



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοινωνίες

Ενότητα 6: Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος

Καθηγητής Κώστας Μπερμπερίδης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση του προβλήματος της εκτίμησης φάσματος τόσο με μη παραμετρικές όσο και με παραμετρικές μεθόδους.



Περιεχόμενα ενότητας

- Μη παραμετρικές μέθοδοι
 - Περιοδόγραμμα
 - Τροποποιημένο περιοδόγραμμα
 - Μέθοδος Bartlett
 - Μέθοδος Welch
 - Μέθοδος Blackman-Tukey
- Παραμετρικές μέθοδοι
 - Η περίπτωση AR
 - Η περίπτωση MA



Μη παραμετρικές μέθοδοι

Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (1/12)

- Φάσμα ισχύος μιας **WSS** διαδικασίας:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-j\omega k}$$

- Υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης μιας **εργοδικής**, ως προς $r_x(k)$, διαδικασίας:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+k)x^*(n)$$

Από N δείγματα του σήματος παράγω $2N-1$ τιμές αυτοσυσχέτισης.

$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} 0 & ; |k| > N \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) & ; k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{r}_x^*(-k) & ; k = -N+1, -N+2, \dots, -1 \end{cases}$$

- Επιβολή συμμετρίας
- Μόνο μη μηδενικά δείγματα

$$\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k) e^{-j\omega k}$$

Περιοδόγραμμα



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (2/12)

- Ορίζουμε το σήμα $x_N(n)$ πεπερασμένου μήκους:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n) & ; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \text{αλλού} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_N(n) = x(n)w_R(n) ; \forall n$$

- Σημειώνεται ότι $w_R(n)$ είναι ένα **τετραγωνικό** παράθυρο μήκους N :

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \text{αλλού} \end{cases}$$

- Υπολογίζουμε το περιοδόγραμμα του $x(n)$:

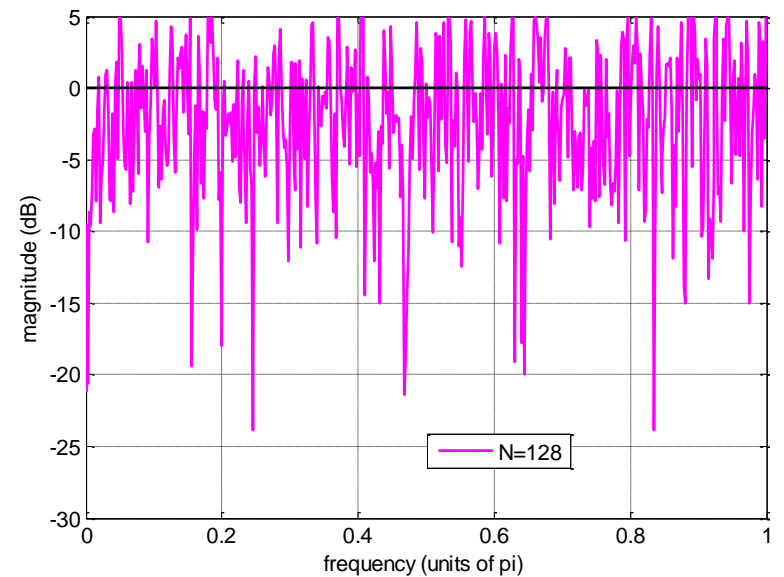
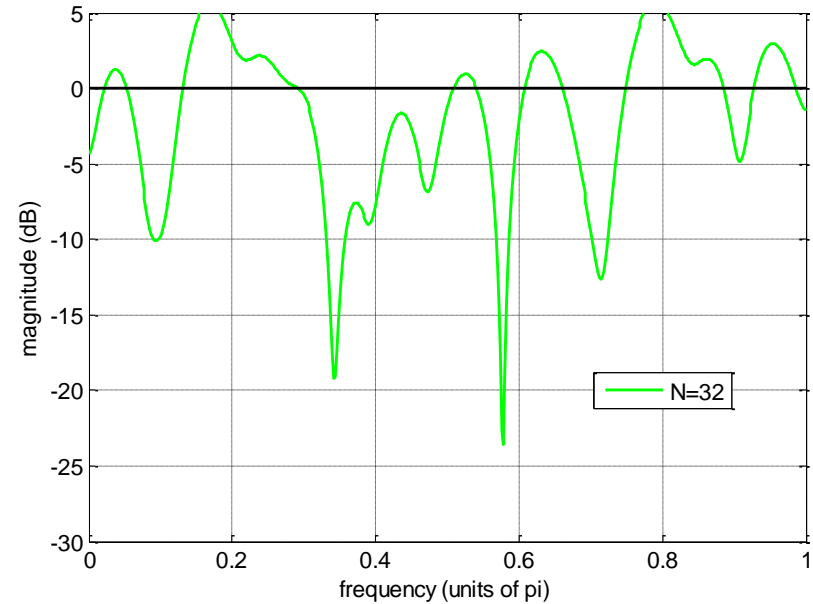
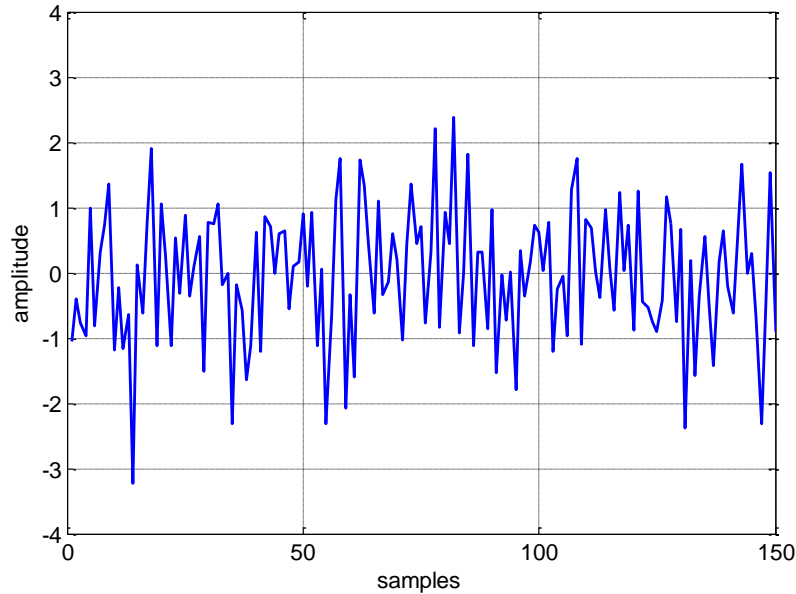
$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n+k)x_N^*(n) = \frac{1}{N} [x_N(k) * x_N^*(-k)]$$

- Άρα:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{r}_x(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega})X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n)e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w_R(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \end{aligned}$$



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (3/12)



% number of samples

Ns=150;

% noise mean

m=0;

% noise variance

v=1;

% white Gaussian noise

x=m+sqrt(v)*randn(1,Ns);



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (4/12)

- Εφόσον το περιοδόγραμμα, $\hat{P}(e^{j\omega})$, είναι μια συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, θέλουμε να εξετάσουμε τη **σύγκλιση** ως προς την πραγματική τιμή του φάσματος. Ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε για τη σύγκλιση με βάση το **κριτήριο του μέσου τετραγώνου**, δηλαδή:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) - P_x(e^{j\omega}) \right]^2 \right\} = 0$$

- Για να εξασφαλίζεται η σύγκλιση ως προς το παραπάνω κριτήριο, αρκεί το περιοδόγραμμα να είναι **συνεπής** (consistent) εκτιμητής του φάσματος, δηλαδή:
 - Να είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος (asymptotically unbiased) εκτιμητής: $\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \} = P_x(e^{j\omega})$
 - Η διασπορά της εκτίμησης να τείνει στο μηδέν ως: $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var} \{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \} = 0$



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (5/12)

- Διερεύνηση της **απόκλιση** (bias) του περιοδογράμματος:

$$\hat{r}_x(k) = \begin{cases} 0 & ; |k| > N \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) & ; k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{r}_x^*(-k) & ; k = -N+1, \dots, -1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$E\{\hat{r}_x(k)\} = \begin{cases} 0 & ; |k| > N \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{x(n+k)x^*(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} r_x(k) = \frac{N-k}{N} r_x(k) & ; k = 0, 1, \dots, N-1 \\ E\{\hat{r}_x^*(-k)\} = \frac{N-|k|}{N} r_x(k) & ; k = -N+1, \dots, -1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$E\{\hat{r}_x^*(-k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1+k} E\{x^*(n-k)x(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} r_x(k) = \frac{N-|k|}{N} r_x(k)$$



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (6/12)

- Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$E\{\hat{r}_x(k)\} = w_B(k)r_x(k) \quad ; \forall k$$

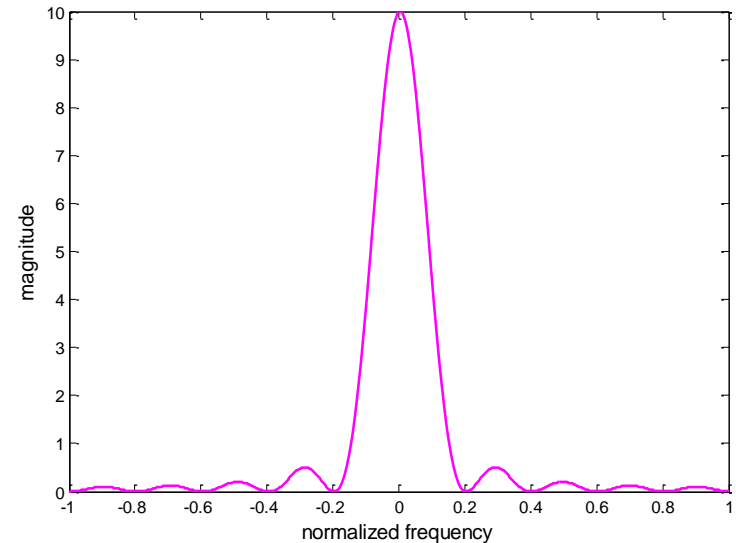
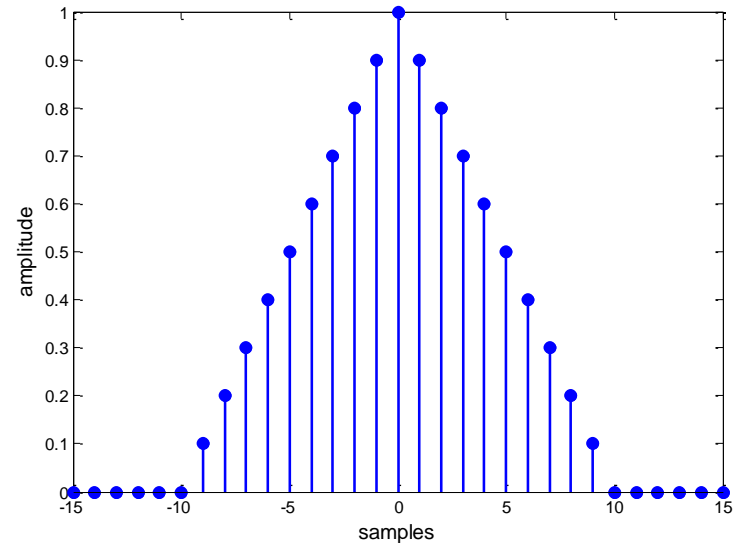
- Όπου, $w_B(n)$ είναι παράθυρο Bartlett μήκους $2N$.

$$w_B(k) = \begin{cases} \frac{N - |k|}{N} & ; |k| \leq N \\ 0 & ; \text{αλλού} \end{cases}$$

DTFT \Downarrow

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2$$

- Άρα, η συνάρτηση $\hat{r}_x(k)$ που έχουμε χρησιμοποιήσει **δεν είναι** αμερόληπτος εκτιμητής της αυτοσυσχέτισης.



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (7/12)

- Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του περιοδογράμματος:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\right\} &= E\left\{\sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k)e^{-j\omega k}\right\} = \sum_{k=-N+1}^{N-1} E\{\hat{r}_x(k)\}e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [w_B(k)r_x(k)]e^{-j\omega k} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})}_{\text{συνέλιξη}} \end{aligned}$$

- Καθώς $N \rightarrow \infty$, $W_B(e^{j\omega}) = \delta(\omega)$ και άρα:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\right\} = P_x(e^{j\omega})$$

- Συνεπώς, το περιοδόγραμμα δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του φάσματος, όμως **είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος** εκτιμητής.



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (8/12)

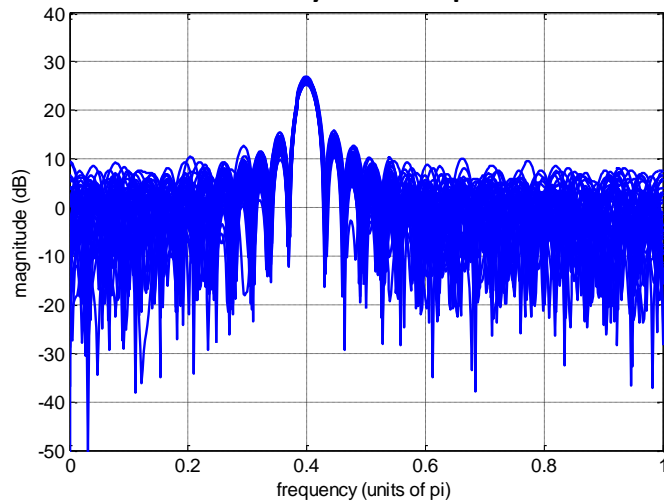
- Έστω, η τυχαία διαδικασία $x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) + u(n)$, όπου $A = 5$, $\omega_0 = 4\pi$, ϕ είναι τυχαία φάση με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $-\pi \leq \phi \leq \pi$ και $u(n)$ λευκός θόρυβος με διασπορά $\sigma_u^2 = 1$.

$$\begin{aligned} E\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\} &= \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W_B(e^{j\theta}) P_x(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W_B(e^{j\theta}) \left[\sigma_u^2 + \frac{A^2}{2} \pi \delta(\omega - \omega_0 - \theta) + \frac{A^2}{2} \pi \delta(\omega + \omega_0 - \theta) \right] d\theta \\ &= \frac{\sigma_u^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W_B(e^{j\theta}) d\theta + \frac{A^2}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} W_B(e^{j\theta}) \delta(\omega - \omega_0 - \theta) d\theta + \\ &\quad + \frac{A^2}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} W_B(e^{j\theta}) \delta(\omega - \omega_0 + \theta) d\theta \\ &= \sigma_u^2 + \frac{A^2}{4} W_B(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A^2}{4} W_B(e^{j(\omega+\omega_0)}) \end{aligned}$$

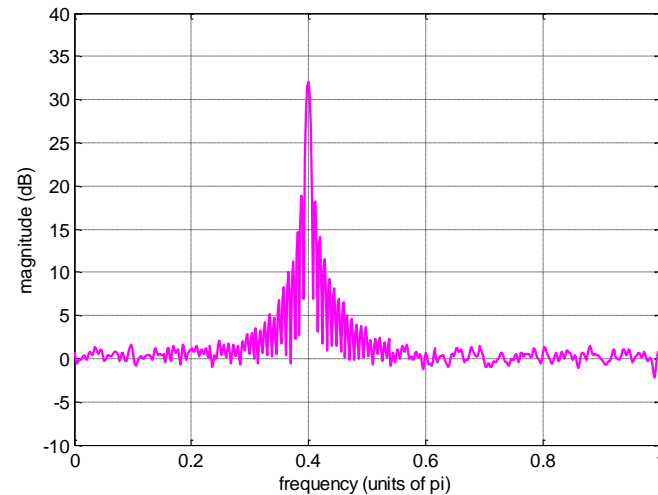
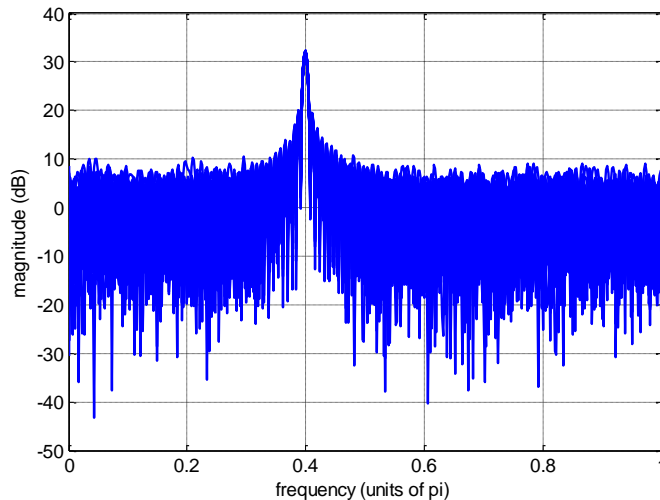
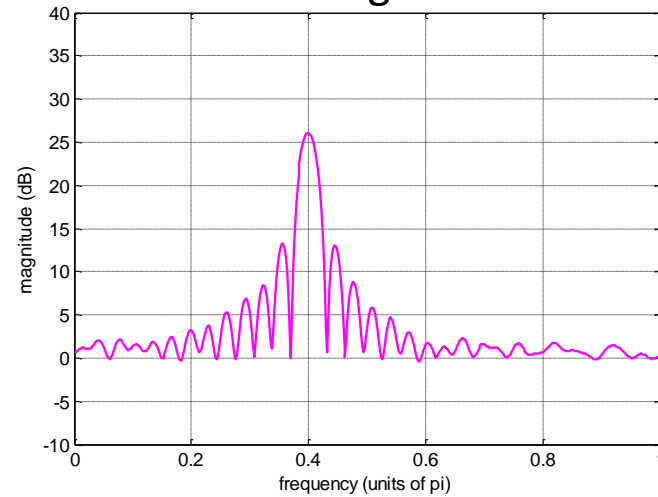


