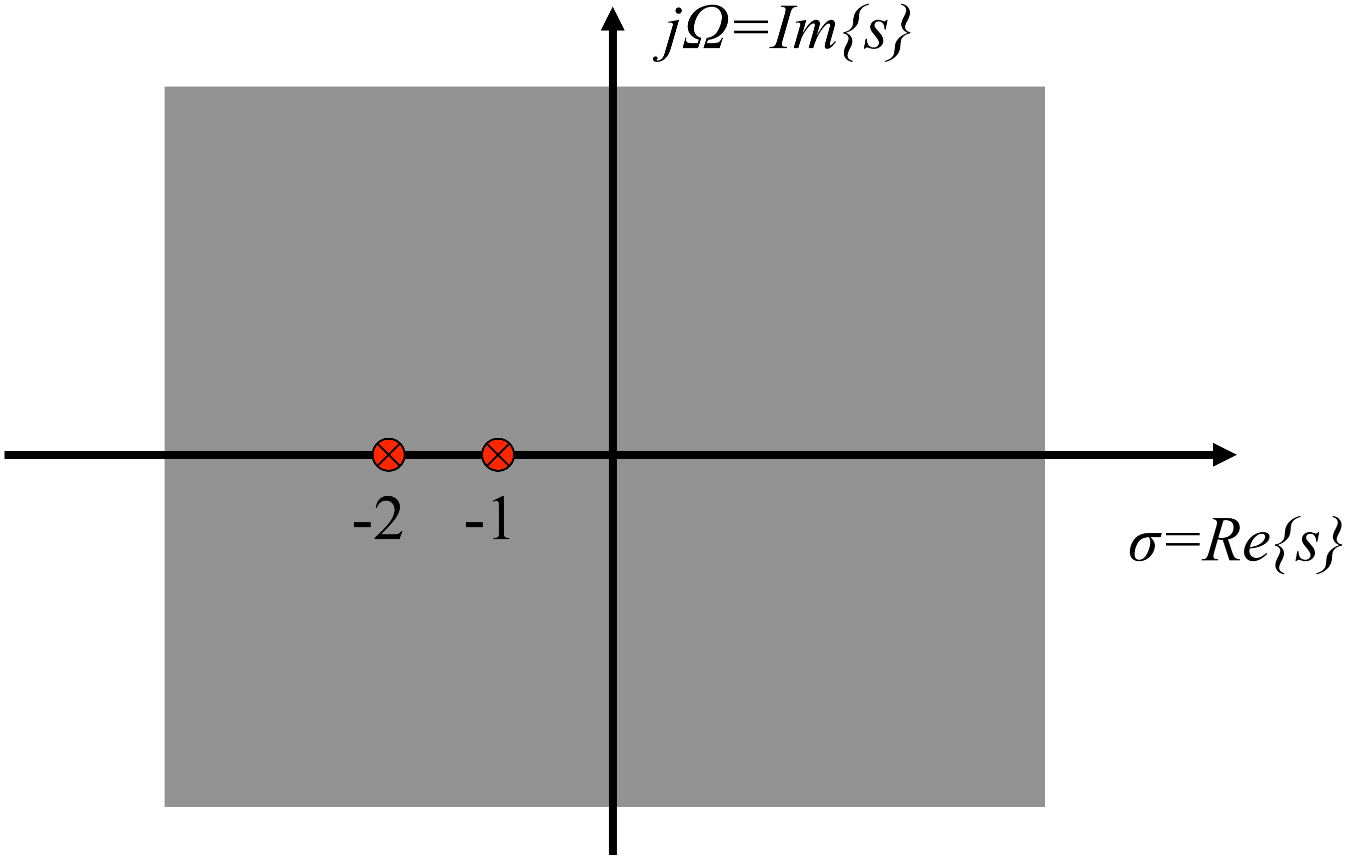
Ιδιότητα 6: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ δεν περιέχει πόλους.

Ιδιότητα 7: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ ή εκτείνεται ως το άπειρο ή περιορίζεται από τους πόλους της.

