1. Χαρακτηρίστε ως προς την γραμμικότητα και τη ΦΕΦΕ ευστάθεια τα ακόλουθα συστήματα:

$$\begin{aligned} y[n] &= nx[n] \\ y[n] &= r^n x[n], r \in \mathcal{R} \\ y(t) &= x(t)x(t-1) \end{aligned}$$

2. Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]).$$

   (α) Προσδιορίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος και αποδείξετε οτι αυτό είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

   (β) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος και χαρακτηρίστε το από αυτήν.

   (γ) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις *plot()*, *abs()*, *angle()* και *unwrap()* του *MATLAB*).

   (δ) Ποιές συχνότητες του σήματος εισόδου διατηρεί το παραπάνω σύστημα;

3. Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{1}{2}x[n-1].$$

   (α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.

   (β) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (χρησιμοποιήστε πάλι τις συναρτήσεις *plot()*, *abs()*, *angle()* και *unwrap()* του *MATLAB*).

   (γ) Ποιές συχνότητες του σήματος εισόδου διατηρεί το παραπάνω σύστημα;

   (δ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος για την παρακάτω είσοδο

$$x[n] = (cos(\frac{\pi}{4}n) - sin(\frac{\pi}{2}n) + (\frac{-1}{2})^n)u[n].$$

4. Στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \alpha^n u[n],\ 0 < \alpha < 1,$$

   οδηγούμε το σήμα:

$$x[n] = \beta^n(u[n] - u[n-10])$$

   όπου $u[n]$ η βηματική ακολουθία.

   (α) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος.

   (β) Θεωρήστε $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{4}$ και σχεδιάστε το σήμα εισόδου, την κρουστική απόκριση και την έξοδο του συστήματος για το χρονικό διάστημα $0 \leq n \leq 50$.

5. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ιδιάζουσας κατανομής $\delta(t)$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

   (α) η ιδιάζουσα κατανομή $\delta(t)$ είναι άρτια

   (β) $\delta(t) = u^{(1)}(t)$ όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση (γ) αν $tf(t) = tg(t)$ με $f(t),\ g(t)$ κατανομές, τότε $f(t) = g(t) + \lambda\delta(t),\ \lambda \in \mathcal{R}$.

6. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ιδιάζουσας κατανομής $\delta(t)$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + sin(\frac{\pi t}{4}) + 2)\delta(t-4)dt \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t^2-2)}\delta(t+\sqrt{2})dt \\
I_3 &= \int_{0}^{\infty} e^{t^2}\delta(t+2\sqrt{2})dt \\
I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t} sin(4t)\delta^{(2)}(t)dt \\
I_5 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^3+2t+3)(\delta^{(1)}(t-1) + 2\delta^{(2)}(t-2))dt \\
I_6 &= \int_{0}^{2} e^{2t}\delta(2t-3)dt.
\end{aligned}$$

7. Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t-3) - e^{-7(t-3)}u(t-3).$$

(α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

(β) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (χρησιμοποιήστε τις γνωστές συναρτήσεις *plot()*, *abs()*, *angle()* και *unwrap()* του *MATLAB*).

(γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο το σήμα

$$x(t) = 7 + 7cos(2t + \frac{\pi}{2}),$$

(γ.1) θεωρητικά και

(γ.2) χρησιμοποιώντας την συνάρτηση *int()*[2] του περιβάλλοντος *Symbolic Math*[3] του *MATLAB*[4].

Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

8. Υποθέστε ότι οι αριθμοί $x_i,\ i = 1, 2$ εκφράζονται σε αριθμητικό σύστημα βάσης B ως ακολούθως

$$x_i = \sum_{n=0}^{N-1} d_i(n)B^n,\ i = 1,\ 2.$$

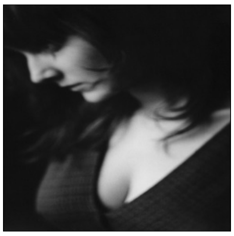
Εκφράστε τους συντελεστές του γινομένου των δύο αριθμών και προτείνετε τρόπο υπολογισμού τους. Υλοποιήστε τον αλγόριθμό σας στο *MATLAB*.

---

[2] Η συνάρτηση υπολογίζει το αόριστο (ορισμένο) ολοκλήρωμα του σήματος $x(t)$ ως προς τη συμβολική μεταβλητή t αν δεν ορίζεται (ορίζεται) το διάστημα ολοκλήρωσής της. Για να δηλώσουμε την μεταβλητή t ως συμβολική αρκεί να γράψουμε *sym('t')* ή *syms t* στη γραμμή εντολών.

[3] Ενδιαφέρουσες (και πολλές φορές πολύ χρήσιμες) είναι και οι συναρτήσεις *pretty()*, *symplify()*, *limit()* και *subs()*. Καταννοήστε την λειτουργία τους.

[4] Γράφοντας στη γραμμή εντολών του *MATLAB help* και το όνομα μιας συνάρτησης, εργαλειοθήκης, κλπ., μας επιστρέφει σχετικές πληροφορίες για την αντίστοιχη συνάρτηση, εργαλειοθήκη



(α)

(β)

9. Υποθέστε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο των παρακάτω ρητών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{3z^{-2}+22z^{-1}+27}{z^{-4}+5z^{-3}+13z^{-2}+19z^{-1}+10} \\ H_2(z) &= \frac{3z^{-6}+16z^{-5}+53z^{-4}+38z^{-3}-55z^{-2}-10z^{-1}+13}{z^{-5}+6z^{-4}+22z^{-3}+30z^{-2}+13z^{-1}}. \end{aligned}$$

Πώς μπορούμε να πετύχουμε το σκοπό μας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *conv()* του *MATLAB*; Με τι ορίσματα θα πρέπει να την καλέσουμε και πόσες φορές;

10. Θεωρήστε το σύστημα διακριτού χρόνου με την ακόλουθη κρουστική απόκριση:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε (θεωρητικά και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *freqz()*) και σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. Χαρακτηρίστε την λειτουργία του.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *imread()* του *MATLAB* φορτώστε την εικόνα *photo.jpg* (Εικόνα (α) του σχήματος) στην μεταβλητή I και δείτε την χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *imagesc()*.