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (9/12)

Overlay of 50 plots



Average



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (10/12)

- Ονομάζουμε **διακριτική ικανότητα** (resolution) του εκτιμητή φάσματος, την ελάχιστη απόσταση (στη συχνότητα) μεταξύ δύο ημιτόνων, ή γενικά δύο τυχαίων διαδικασιών στενής ζώνης (narrowband), ώστε να μπορούν να αναγνωριστούν από τη μέθοδο εκτίμησης του φάσματος.
- Ορίζουμε τη διακριτική ικανότητα του **περιοδογράμματος** ως το εύρος του κύριου λοβού στο φάσμα του τετραγωνικού παραθύρου, $W_R(e^{j\omega})$, στα σημεία 3 dB:

$$\Delta\omega = 0.89 \frac{2\pi}{N}$$

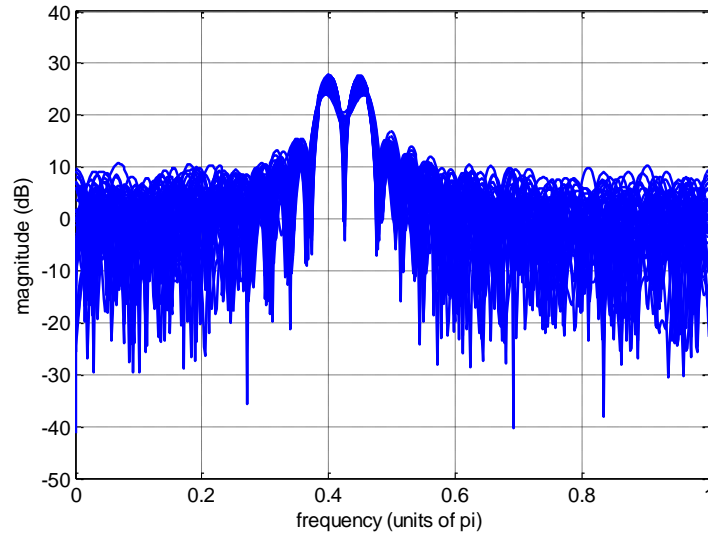
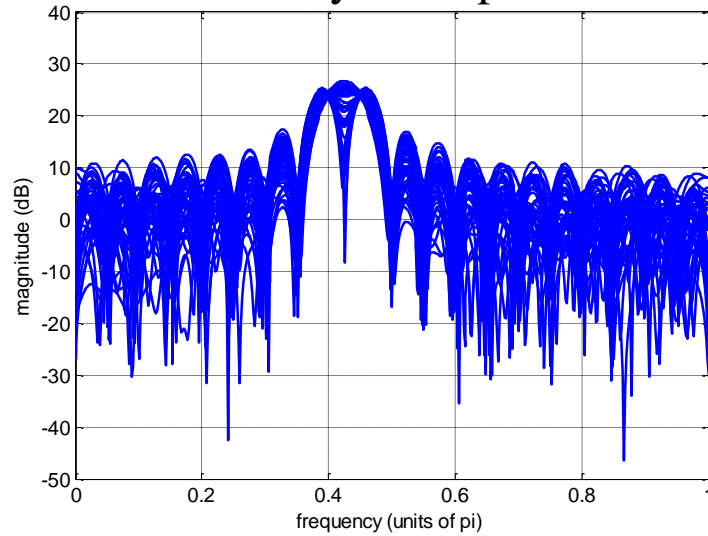
- **Παράδειγμα:** $x(n) = 5 \sin(0.4\pi n + \phi_1) + 5 \sin(0.45\pi n + \phi_2) + u(n)$

$$\text{Θέλουμε} \quad \Delta\omega \leq 0.05\pi \quad \Rightarrow \quad N \geq 36$$

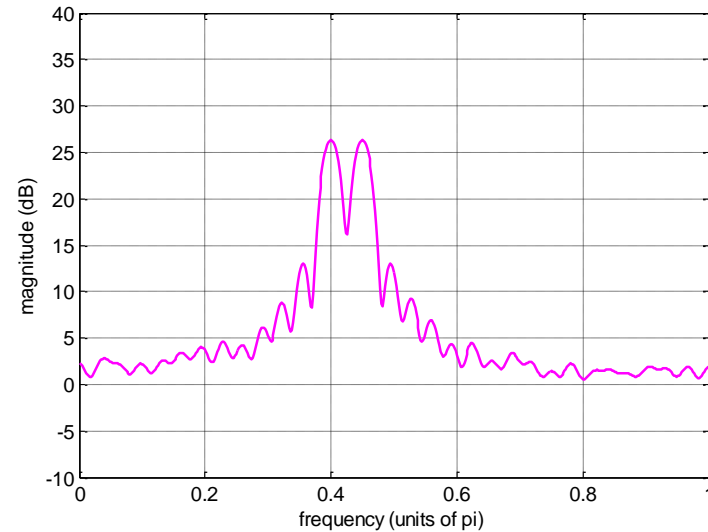
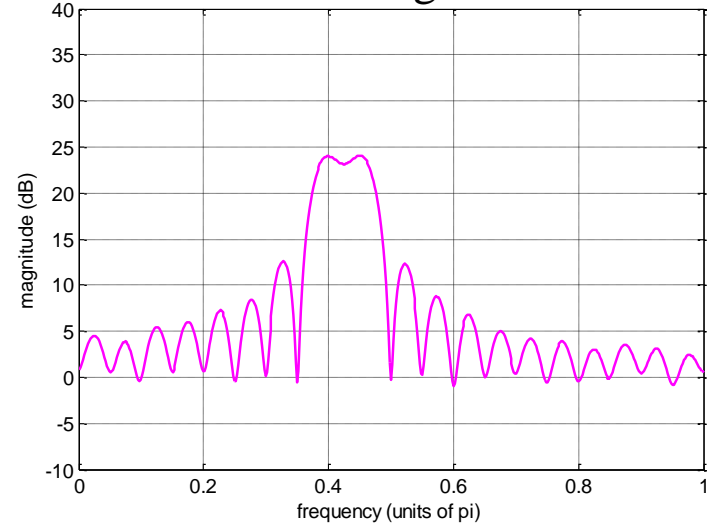


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (11/12)

Overlay of 50 plots



Average



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Περιοδόγραμμα (12/12)

- Η διασπορά του περιοδογράμματος μιας **Gaussian** τυχαίας διαδικασίας είναι:

$$\text{var} \left\{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \right\} \approx P_x^2(e^{j\omega}) \longleftarrow \text{Δεν εξαρτάται από το } N.$$

- Συνεπώς, το περιοδόγραμμα **δεν είναι** συνεπής εκτιμητής του φάσματος.



Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (1/7)

- Εφαρμόζουμε ένα **γενικό** παράθυρο $w(n)$, πεπερασμένου μήκους N , στα δεδομένα της τυχαίας ακολουθίας $x(n)$ και υπολογίζουμε το περιοδόγραμμα:

$$x_N(n) = x(n)w(n) \quad ; \quad \forall n \quad \text{όπου} \quad w(n) = 0 \quad ; \quad n < 0 \quad \text{και} \quad n \geq N$$

$$\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n) e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\right\} &= \frac{1}{N} E\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)e^{-j\omega n}\right] \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)w(m)e^{-j\omega m}\right]^*\right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{x(n)x^*(m)\}}_{r_x(n-m)} w(n)w(m)e^{-j\omega(n-m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)w(n-k)\right] e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) [w(k) * w(-k)] e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής:
 $n-m = k$



Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (2/7)

- Τελικά:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\right\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) [w(k) * w(-k)] e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-j\omega k} \right] * \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [w(k) * w(-k)] e^{-j\omega k} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi N} P_x(e^{j\omega}) * \left[\underset{\substack{\uparrow \\ W^*(e^{j\omega})}}{W(e^{j\omega})W(e^{-j\omega})} \right] = \frac{1}{2\pi N} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}$$

- Όταν: $w(n) = w_R(n) \Rightarrow w(k) * w(-k) = w_B(k)$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$



Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (3/7)

- Ορίζουμε ως **τροποποιημένο περιοδόγραμμα**, το περιοδόγραμμά μας τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ στην οποία εφαρμόζεται ένα **γενικό παράθυρο** $w(n)$ μήκους N :

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \quad \text{όπου} \quad U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2$$



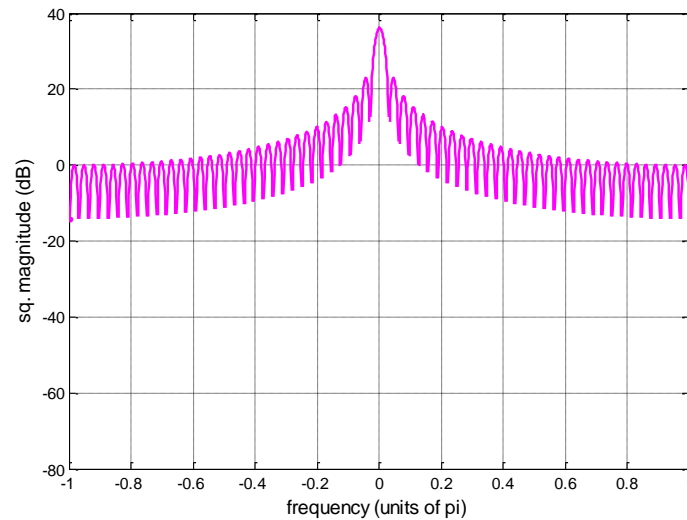
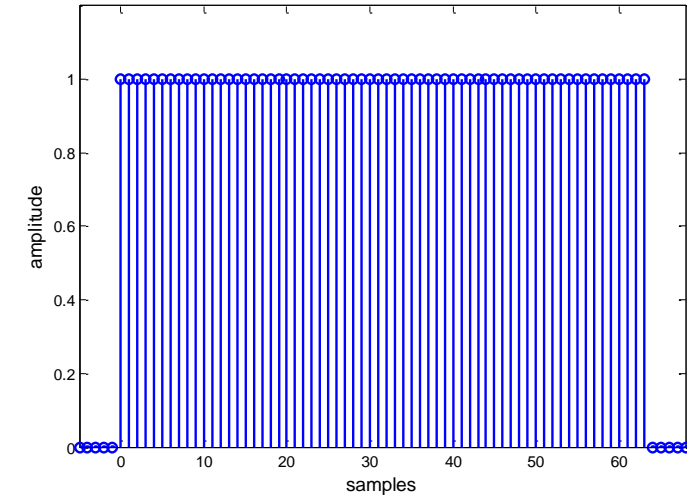
$$E\{\hat{P}_M(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi NU} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2$$

- Αποδεικνύεται ότι με την κατάλληλη επιλογή του παραθύρου $w(n)$ ισχύει: $\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{P}_M(e^{j\omega})\} = P_x(e^{j\omega})$
- Η διασπορά του είναι: $var\{\hat{P}_M(e^{j\omega})\} \simeq P_x^2(e^{j\omega})$
- Συνεπώς, το τροπ. περιοδόγραμμα **δεν είναι** συνεπής εκτιμητής του φάσματος.

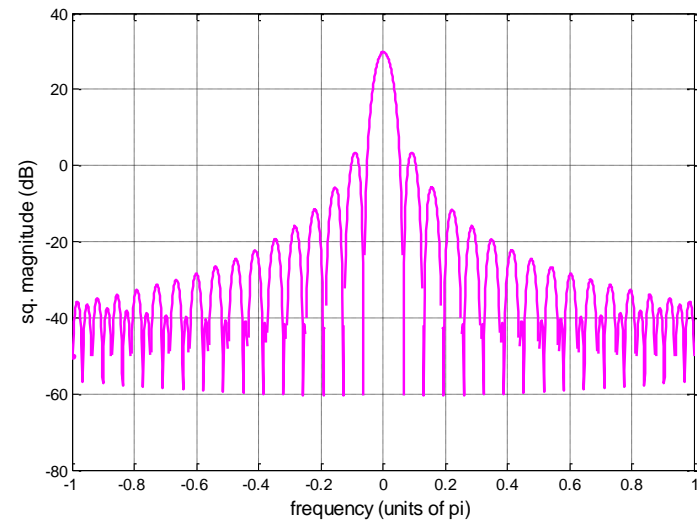
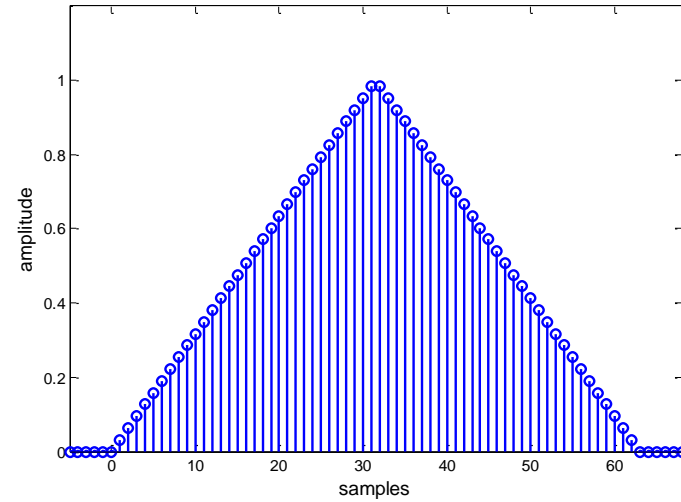


Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (4/7)

Rectangular

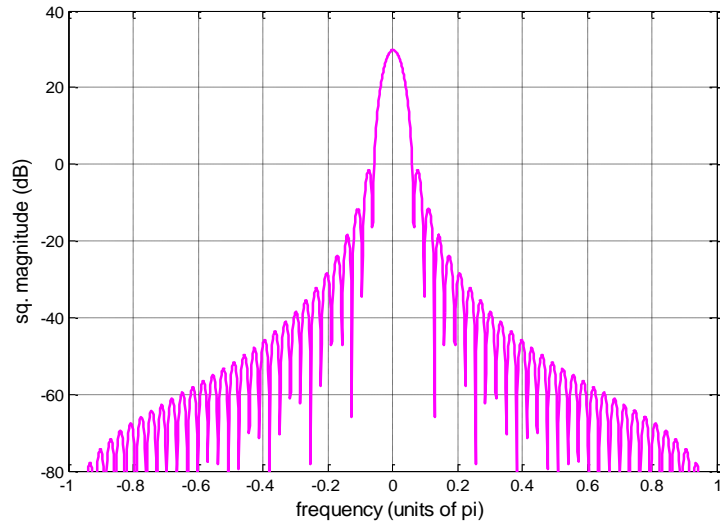
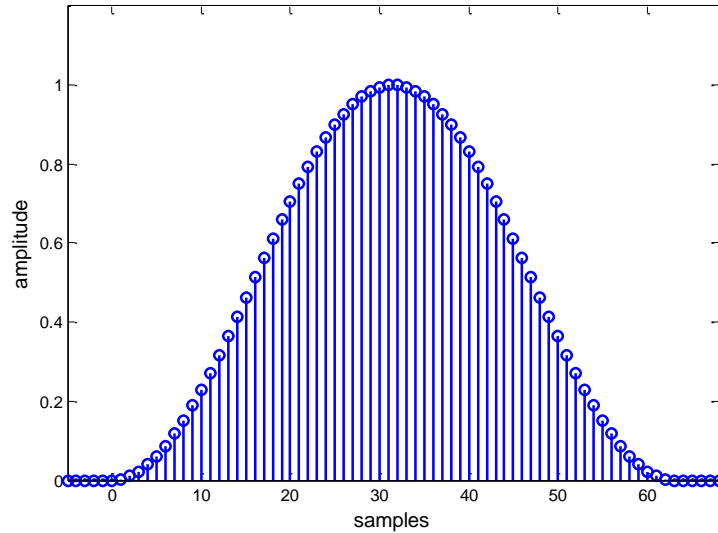