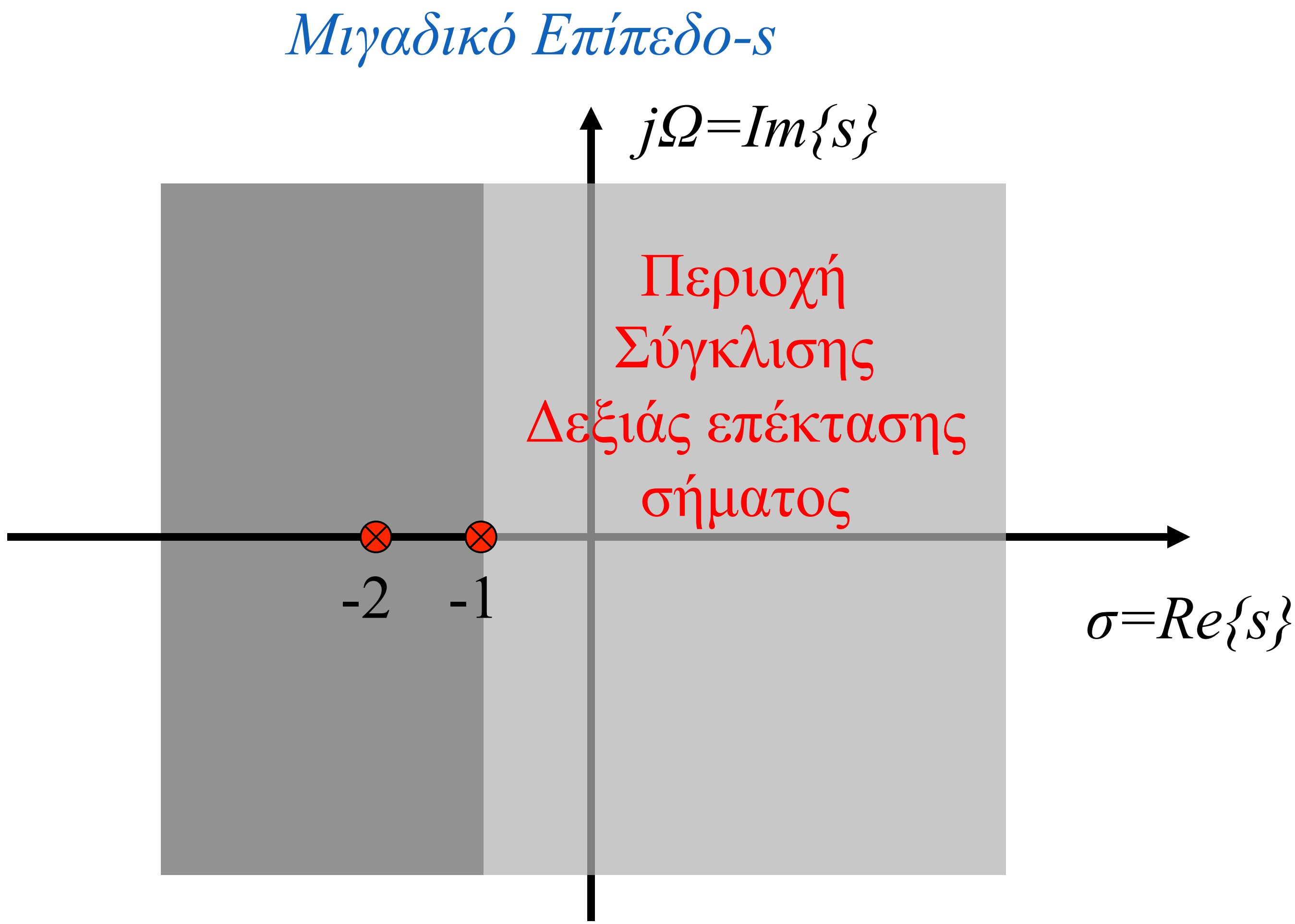
Μετασχηματισμός Laplace

Δίνεται ο Μετασχηματισμός Laplace: $X(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+1)}$