(γ) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη συνάρτηση *filter()* δημιουργήστε μια συνάρτηση που θα υπολογίζει (προσεγγιστικά) και θα επιδεικνύει τις ακόλουθες ποσότητες:

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial I(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Ποιά η φυσική σημασία των παραπάνω ποσοτήτων; Ορίστε νέες ποσότητες, βασιζόμενες σε αυτές, που θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν περιοχές (ή μεμονωμένα σημεία της εικόνας).

(δ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *filter2()* του *MATLAB* δείτε και χαρακτηρίστε την επίδραση του διδιάστατου ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(n_1,n_2) = \begin{cases} (2N+1)^{-2} & 0 \le n_1 \le 2N,\ 0 \le n_2 \le 2N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

στην εικόνα. Δοκιμάστε διάφορες τιμές του N. Δικαιολογήστε τα αποτελέσματά σας.

(ϵ) Επαναλάβετε τα του Ερωτήματος (δ) στην εικόνα *photo-deg.jpg* (Εικόνα (β) του σχήματος) η οποία έχει υποβαθμιστεί από κρουστικό θόρυβο (γνωστός ως *salt and peper noise*). Καταγράψτε τα σχόλιά σας.

($\sigma\tau$) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *medfilt2()* του *MATLAB* δείτε και χαρακτηρίστε την επίδραση, στην παραπάνω εικόνα, του ακόλουθου διδιάστατου συστήματος[5]

$$I(n_1, n_2) = median(I(n, m)),\ n_1 - N \leq n \leq n_1 + N,\ n_2 - N \leq m \leq n_2 + N.$$

Δοκιμάστε[6] διαφορετικές τιμές του N. Δικαιολογήστε τα αποτελέσματά σας.

11. Θεωρήστε το ακόλουθο αριθμήσιμο σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων:

$$\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{N},\ t \in \mathcal{I} \subset \mathcal{R}.$$

Κατασκευάστε ένα ¨ορθοκανονικό¨ σύνολο που θα βασίζεται στο παραπάνω και το οποίο θα περιγράφει τον ίδιο χώρο συναρτήσεων με αυτό.

12. Θεωρήστε ότι θέλετε να σχεδιάσετε ένα σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο θα διορθώνει παραμόρφωση ηχούς που προκλήθηκε κατά τη μετάδοση των δεδομένων που εκφράζονται από το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$. Υποθέστε ότι η παραπάνω παραμόρφωση εκφράζεται από τον όρο $\alpha x[n-1]$ και εμφανίζεται προσθετικά στην έξοδο του συστήματος, δηλαδή:

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1],\ \alpha \in \mathcal{R}.$$

Προσδιορίστε ένα αιτιατό αντίστροφο σύστημα το οποίο θα ανακτά τα δεδομένα $x[n]$ από το σήμα $y[n]$ και αναφέρετε κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορεί να επιτευχθεί αυτό.

13. Με τη βοήθεια της συνάρτησης *wavrecord()*[7] του *MATLAB*, δημιουργήστε ένα σήμα ομιλίας της αρεσκείας σας.

(α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *wavplay()* του *MATLAB*, μπορείτε να ακούσετε το σήμα σας. Ακούστε το σήμα σας χρησιμοποιώντας μια τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας:

(α.1) μεγαλύτερη από αυτήν που χρησιμοποιήσατε κατά την καταγραφή του σηματος σας και

(α.2) μικρότερη από αυτήν που χρησιμοποιήσατε κατά την καταγραφή του σηματος σας.

Δικαιολογήστε τα ακουστικά αποτελέσματα του πειράματός σας.

(β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες διαμόρφωσης και συχνοτικής ολίσθησης του Μετασχηματισμού *Fourier*, υλοποιήστε ένα στοιχειώδες σύστημα ¨πομπούδέκτη¨ στο οποίο θα εκπέμπεται ταυτόχρονα το ίδιο σήμα σε ¨δέκτες¨ που συντονίζονται σε διαφορετικές συχνότητες.

[5] Το σύστημα αυτό ονομάζεται φίλτρο ενδιάμεσης τιμής (*median filter*) και έχει την δυνατότητα να αποκόπτει τον κρουστικό θόρυβο και να διατηρεί τις απότομες αλλαγές του σήματος. Ανήκει σε μια μεγάλη κατηγορία μηγραμμικών συστημάτων (αποδείξετε το) που είναι γνωστά ως φίλτρα ταξινομημένων δειγμάτων (*order statistics*).

[6] Η ενδιάμεση τιμή (median) ενός καταλόγου M αριθμών υπολογίζεται ως εξής. Πρώτα ταξινομούμε τον κατάλογο και στη συνέχεια επιλέγουμε τον μεσαίο (αν το M είναι περιττός) ή την αριθμητική μέση τιμή των δύο μεσαίων αριθμών (αν το M είναι άρτιος) του ταξινομημένου καταλόγου.

[7] Η τιμή του ορίσματος εισόδου N καθορίζει την διάρκεια του σήματος (σε πλήθος δειγμάτων), ενώ η τιμή του ορίσματος εισόδου f_s την επιθυμητή συχνότητα δειγματοληψίας (όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η τιμή τόσο πιο μικρή είναι η χρονική απόσταση μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων του σήματος). Στο πείραμά σας χρησιμοποιήστε $f_s = 8KHz$.