Bartlett

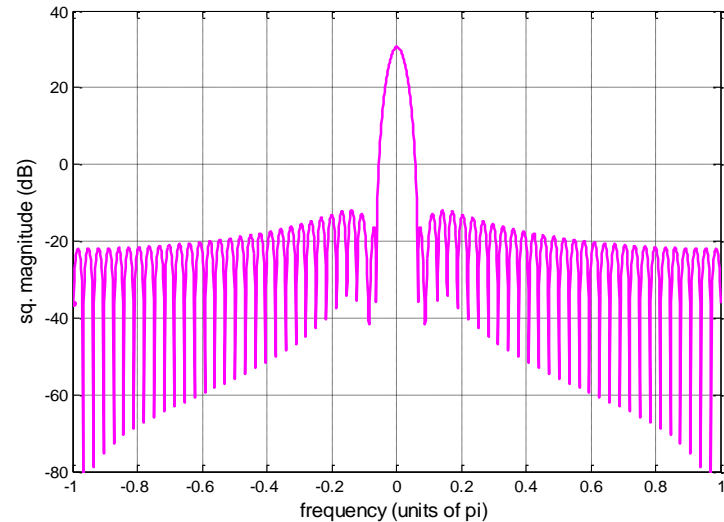
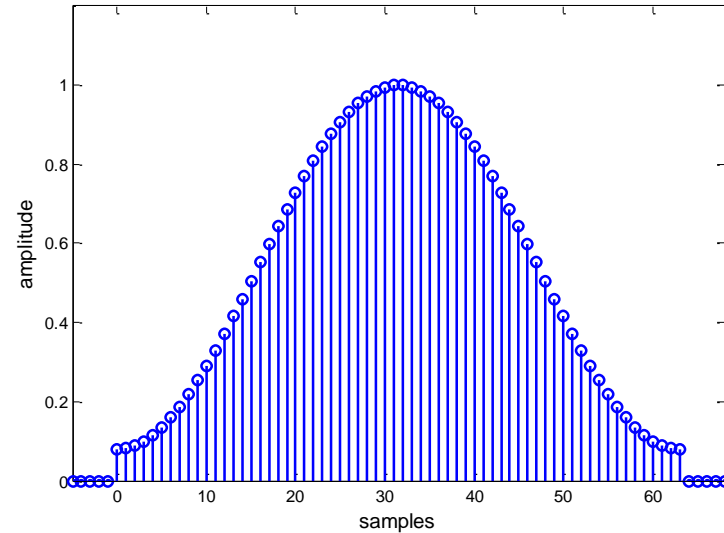


Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (5/7)

Hanning

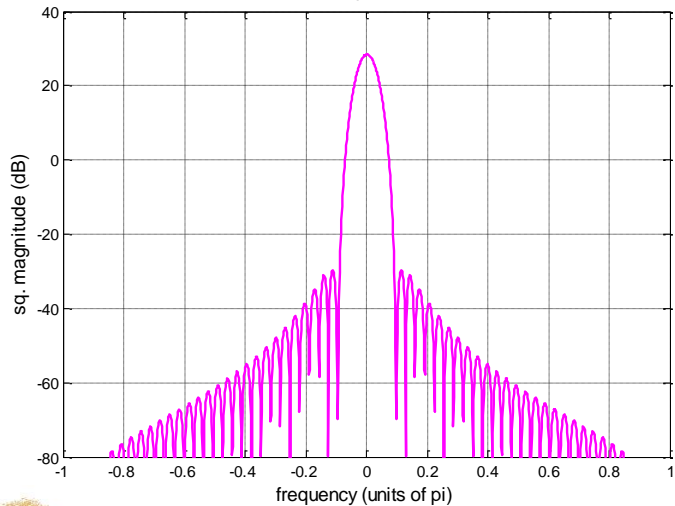
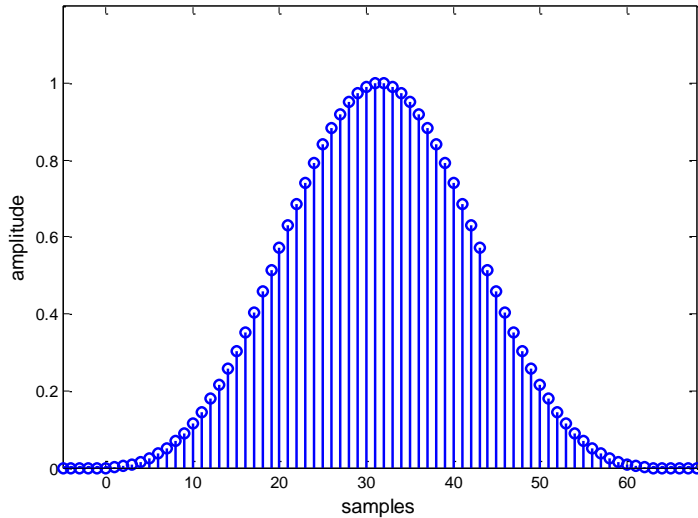


Hamming



Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (6/7)

Blackman



| Window | Sidelobe level (dB) | $\Delta\omega_{3\text{-dB}}$ BW |
|-------------|---------------------|---------------------------------|
| Rectangular | -13 | $0.89(2\pi/N)$ |
| Bartlett | -27 | $1.28(2\pi/N)$ |
| Hanning | -32 | $1.44(2\pi/N)$ |
| Hamming | -43 | $1.30(2\pi/N)$ |
| Blackman | -58 | $1.68(2\pi/N)$ |

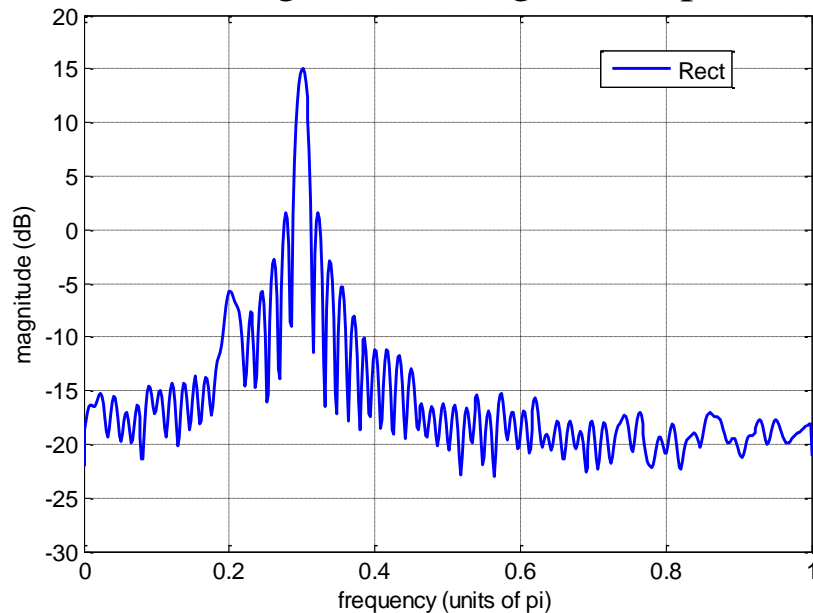


Ανταλλαγή (**trade-off**) ανάμεσα σε διακριτική ικανότητα (εύρος κύριου λοβού) και φασματική επισκίαση (πλάτος δευτερεύοντος λοβού).

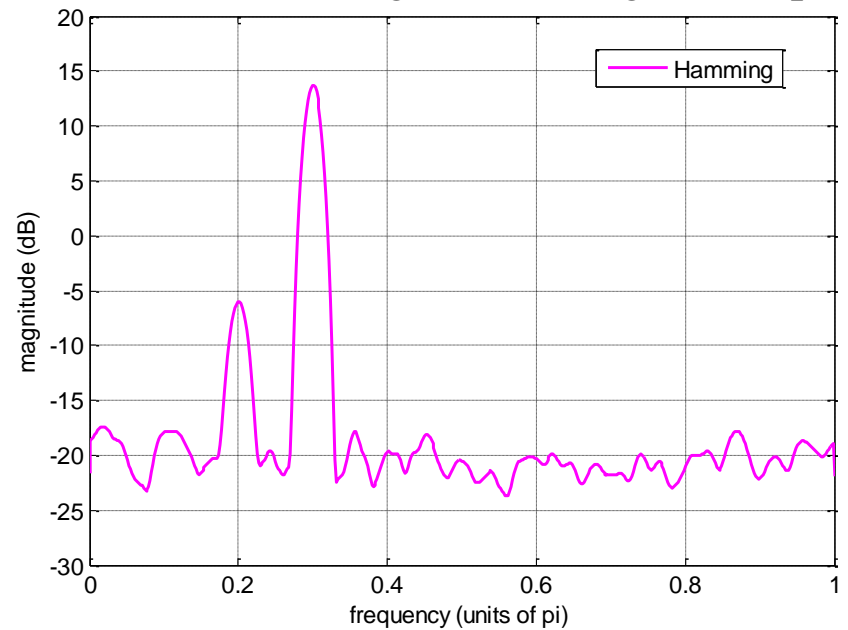


Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (7/7)

Periodogram: Average of 10 plots



Modified Periodogram: Average of 10 plots



- Έστω:

$$x(n) = 0.1\sin(0.2\pi n + \phi_1) + \sin(0.3\pi n + \phi_2) + u(n)$$

$$\sigma_u^2 = 0.01$$

$$\Delta\omega_R \leq 0.1\pi \quad \Rightarrow \quad N \geq 18$$

$$\Delta\omega_B \leq 0.1\pi \quad \Rightarrow \quad N \geq 29$$



Περιοδόγραμμα vs Τροπ. Περιοδόγραμμα

Periodogram

Estimator:

$$\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

Mean:

$$E \left\{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$$

Bias: Asymptotically unbiased

Resolution:

$$\Delta\omega_{\text{per}} = 0.89 \frac{2\pi}{N}$$

Variance:

$$\text{var} \left\{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \right\} \approx P_x^2(e^{j\omega})$$

Consistent: No

Modified Periodogram

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

$$E \left\{ \hat{P}_M(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{2\pi NU} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2$$

Asymptotically unbiased

Window dependent

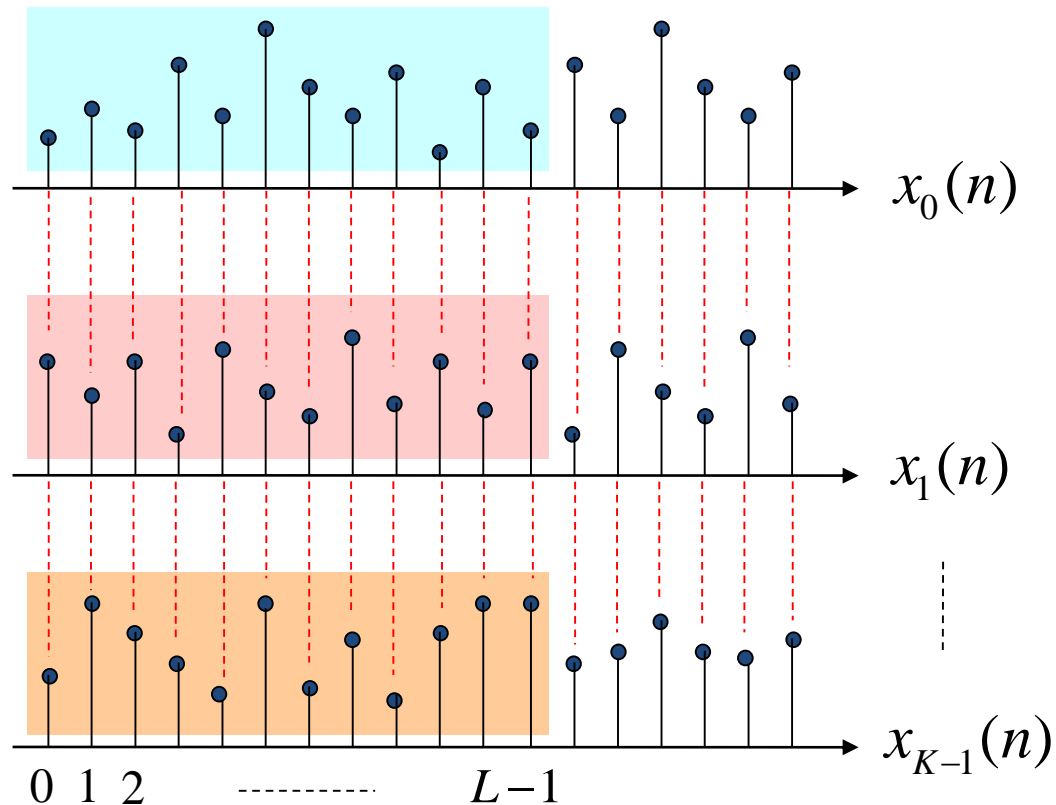
$$\text{var} \left\{ \hat{P}_M(e^{j\omega}) \right\} \approx P_x^2(e^{j\omega})$$

No



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (1/9)

- Έστω $x_i(n)$, όπου $i = 0, 1, \dots, K - 1$, ένα σύνολο από K **υλοποιήσεις** (realizations) της WSS τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ στο διάστημα $0 \leq n \leq L - 1$, που είναι **ασυσχέτιστες** μεταξύ τους.



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (2/9)

- Συμβολίζουμε ως $\hat{P}_{per}^{(i)}$ το περιοδόγραμμα της ακολουθίας $x_i(n)$:

$$\hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) e^{-j\omega n} \right|^2; \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

- Υπολογίζουμε το **μέσο όρο** για τις K υλοποιήσεις: $\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_i \hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega})$
- Η **αναμενόμενη τιμή** της παραπάνω ποσότητας είναι:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_x(e^{j\omega})\right\} &= E\left\{\frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega})\right\} = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} E\left\{\hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega})\right\} = E\left\{\hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega})\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * \underbrace{W_B(e^{j\omega})}_{\text{Ίδιο για κάθε υλοποίηση } x_i(n)} \end{aligned}$$

Παράθυρο Bartlett μήκους $2L - 1$.

- Άρα, όπως και στο περιοδόγραμμα, η εκτίμηση $\hat{P}_x(e^{j\omega})$ **είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη** όταν $L \rightarrow \infty$.

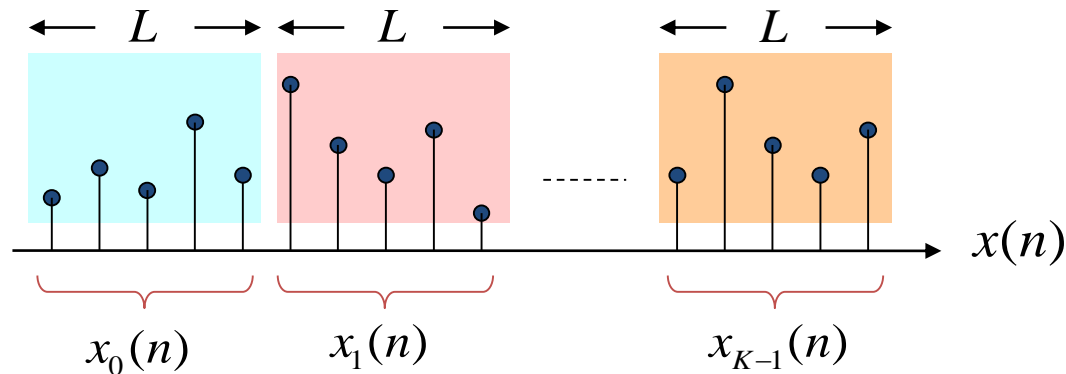


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (3/9)

- Επιπλέον:

$$\text{var} \left\{ \hat{P}_x(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{K} \text{var} \left\{ \hat{P}_{\text{per}}^{(i)}(e^{j\omega}) \right\} \approx \frac{1}{K} P_x^2(e^{j\omega}) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

- Τελικά, η εκτίμηση $\hat{P}_x(e^{j\omega})$ είναι συνεπής όταν $L \rightarrow \infty$ και $K \rightarrow \infty$.
- Στην πράξη δεν έχουμε διαθέσιμες K υλοποιήσεις, αλλά ένα σύνολο από N δείγματα της τυχαίας διαδικασίας. Διαιρούμε το διάστημα N σε K διαδοχικά διαστήματα μήκους L (θεωρούμε $N = KL$).



- Δηλαδή: $x_i(n) = x(n + iL)$, $n = 0, 1, \dots, L - 1$ και $i = 0, 1, \dots, K - 1$



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (4/9)

- Ορίζουμε ως **εκτιμητή φάσματος Bartlett**:

$$\hat{P}_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iL)e^{-j\omega n} \right|^2 \quad \Rightarrow \quad E\{\hat{P}_B(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$$

Στην πράξη, η μείωση της var είναι μικρότερη γιατί οι ακολουθίες $x_i(n)$ δεν είναι ασυσχέτιστες. $\longrightarrow \text{var}\{\hat{P}_B(e^{j\omega})\} \approx \frac{1}{K} P_x^2(e^{j\omega})$

- Άρα, ο εκτιμητής φάσματος Bartlett **είναι συνεπής** εκτιμητής του φάσματος.
- Η διακριτική ικανότητα του $\hat{P}_B(e^{j\omega})$ είναι:

$$\Delta\omega = 0.89 \frac{2\pi}{L} = 0.89K \frac{2\pi}{N} \quad \longleftarrow K \text{ φορές μικρότερη από το απλό περιοδόγραμμα.}$$

- Για δεδομένη τιμή N , η εκτίμηση φάσματος Bartlett επιτρέπει μια ανταλλαγή ανάμεσα σε διακριτική ικανότητα και μείωση της διασποράς (μέσω των K και L).