Μιγαδικό Επίπεδο-s



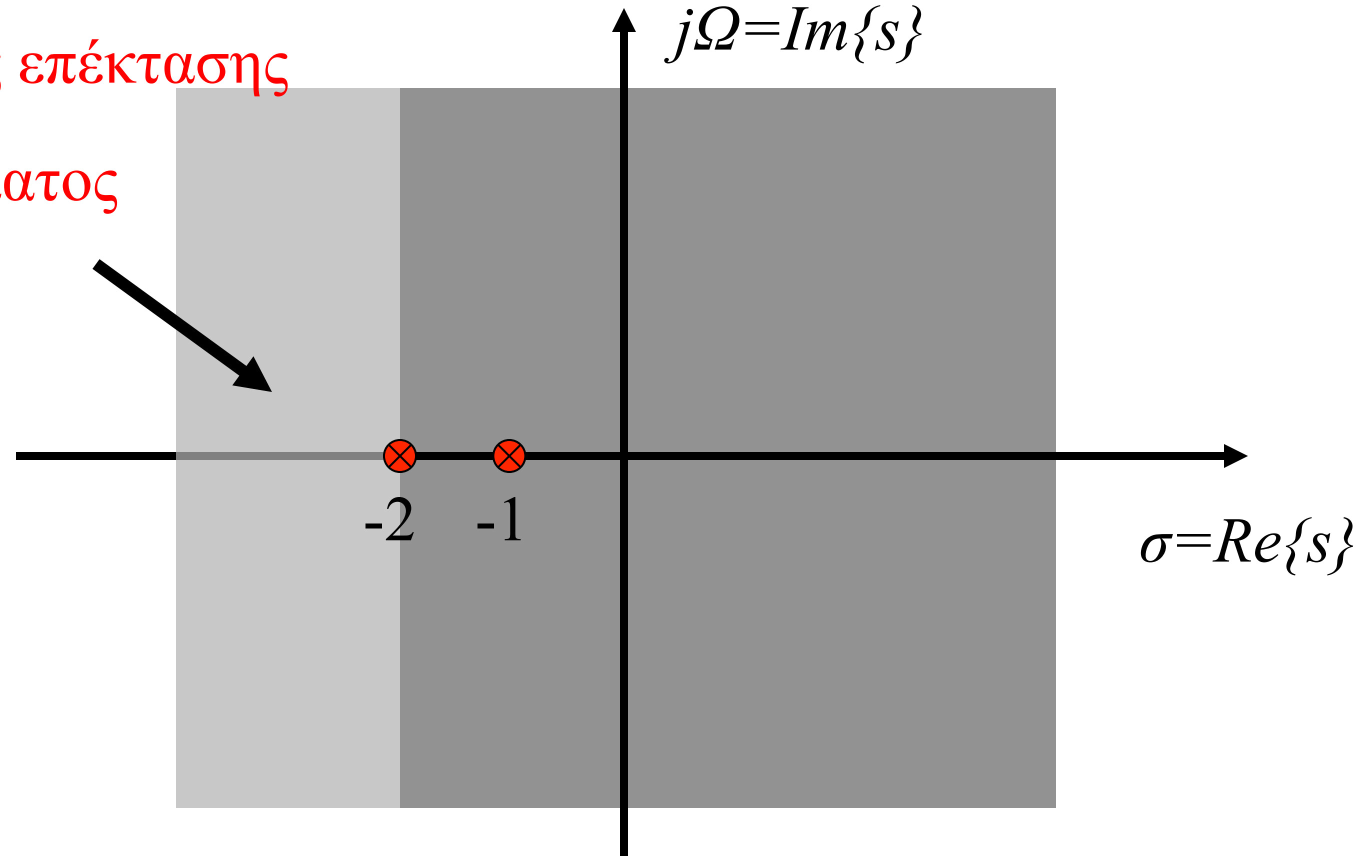
Μετασχηματισμός Laplace



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Αριστερής επέκτασης σήματος

Μιγαδικό Επίπεδο-s



Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης

Μιγαδικό Επίπεδο-s

Αμφίπλευρης
επέκτασης
σήματος