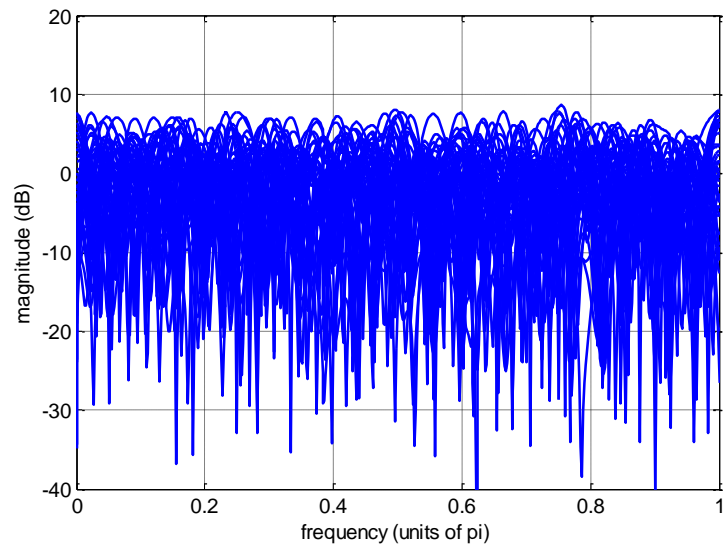
Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (5/9)

- **Εφαρμογή Α:** Θεωρούμε σήμα λευκού θορύβου μοναδιαίας διασποράς. Εξετάζουμε την εκτίμηση φάσματος του περιοδογράμματος και της μεθόδου Bartlett.
- **Εφαρμογή Β:** Θεωρούμε την ακόλουθη τυχαία διαδικασία: $x(n) = A \sin(\omega_1 n + \phi_1) + \sin(\omega_2 n + \phi_2) + u(n)$, όπου $A = \sqrt{0.5}$, $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.25\pi$, ϕ_1 και ϕ_2 είναι τυχαίες φάσεις με ομοιό-μορφη κατανομή στο διάστημα $-\pi \leq \phi \leq \pi$ και $u(n)$ λευκός θόρυβος με διασπορά $\sigma_u^2 = 1$. Εξετάζουμε την εκτίμηση φάσματος του περιοδογράμματος και της μεθόδου Bartlett.

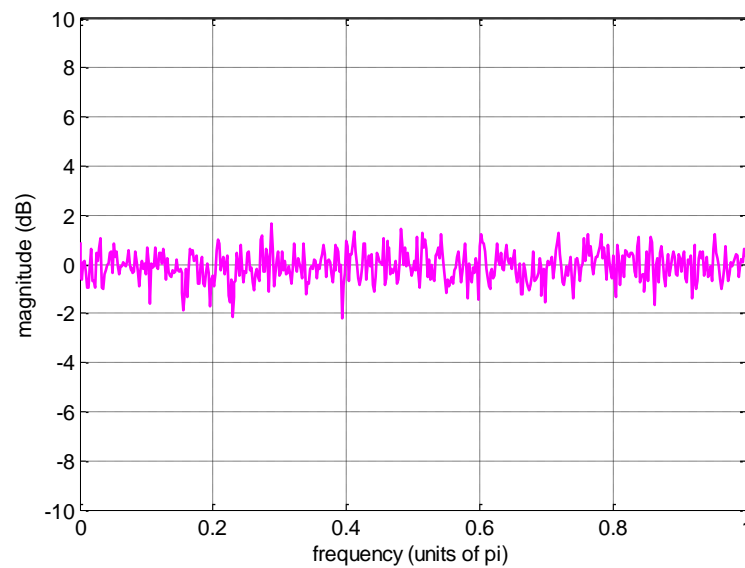
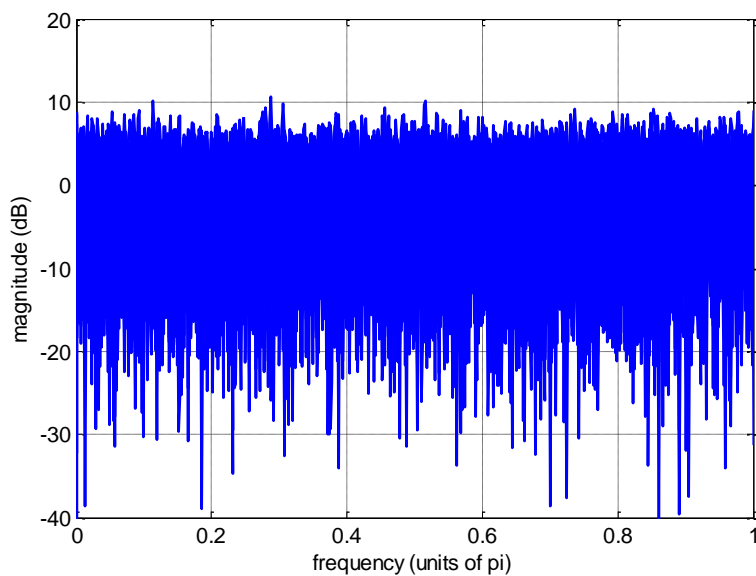
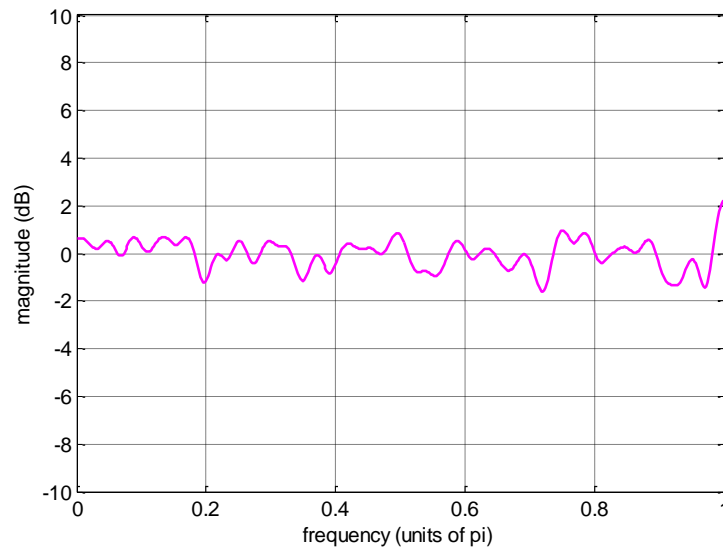


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (6/9)

(A) Periodogram: overlay of 50 plots

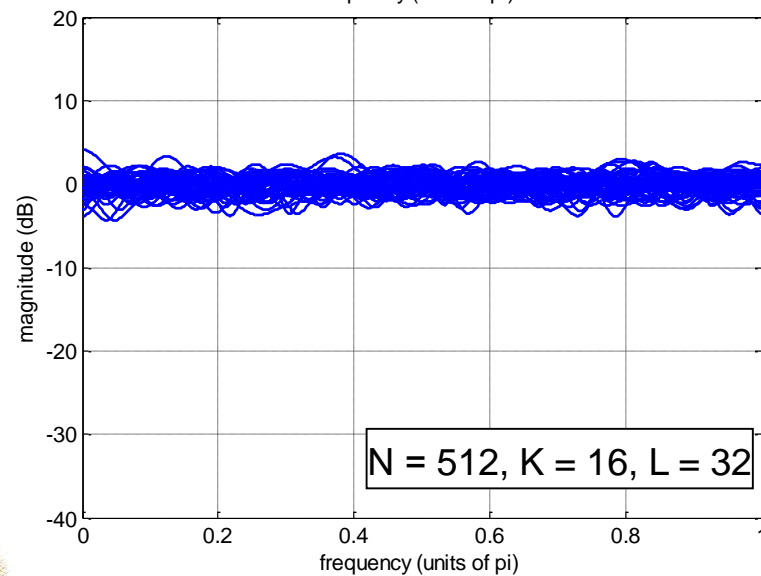
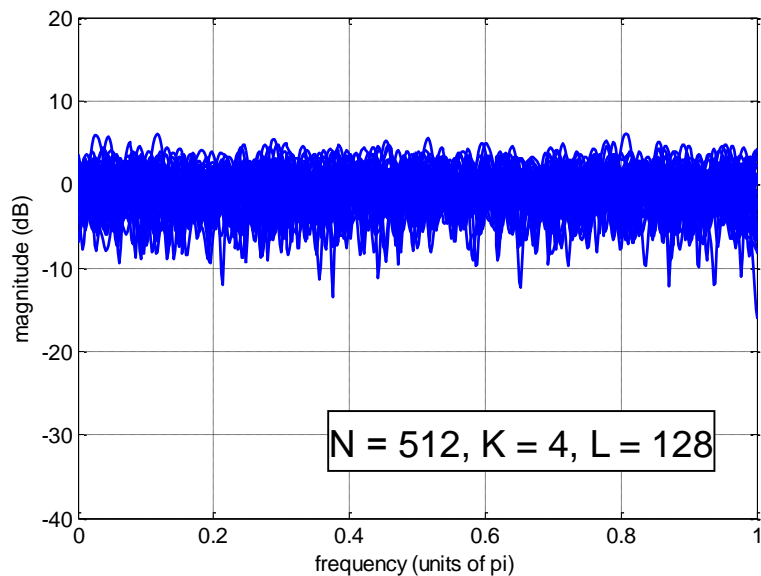


Average

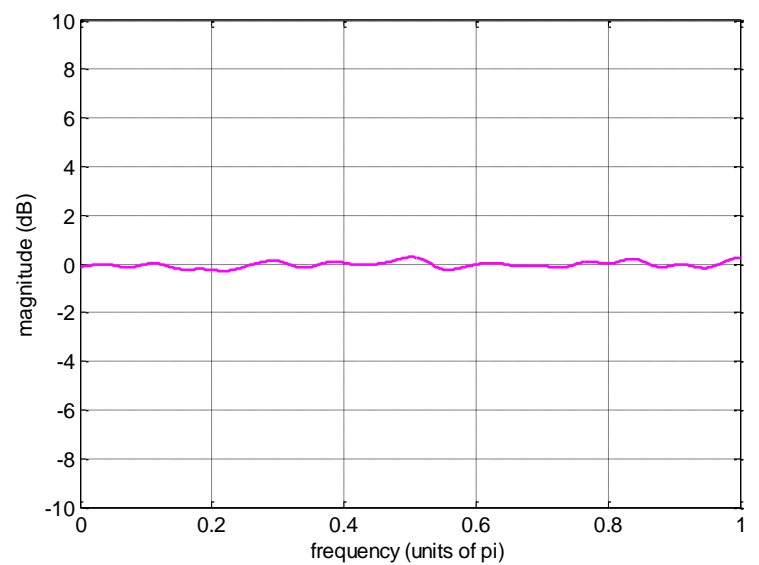
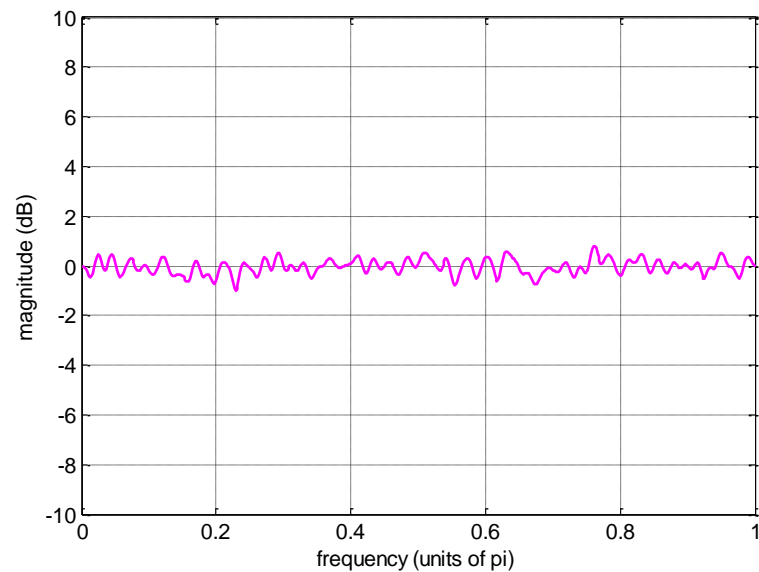


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (7/9)

Bartlett: overlay of 50 plots

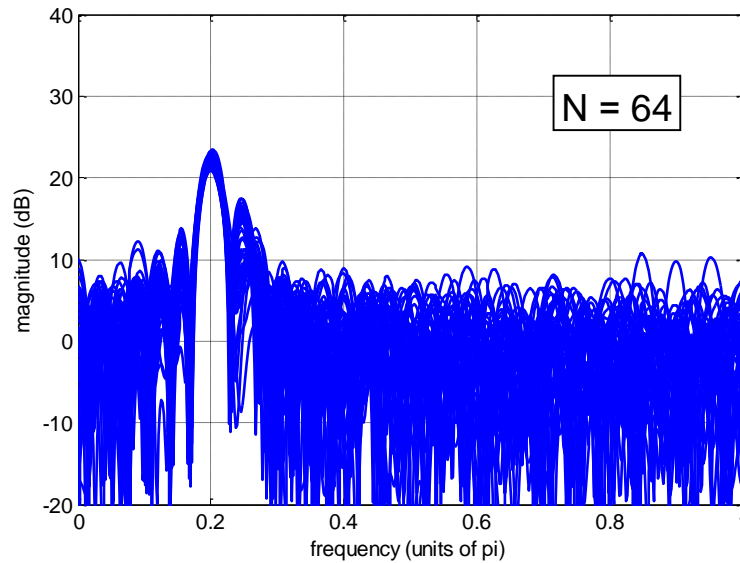


Average

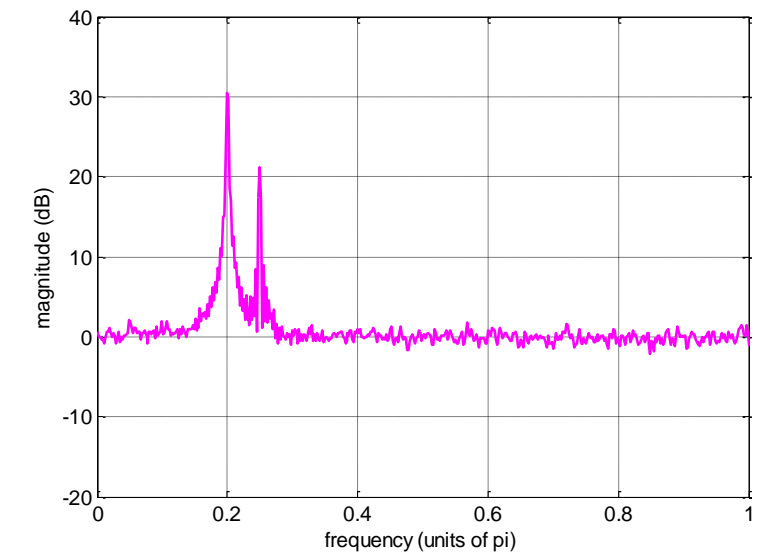
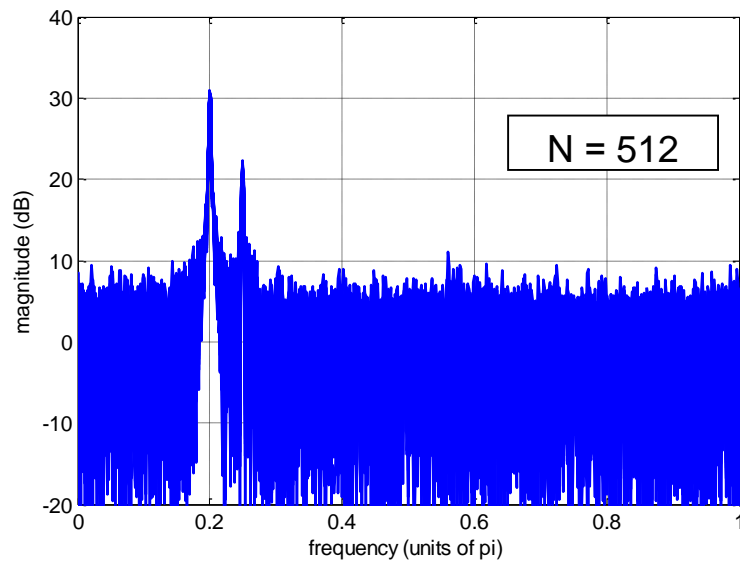
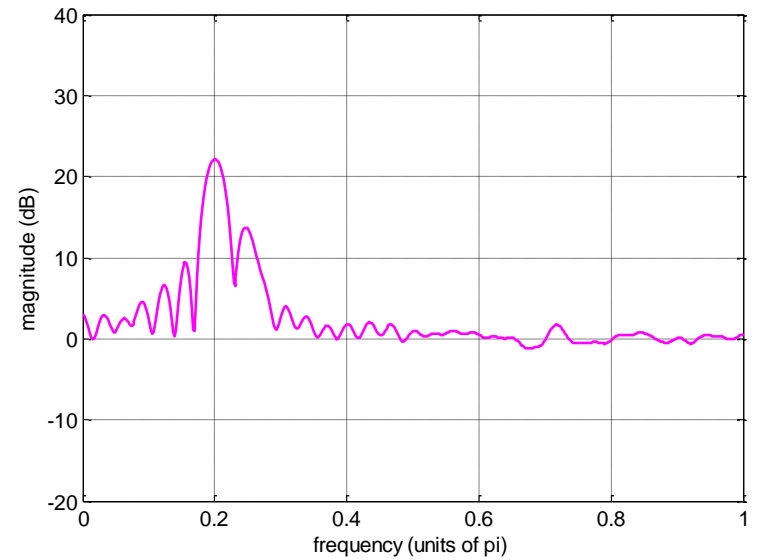


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (8/9)

(B) Periodogram: overlay of 50 plots

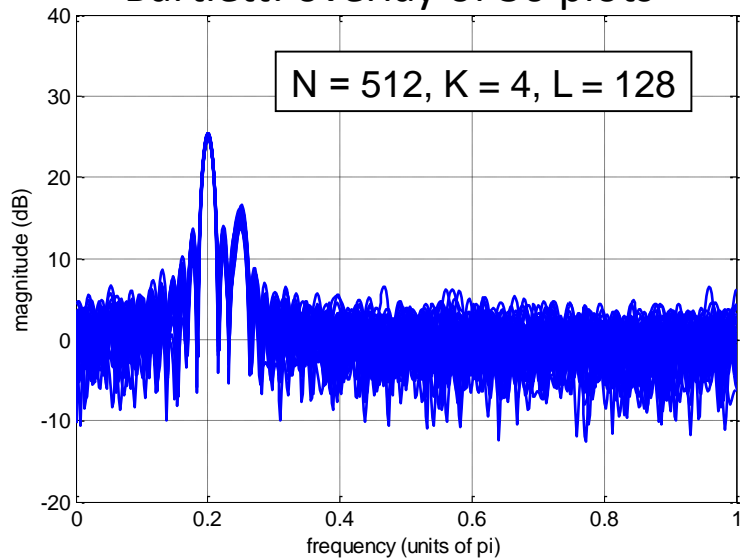


Average

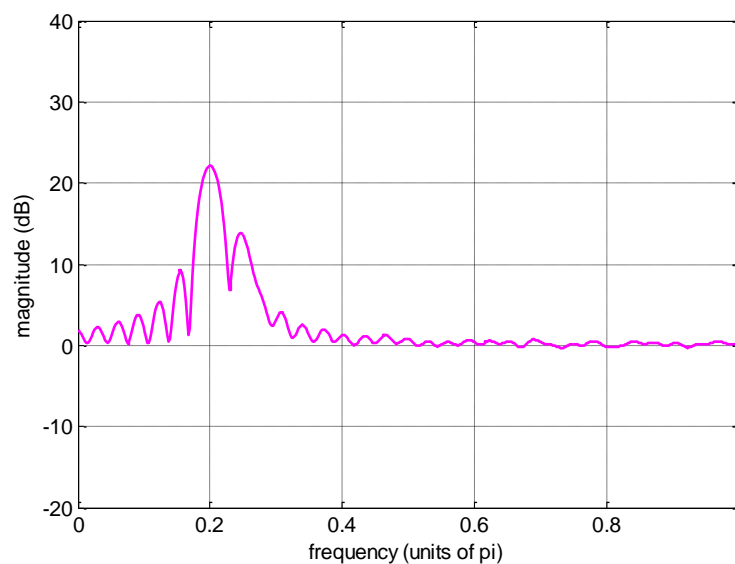
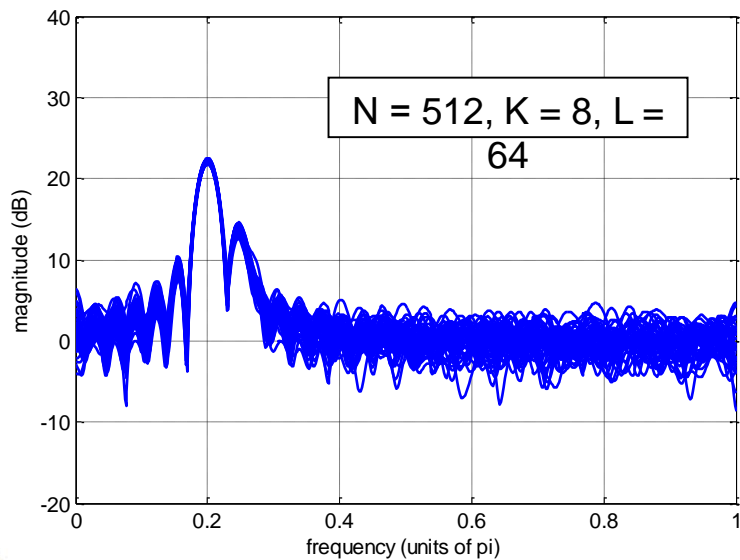
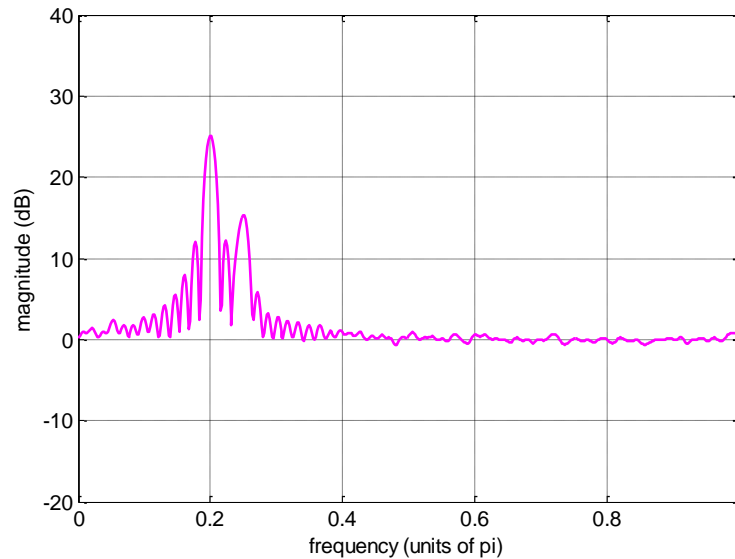


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Bartlett (9/9)

Bartlett: overlay of 50 plots

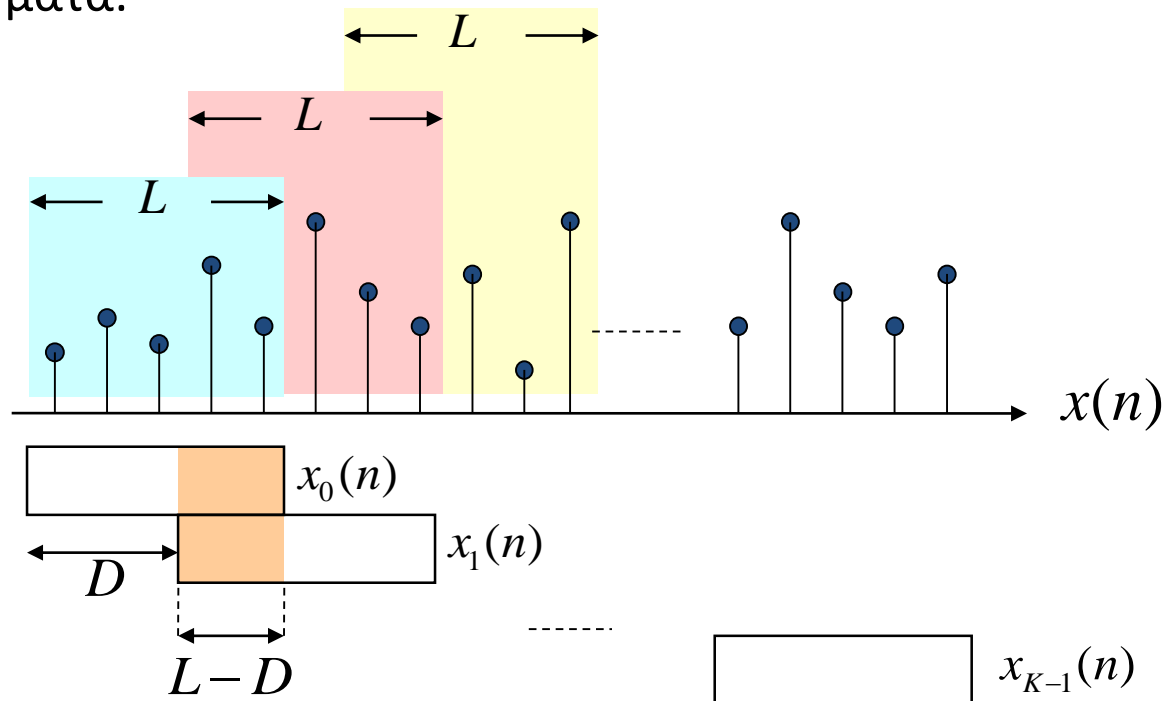


Average



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Welch (1/4)

- Έστω, ότι έχουμε διαθέσιμο ένα σύνολο από N δείγματα της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$. Διαιρούμε το διάστημα N σε K διαδοχικά διαστήματα με επικάλυψη. Τα διαστήματα έχουν μήκος L και offset D . Η επικάλυψη είναι $L - D$ δείγματα.



- Δηλαδή: $x_i(n) = x(n + iD)$, $n = 0, 1, \dots, L - 1$, και $N = L + D(K - 1)$



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Welch (2/4)

- Σε κάθε ακολουθία $x_i(n)$ εφαρμόζουμε ένα παράθυρο δεδομένων $w(n)$ μήκους L .
- Ορίζουμε ως **εκτιμητή φάσματος Welch**:

$$\hat{P}_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w(n)x(n+iD)e^{-j\omega n} \right|^2 \quad \text{όπου} \quad U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |w(n)|^2$$



$$E\{\hat{P}_W(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi LU} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{P}_W(e^{j\omega})\} = P_x(e^{j\omega})$$

- Για 50% επικάλυψη και παράθυρο Bartlett: $var\{\hat{P}_W(e^{j\omega})\} \simeq \frac{9}{8K} P_x^2(e^{j\omega})$
- Γενικά, ο εκτιμητής φάσματος Welch **είναι συνεπής** εκτιμητής του φάσματος.
- Η **διακριτική ικανότητα** εξαρτάται από το παράθυρο δεδομένων $w(n)$.



Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Welch (3/4)

- Από τη σχέση $N = L + D(K - 1)$ παρατηρούμε ότι:
 - Για **μηδενική επικάλυψη**, δηλαδή $D = L$, προκύπτει $K = N/L$ και η μέθοδος Welch ταυτίζεται με τη μέθοδο Bartlett.
 - Για **50% επικάλυψη**, δηλαδή $D = L/2$, προκύπτει $K = 2N/L - 1$.
- Αν $L_B = N/K_B$ είναι το μέγεθος των K_B διαστημάτων της μεθόδου Bartlett, τότε για $L = L_B \Rightarrow K \simeq 2K_B$, δηλαδή η μέθοδος Welch έχει την ίδια διακριτική ικανότητα αλλά μικρότερη διασπορά στην εκτίμηση από τη μέθοδο Bartlett:

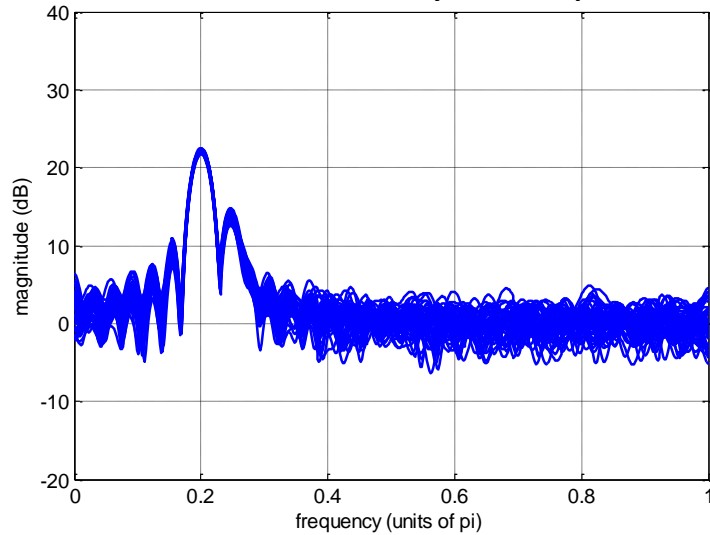
$$\text{var}\{\hat{P}_W(e^{j\omega})\} \approx \frac{9}{16} \text{var}\{\hat{P}_B(e^{j\omega})\}$$

- Για $K \simeq K_B \Rightarrow L \simeq 2L_B$, δηλαδή η μέθοδος Welch έχει μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα στην εκτίμηση από τη μέθοδο Bartlett και σχεδόν ίδια διασπορά: $\text{var}\{\hat{P}_W(e^{j\omega})\} \simeq \frac{9}{8} \text{var}\{\hat{P}_B(e^{j\omega})\}$

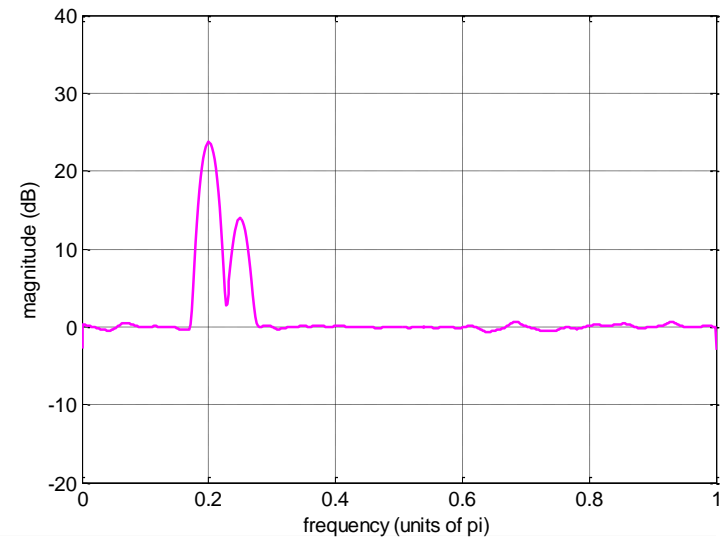
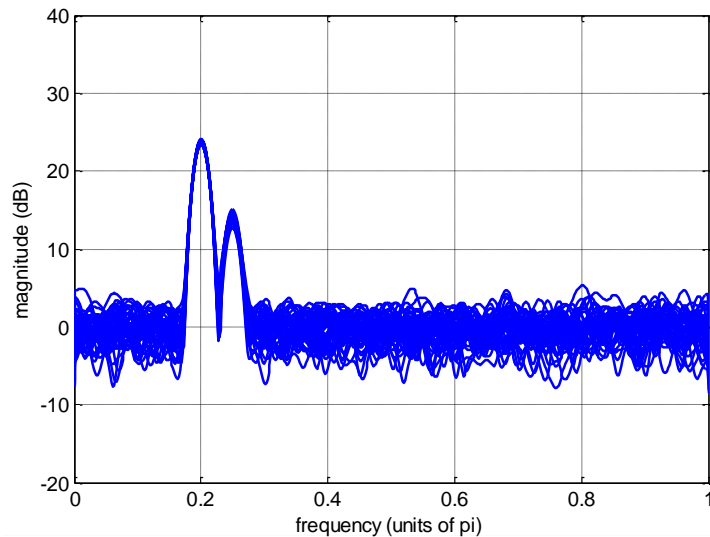
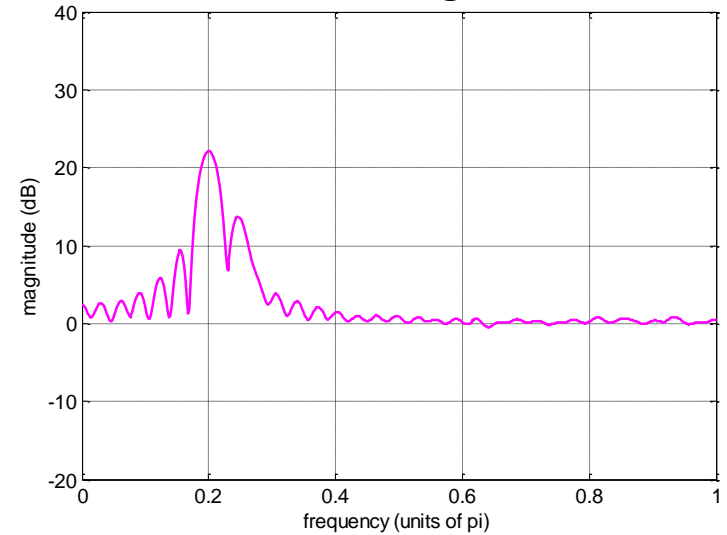


Μη παραμετρικές μέθοδοι: Μέθοδος Welch (4/4)

(B) Bartlett: overlay of 50 plots



Average



Μη παρ. μέθοδοι: Μέθοδος Blackman-Tukey (1/5)

- Από τη σχέση $\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n)$ παρατηρούμε ότι για $k = N - 1$:

$$\hat{r}_x(N-1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N-1)x^*(n) = \frac{1}{N} x(N-1)x^*(0)$$

- Δηλαδή, η διασπορά της εκτίμησης της αυτοσυσχέτισης είναι μεγάλη για τιμές του k κοντά στο όριο $N - 1$. Οι τιμές αυτές είναι γενικά **αναξιόπιστες** και συνεισφέρουν στη διασπορά του περιοδογράμματος.
- Για να μειώσουμε την επίδραση των παραπάνω τιμών στην εκτίμηση του φάσματος, εφαρμόζουμε ένα **παράθυρο** $w(k)$ μήκους $M < N$ στις τιμές $\hat{r}_x(k)$:

$$\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k)w(k)e^{-j\omega k}$$

- Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης φάσματος **Blackman-Tukey**.



Μη παρ. μέθοδοι: Μέθοδος Blackman-Tukey (2/5)

- Η μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega})\right\} &= \sum_{k=-M}^M E\{\hat{r}_x(k)\} w(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=-M}^M r_x(k) \underbrace{w_B(k)w(k)}_{w_{\text{BT}}(k)} e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-M}^M r_x(k) w_{\text{BT}}(k) e^{-j\omega k} = \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_{\text{BT}}(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

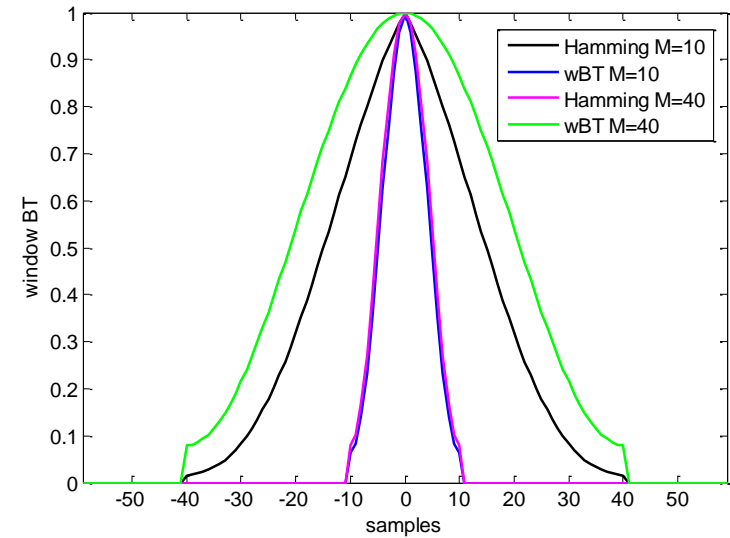
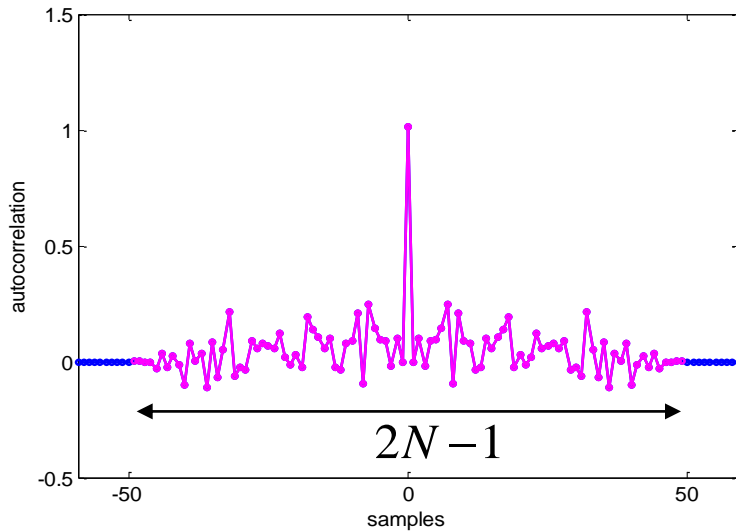
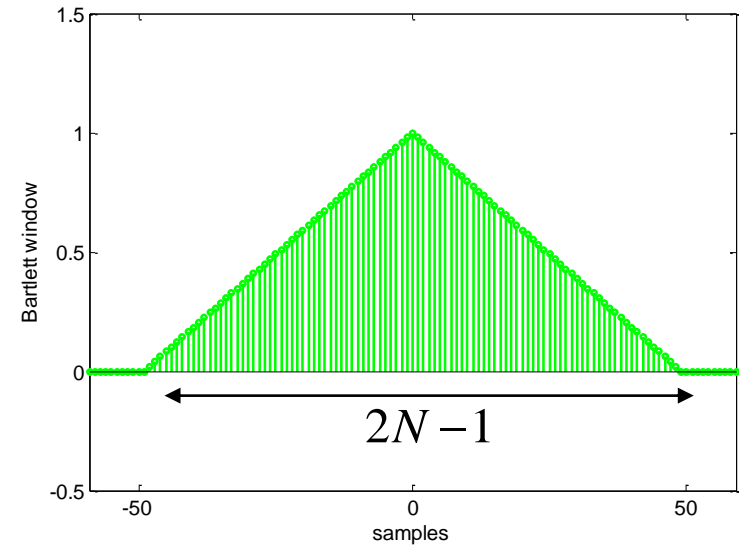
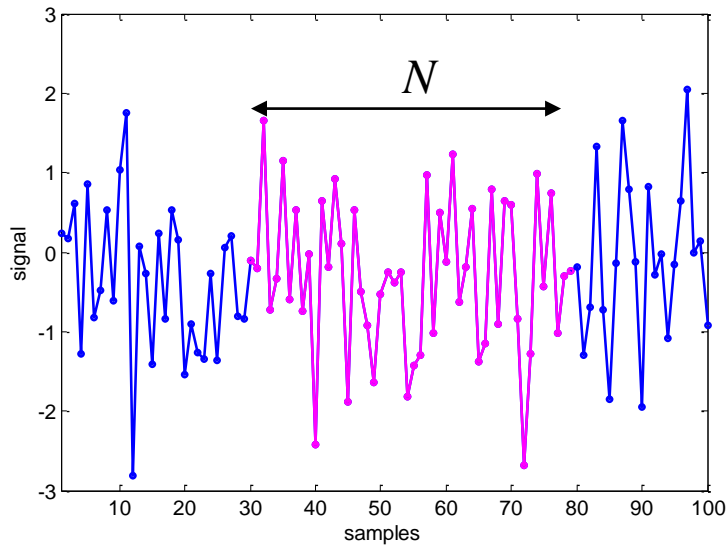
- Για $M < N$ συνεπάγεται $w_{\text{BT}}(k) = w_B(k)w(k) \simeq w(k)$, και προκύπτει:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega})\right\} &\approx \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \\ \text{var}\left\{\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega})\right\} &\approx P_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M w^2(k) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} E\left\{\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega})\right\} \\ \text{var}\left\{\hat{P}_{\text{BT}}(e^{j\omega})\right\} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ανταλλαγή ανάμεσα σε απόκλιση} \\ \text{(bias) και διασπορά ανάλογα με το } M. \end{array}$$

- Ο εκτιμητής φάσματος Blackman - Tukey είναι **συνεπής εκτιμητής**.

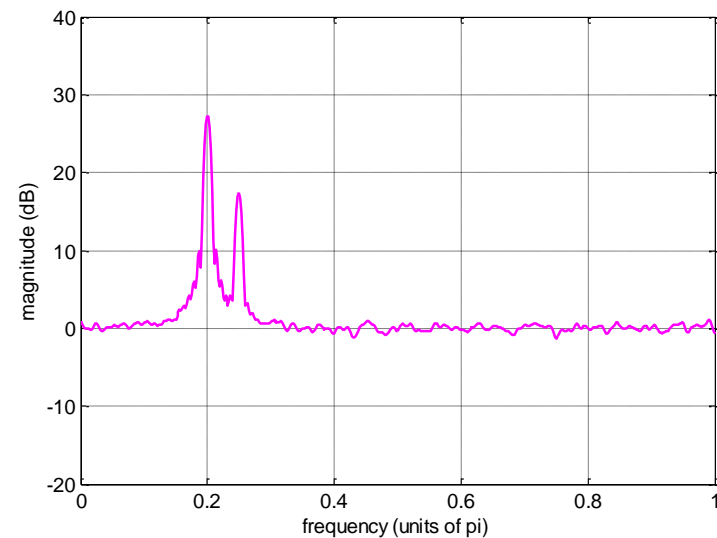
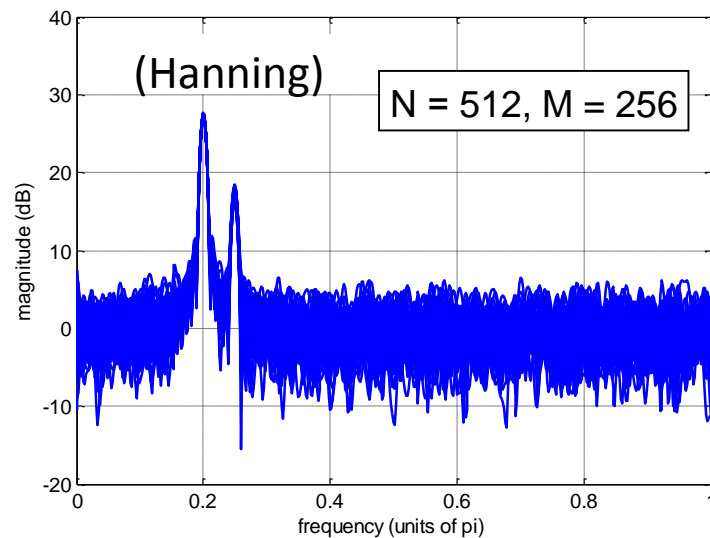
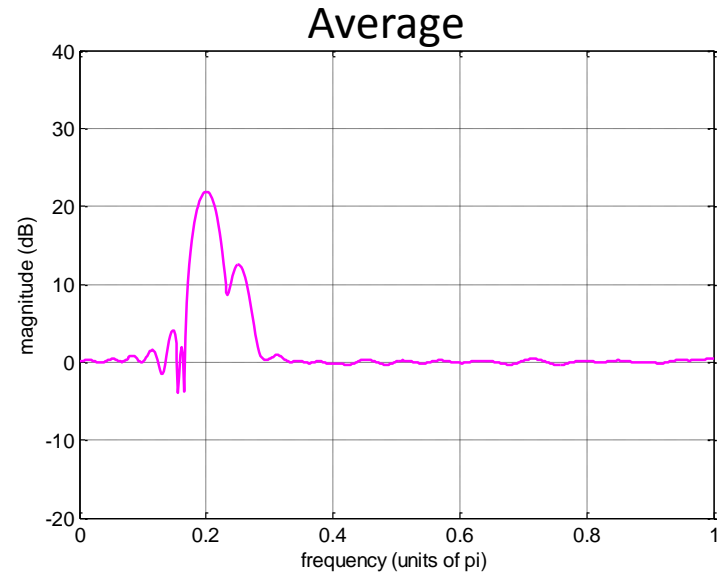
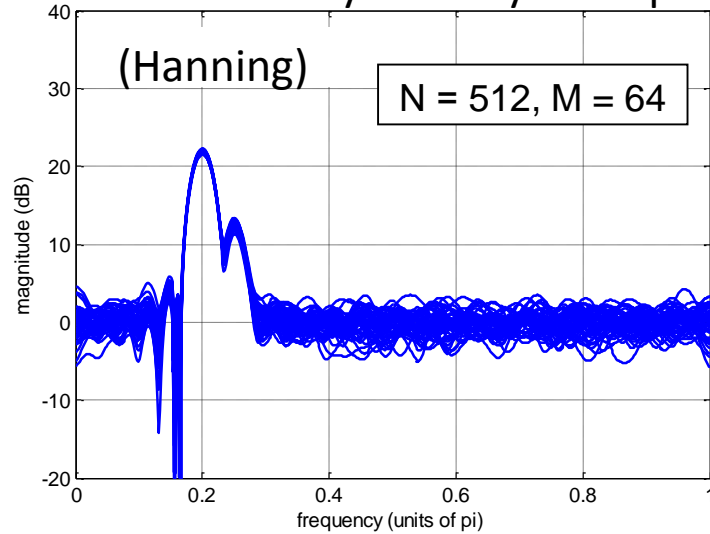


Μη παρ. μέθοδοι: Μέθοδος Blackman-Tukey (3/5)



Μη παρ. μέθοδοι: Μέθοδος Blackman-Tukey (4/5)

(B) Blackman - Tukey: overlay of 50 plots



Μη παρ. μέθοδοι: Μέθοδος Blackman-Tukey (5/5)

- Από ιδιότητα ΜΦΔΤ:

$$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k)w(k)e^{-j\omega k} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \hat{P}_{per}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Το παράθυρο $w(n)$ **εξομαλύνει** το περιοδόγραμμα και πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $W(e^{j\omega}) \geq 0$, ώστε να εξασφαλίζεται η ιδιότητα $\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) \geq 0$.
- Ορίζουμε την κανονικοποιημένη διασπορά του εκτιμητή φάσματος ως κριτήριο απόδοσης (το κριτήριο ονομάζεται και **variability**):

$$V = \text{var} \left\{ \hat{P}_x(e^{j\omega}) \right\} / E^2 \left\{ \hat{P}_x(e^{j\omega}) \right\}$$

- Ορίζουμε το γινόμενο της ποσότητας V με τη διακριτική ικανότητα $\Delta\omega$ ως γενικό κριτήριο ποιότητας (το κριτήριο ονομάζεται και **overall figure of merit**):

$$M = V\Delta\omega$$

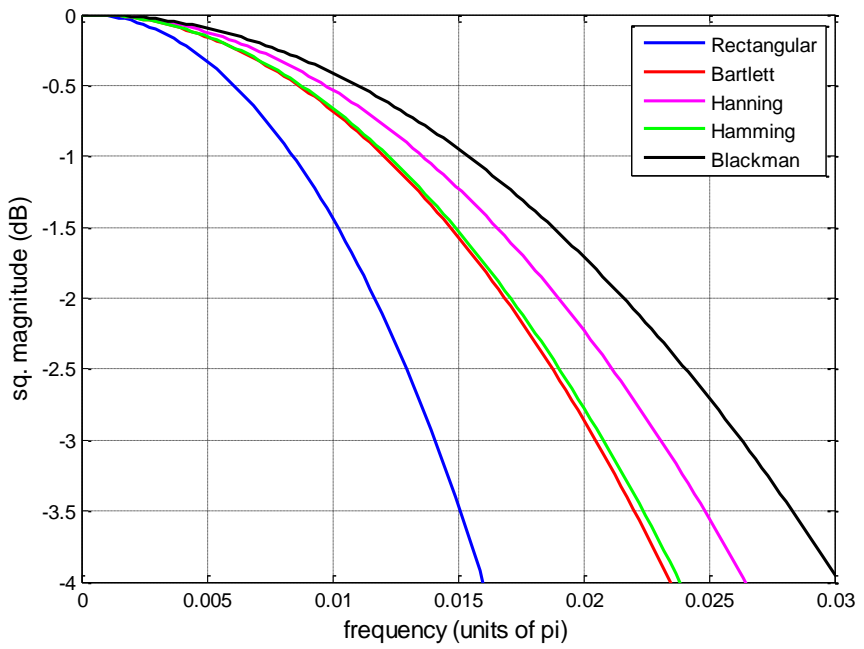
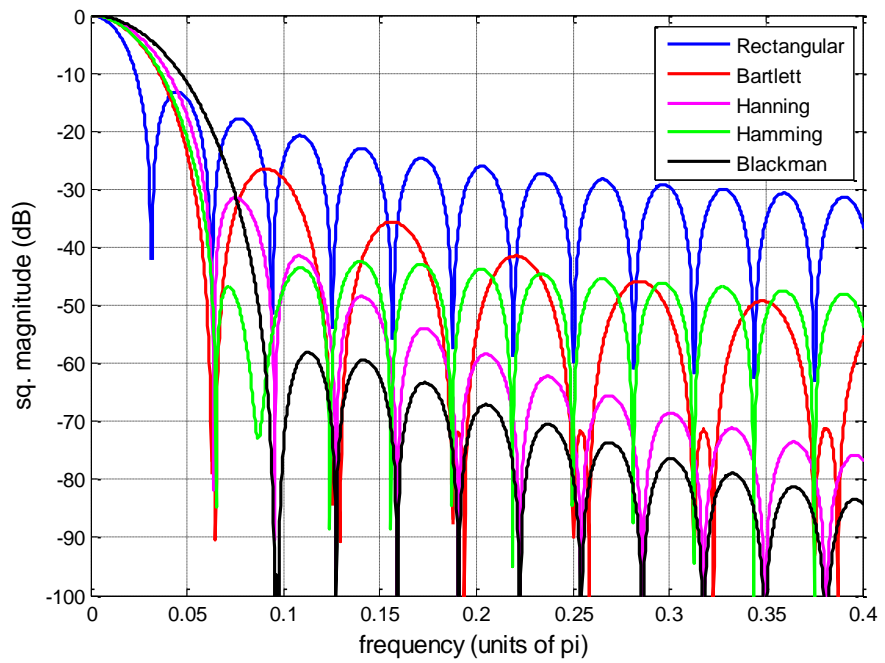


Εκτίμηση φάσματος: Σύγκριση μη παρ. μεθόδων (1/2)

| | Variability | Resolution | Figure of Merit |
|----------------------|--|---|---------------------------|
| Periodogram: | $V = \frac{P_x^2(e^{j\omega})}{P_x^2(e^{j\omega})} = 1$ | $\Delta\omega = 0.89 \frac{2\pi}{N}$ | $M = 0.89 \frac{2\pi}{N}$ |
| Mod. Periodogram: | $V = \frac{P_x^2(e^{j\omega})}{P_x^2(e^{j\omega})} = 1$ | Window dependent: Bartlett: $\Delta\omega = 1.28(2\pi/N)$ | $M = 1.28 \frac{2\pi}{N}$ |
| Bartlett: | $V = \frac{\frac{1}{K} P_x^2(e^{j\omega})}{P_x^2(e^{j\omega})} = \frac{1}{K}$ | $\Delta\omega = 0.89K \frac{2\pi}{N}$ | $M = 0.89 \frac{2\pi}{N}$ |
| Welch (50% overlap): | $V = \frac{\frac{9}{8K} P_x^2(e^{j\omega})}{P_x^2(e^{j\omega})} \approx \frac{9L}{16N}$ | Window dependent: Bartlett: $\Delta\omega = 1.28(2\pi/L)$ | $M = 0.72 \frac{2\pi}{N}$ |
| Blackman-Tukey: | $V = \frac{P_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=-m}^m w^2(k)}{P_x^2(e^{j\omega})} \approx \frac{2M}{3N}$ | Window dependent: Bartlett: $\Delta\omega = 1.28(2\pi/2M)$ | $M = 0.43 \frac{2\pi}{N}$ |



Εκτίμηση φάσματος: Σύγκριση μη παρ. μεθόδων (2/2)



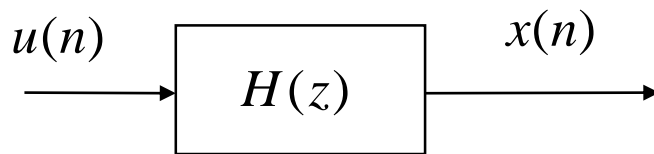
| Window | Sidelobe level (dB) | $\Delta\omega_{3\text{-dB}}$ BW | $\Delta\omega_{3\text{-dB}}(N = 64) / 2$ |
|-------------|---------------------|---------------------------------|--|
| Rectangular | -13 | $0.89(2\pi/N)$ | 0.014 |
| Bartlett | -27 | $1.28(2\pi/N)$ | 0.020 |
| Hanning | -32 | $1.44(2\pi/N)$ | 0.023 |
| Hamming | -43 | $1.30(2\pi/N)$ | 0.020 |
| Blackman | -58 | $1.68(2\pi/N)$ | 0.026 |



Παραμετρικές μέθοδοι

Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (1/7)

- Μία διαδικασία **AR(p)**, έστω $x(n)$, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η έξοδος ενός all-pole φίλτρου $H(z)$ με είσοδο λευκό θόρυβο $u(n)$ μοναδιαίας διασποράς, δηλαδή $\sigma_u^2 = 1$:



$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}}$$

- Το φάσμα της διαδικασίας AR(p) είναι:

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{|b(0)|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a(k)e^{-j\omega k} \right|^2}$$

- Συνεπώς, αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους $b(0)$ και $a(k)$ από τις μετρήσεις $x(n)$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το φάσμα $\hat{P}_x(e^{j\omega})$.



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (2/7)

- Η διαδικασία AR(p) ικανοποιεί τις εξισώσεις **Yule-Walker**:

$$r_x(k) + \sum_{l=1}^p a(l)r_x(k-l) = |b(0)|^2 \delta(k) \quad ; \quad k \geq 0 \quad \text{για } k = 1, \dots, p$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}}_{\text{Toeplitz}} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(p) \end{bmatrix}$$

- Αν λοιπόν γνωρίζουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης για $k = 0, \dots, p$, λύνουμε το παραπάνω σύστημα και βρίσκουμε τους συντελεστές $a(k)$. Από τις τιμές του σήματος στο διάστημα $0 \leq n \leq N - 1$, υπολογίζουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x^*(n-k) \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, p$$



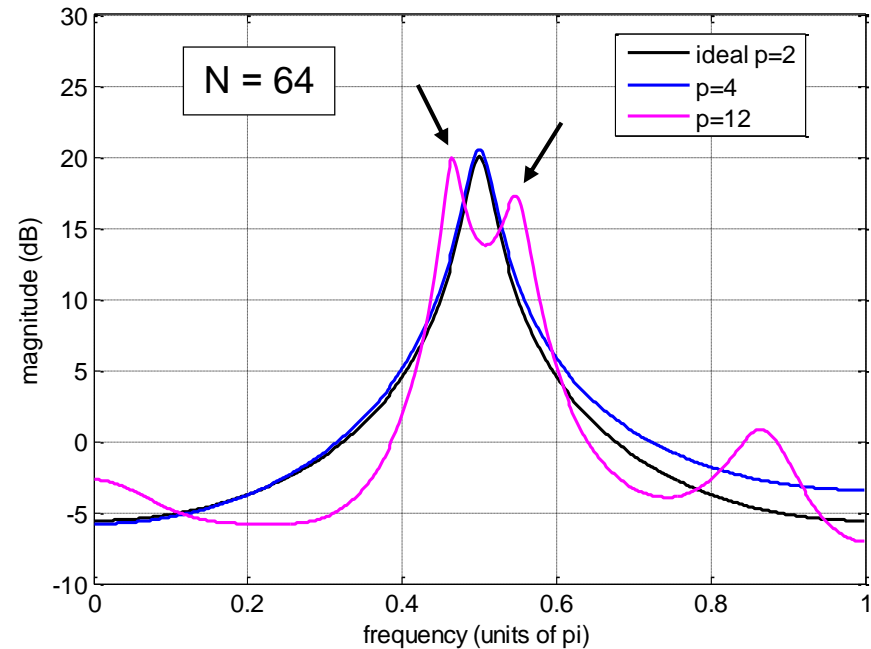
Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (3/7)

- Κατόπιν, υπολογίζουμε το $b(0)$ από τις εξισώσεις YW για $k = 0$:

$$|b(0)|^2 = r_x(0) + \sum_{l=1}^p a(l)r_x^*(l)$$

- Η παραπάνω μέθοδος λέγεται **μέθοδος αυτοσυσχέτισης** ή **μέθοδος YW**.

- Όταν ο αριθμός των πόλων p που χρησιμοποιούμε στη μοντελοποίηση είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με το φυσικό μηχανισμό της διαδικασίας (η διαδικασία τότε χαρακτηρίζεται ως **overmodeled**), η μέθοδος μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο διαχωρισμού των φασματικών γραμμών της διαδικασίας (**spectral line splitting**).



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (4/7)

- Στη μέθοδο **αυτοσυσχέτισης**, ο υπολογισμός των εκτιμήσεων $\hat{r}_x(k)$ γίνεται αφού εφαρμόσουμε ένα **τετραγωνικό παράθυρο** στα δεδομένα, βλέπε συνάρτηση $\hat{r}_x(k)$. Μια άλλη προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\hat{r}_x(k,l) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-l)x^*(n-k) \quad ; \quad k = 0,1,\dots,p \quad \text{και} \quad l = 1,\dots,p$$

- Το σύστημα υπολογισμού των συντελεστών του παρονομαστή είναι:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x(1,1) & r_x(2,1) & \dots & r_x(p,1) \\ r_x(1,2) & r_x(2,2) & \dots & r_x(p,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(1,p) & r_x(2,p) & \dots & r_x(p,p) \end{bmatrix}}_{\text{όχι Toeplitz}} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(0,1) \\ r_x(0,2) \\ \vdots \\ r_x(0,p) \end{bmatrix}$$

- Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται μέθοδος **συνδιασποράς** και για μικρό αριθμό δειγμάτων N αναμένεται καλύτερη απόδοση ως προς τη μέθοδο αυτοσυσχέτισης.

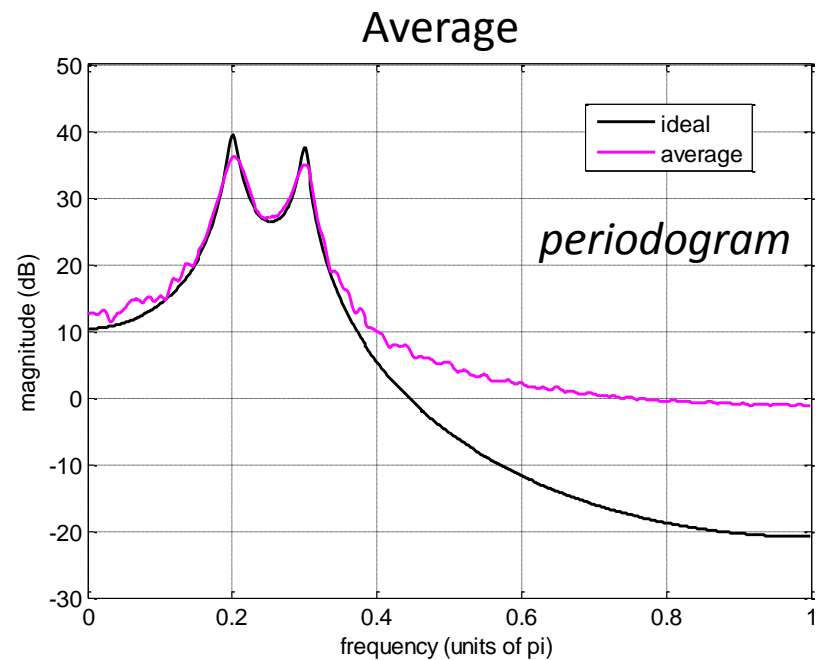
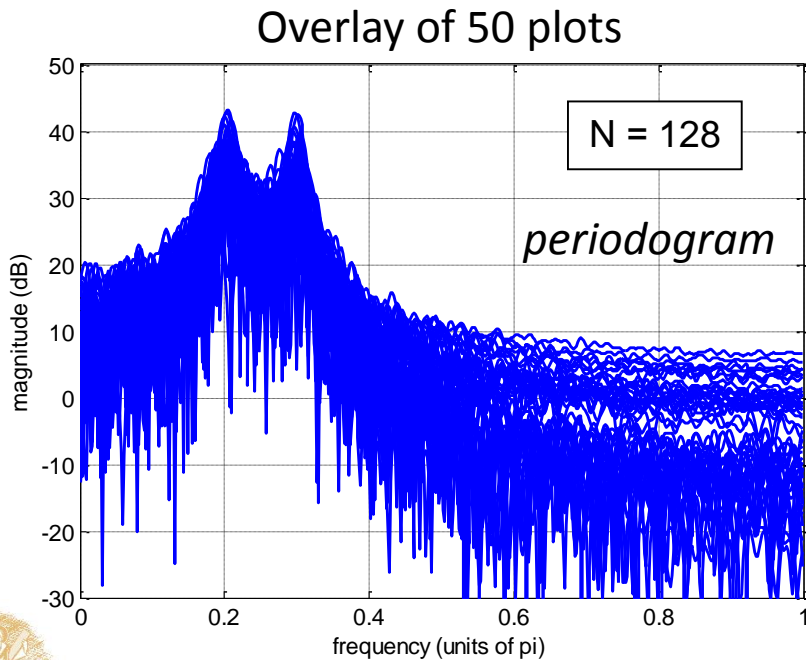


Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (5/7)

- Παράδειγμα:** Θεωρούμε την παρακάτω AR(4) διαδικασία, όπου $u(n)$ λευκός θόρυβος μοναδιαίας διασποράς:

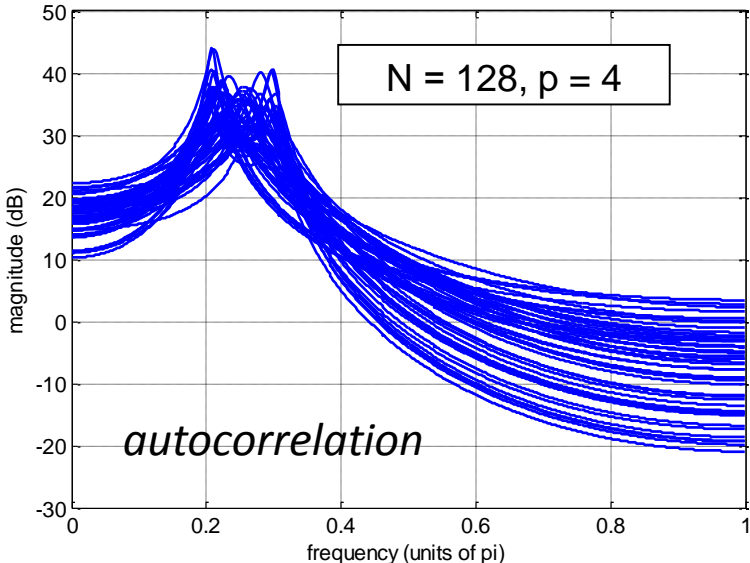
$$x(n) = 2.737x(n-1) - 3.747x(n-2) + 2.629x(n-3) - 0.922x(n-4) + u(n) \quad \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2.737z^{-1} + 3.746z^{-2} - 2.629z^{-3} + 0.922z^{-4}}$$

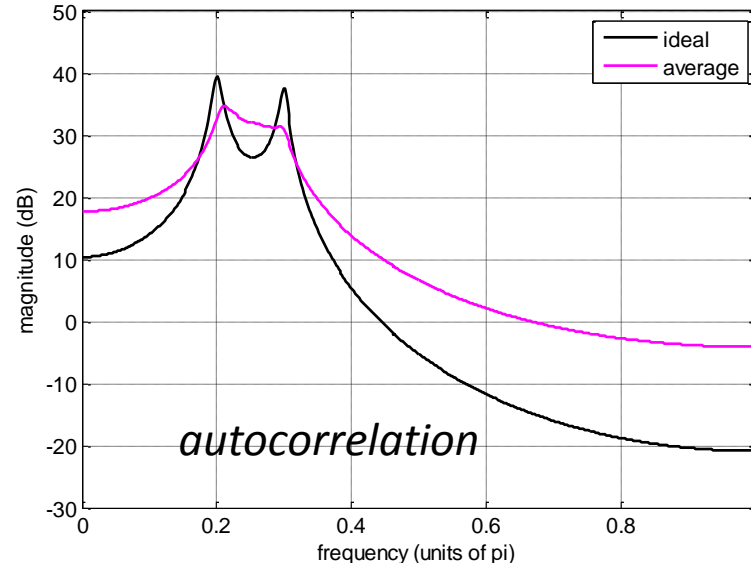


Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (6/7)

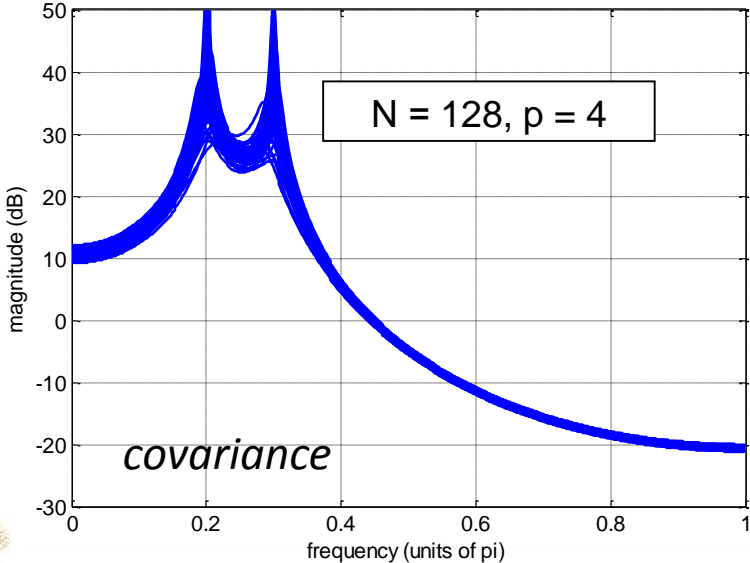
Overlay of 50 plots



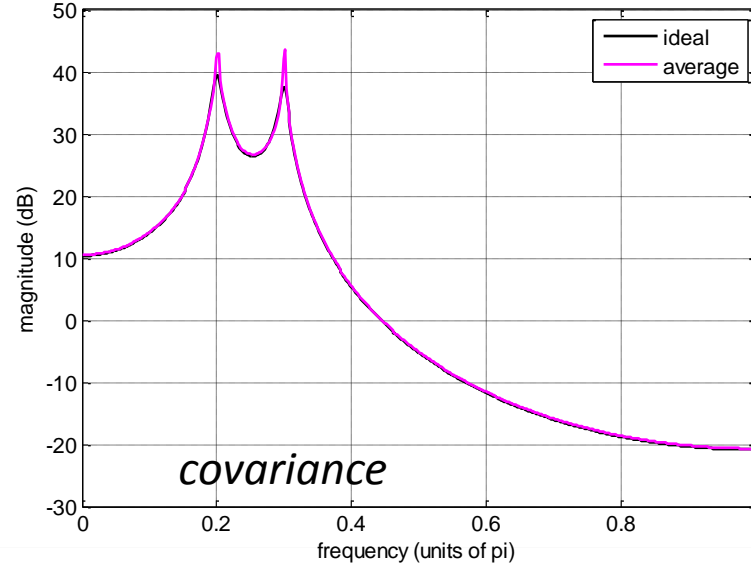
Average



Overlay of 50 plots



Average



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος AR (7/7)

- Ένα κρίσιμο ερώτημα στη μοντελοποίηση της AR διαδικασίας είναι η επιλογή της **τάξης** του μοντέλου. Για το σκοπό αυτό έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια:

$$\text{AIC}(p) = N \log E + 2p$$

$$\text{MDL}(p) = N \log E + p \log N$$

$$\text{FPE}(p) = E \frac{N + p + 1}{N - p - 1}$$

$$\text{CAT}(p) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p \frac{N - j}{NE_j} - \frac{N - p}{NE}$$

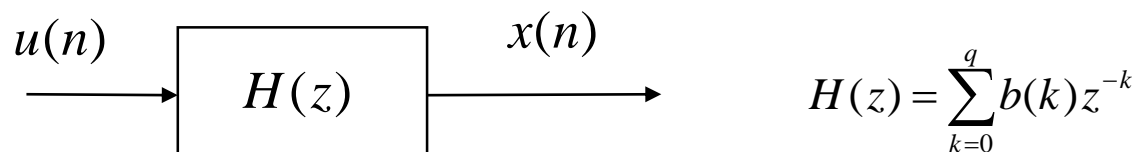
Επιλέγουμε ως "καλύτερη" τάξη, την τιμή p για την οποία ελαχιστοποιείται το κριτήριο.

- Σημειώνεται ότι N είναι ο αριθμός των δειγμάτων και E το σφάλμα μοντελοποίησης.
- Τα παραπάνω κριτήρια δεν είναι απόλυτα, αλλά μόνο **ενδεικτικά** της τάξης του μοντέλου.



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (1/6)

- Μία διαδικασία **ΜΑ(q)**, έστω $x(n)$, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η έξοδος ενός FIR φίλτρου $H(z)$ με είσοδο λευκό θόρυβο $u(n)$ μοναδιαίας διασποράς, δηλαδή $\sigma_u^2 = 1$:



- Το φάσμα της διαδικασίας ΜΑ(q) είναι:

$$P_x(e^{j\omega}) = \left| \sum_{k=0}^q b(k)e^{-j\omega k} \right|^2$$

- Οι εξισώσεις **Yule-Walker** γράφονται:

$$r_x(k) = b(k) * b^*(-k) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{q-|k|} b(l+|k|)b^*(l) & ; |k| \leq q \\ 0 & ; |k| > q \end{cases}$$

Μη γραμμικές εξισώσεις ως προς τους συντελεστές $b(k)$.



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (2/6)

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι η αυτοσυσχέτιση μιας ΜΑ(q) διαδικασίας έχει **πεπερασμένο μήκος**, μπορούμε αρχικά να εκτιμήσουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης και κατόπιν να εκτιμήσουμε το φάσμα της διαδικασίας:

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-q}^q \hat{r}_x(k) e^{-j\omega k}$$

- Η παραπάνω διαδικασία είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο Blackman-Tukey για τετραγωνικό παράθυρο (**Σημείωση**: η μέθοδος ΒΤ είναι γενική και δεν κάνει καμία υπόθεση για το φυσικό μηχανισμό - μοντέλο - της διαδικασίας).
- Μια εναλλακτική προσέγγιση περιλαμβάνει αρχικά την εκτίμηση των παραμέτρων $b(k)$ και στη συνέχεια την εκτίμηση του φάσματος:

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \left| \sum_{k=0}^q \hat{b}(k) e^{-j\omega k} \right|^2$$



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (3/6)

- Υπολογισμός των παραμέτρων $b(k)$ με τον αλγόριθμο **Durbin**:
 - Έστω $x(n)$ μια ΜΑ(q) διαδικασία: $B(z) = \sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}$
 - Υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα all-pole μοντέλο τάξης p , όπου p αρκετά μεγάλο, ώστε να γράψουμε:

$$B(z) \approx \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{a(0) + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}}$$

- Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές $a(k)$, μπορούμε από τη σχέση να αναζητήσουμε ένα all-pole μοντέλο τάξης q , το οποίο μοντελοποιεί την ακολουθία $a(k)$. Οι συντελεστές του all-pole μοντέλου τάξης q είναι η εκτίμηση για τους συντελεστές $b(k)$.



Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (4/6)

- Αλγόριθμος **Durbin**:
 1. Από τις τιμές του σήματος $x(n)$ για $0 \leq n \leq N - 1$, κάνουμε μια εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης $\hat{r}_x(k)$ για $|k| \leq N - 1$.
 2. Υπολογίζουμε ένα μοντέλο all-pole τάξης $p \geq 4q$ (π.χ. με τη μέθοδο αυτο-συσχέτισης) και κανονικοποιούμε τους συντελεστές, ώστε ο αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου $1/A(z)$ να είναι μονάδα.
 3. Χρησιμοποιώντας τους συντελεστές της AR(p) διαδικασίας του παραπάνω βήματος ως δεδομένα, υπολογίζουμε ένα μοντέλο all-pole τάξης q . Οι συντελεστές που βρίσκουμε είναι οι συντελεστές της MA(q) διαδικασίας.

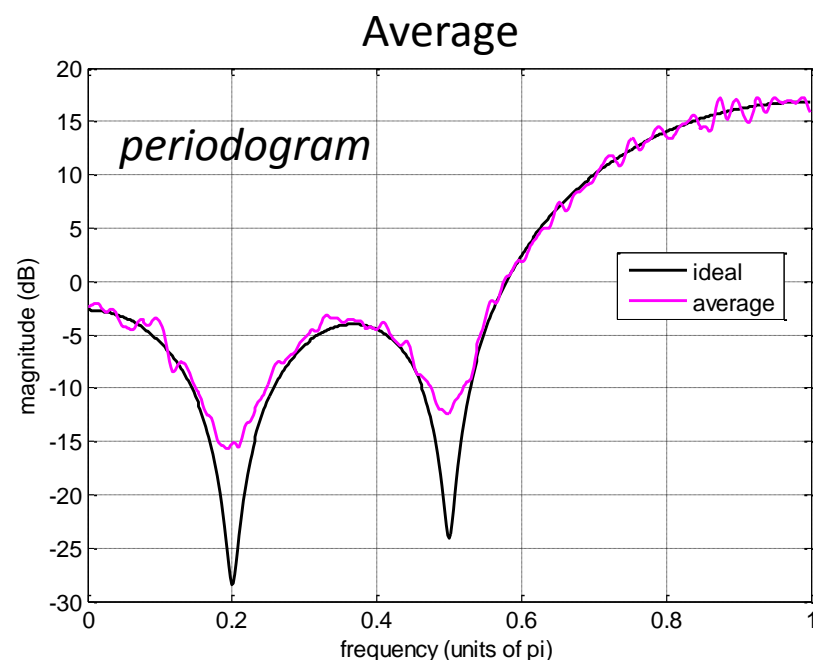
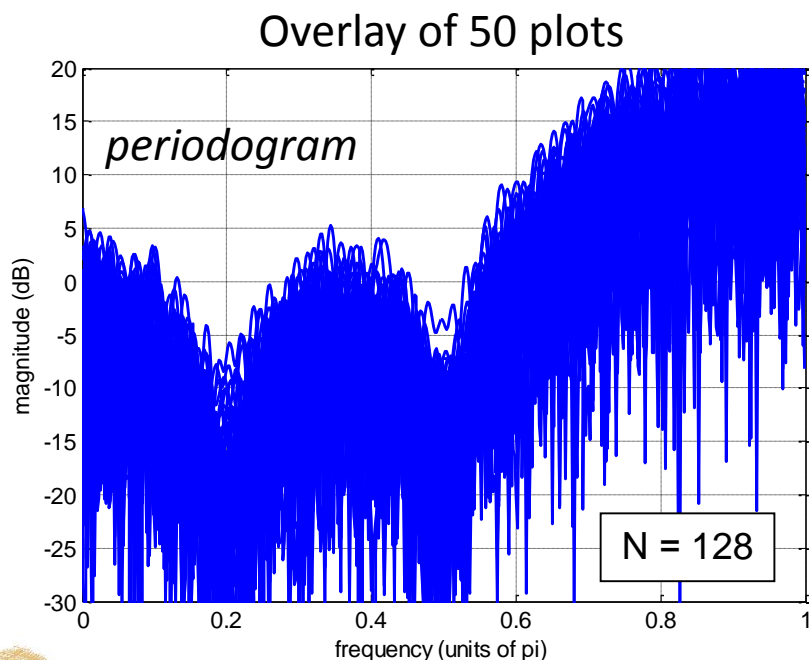


Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (5/6)

- Παράδειγμα:** Θεωρούμε την παρακάτω ΜΑ(4) διαδικασία, όπου $u(n)$ λευκός θόρυβος μοναδιαίας διασποράς:

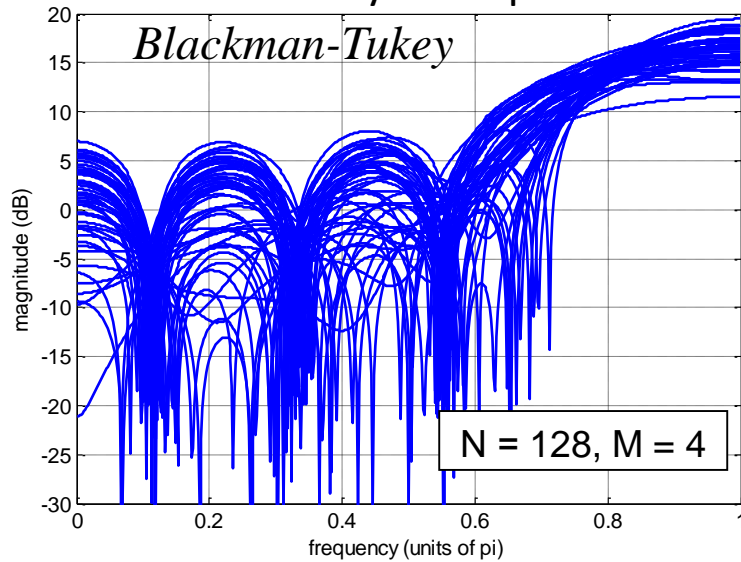
$$x(n) = u(n) - 1.585u(n-1) + 1.920u(n-2) - 1.523u(n-3) + 0.922u(n-4) \quad \Rightarrow$$

$$H(z) = 1 - 1.585z^{-1} + 1.920z^{-2} - 1.523z^{-3} + 0.922z^{-4}$$

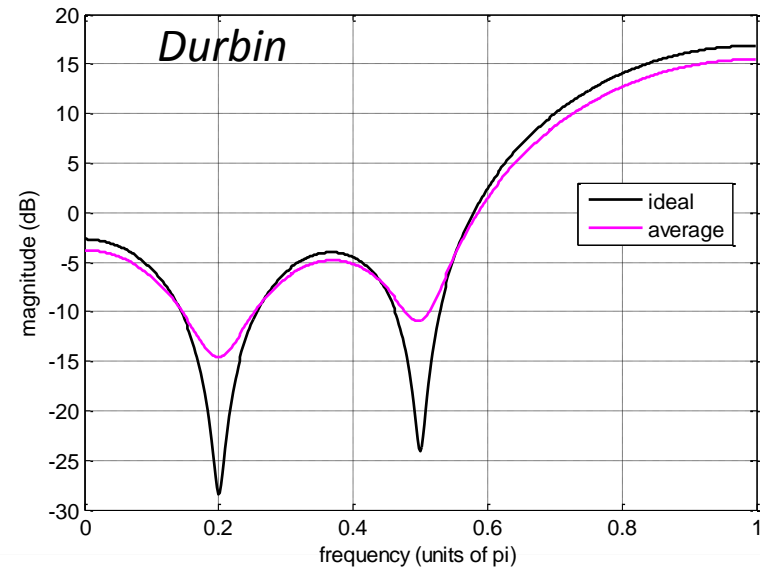
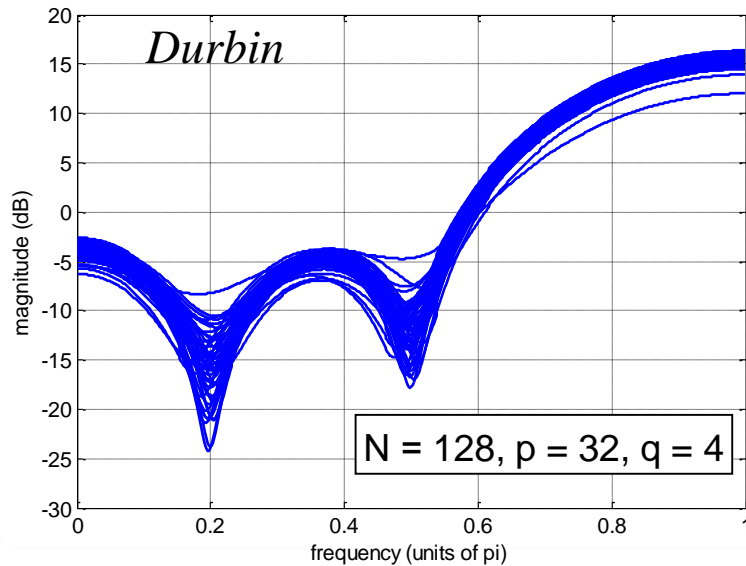
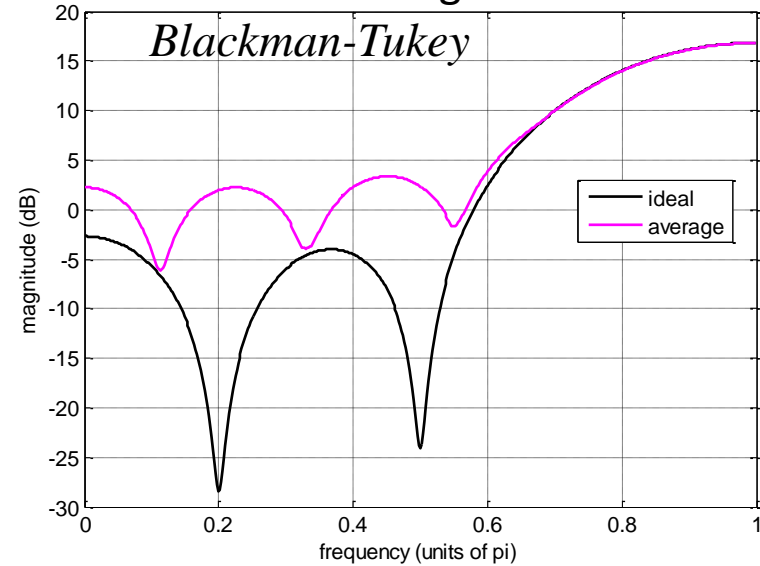


Παραμετρικές Μέθοδοι: Εκτίμηση Φάσματος ΜΑ (6/6)

Overlay of 50 plots



Average



Τέλος Ενότητας 6

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κώστας Μπερμπερίδης. «Στοχαστικά Σήματα και Τηλεπικοινωνίες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1111/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

