**Αυτόματος συλλογισμός**

**Β.** Δίνεται το παρακάτω σύνολο λογικών προτάσεων (μετονομασία μεταβλητών έχει ήδη γίνει):

S = {(x) P(x), (y) P(y)  Q(y), (x) (z) (w) (P(z)  Q(z))  (P(w)  Q(x))}

Ελέγξτε αν είναι ικανοποιήσιμο.

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να ελέγξουμε αν είναι ικανοποιήσιμο, θα πρέπει να ελέγξουμε αν μπορεί να παραχθεί η κενή πρόταση εφαρμόζοντας τον κανόνα της επίλυσης. Αν παραχθεί, είναι μη ικανοποιήσιμο, αλλιώς είναι ικανοποιήσιμο.

Μετατροπή προτάσεων σε ΠΜ

**(1)** (x) P(x)  **{P(a)}** όπου a σταθερά

**(2)** (y) P(y)  Q(y)  **{****P(y), Q(y)}**

**(3)** (x) (z) (w) (P(z)  Q(z))  (P(w)  Q(x))  (x) (z) (w) (P(z) V Q(z))  (P(w) V Q(x))  (x) (z) (w)  (P(z) V Q(z)) V (P(w) V Q(x))  (x) (z) (w) (P(z) Λ Q(z)) V (P(w) V Q(x)) 

(P(z) Λ Q(z)) V (P(w) V Q(a)) όπου a σταθερά (ίδια με παραπάνω-λόγω ίδιας x) 

(P(z) V P(w) V Q(b)) Λ (Q(z) V P(w) V Q(a)) 

## (3.1) {P(z),P(w), Q(a)} (3)

**(3.2) {****Q(z),****P(w),** **Q(a)} (4)**

Επίλυση προτάσεων

(1) – (2): με σ1 = {a/y}  **{Q(a)} (4)**

(1) – (3.2): με σ2 = {a/w}  **{****Q(z),** **Q(a)} (5)**

(5): με σ3 = {a/z} (παραγοντοποίηση)  **{****Q(a)} (6)**

(4) – (6): **{ }**

Άρα είναι ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΗ

**Γ.** Έστω οι εξής προτάσεις ΚΛ:

(1) (∀𝑥)(𝑃ℎ𝐷(𝑥) ⟹ 𝐻𝑖𝑔ℎ𝑙𝑦𝑄𝑢𝑎𝑙𝑖𝑓𝑖𝑒𝑑(𝑥))

(2) (∀𝑥)(¬𝑃ℎ𝐷(𝑥) ⟹ 𝐸𝑎𝑟𝑙𝑦𝐸𝑎𝑟𝑛𝑖𝑛𝑔𝑠(𝑥))

(3) (∀𝑥)(𝐻𝑖𝑔ℎ𝑙𝑦𝑄𝑢𝑎𝑙𝑖𝑓𝑖𝑒𝑑(𝑥) ⟹ 𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑥))

(4) (∀𝑥)(𝐸𝑎𝑟𝑙𝑦𝐸𝑎𝑟𝑛𝑖𝑛𝑔𝑠(𝑥) ⟹ 𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑥))

Εφαρμόστε αντίφαση της επίλυσης για να αποδείξετε την πρόταση 𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑀𝑒), όπου το 𝑀𝑒 είναι σταθερά.

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να εφαρμόσουμε την αντίφαση της επίλυσης πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τις προτάσεις σε ΠΜ:

(1) {¬𝑃ℎ𝐷(𝑥), 𝐻𝑖𝑔ℎ𝑙𝑦𝑄𝑢𝑎𝑙𝑖𝑓𝑖𝑒𝑑(𝑥)} (2){ 𝑃ℎ𝐷(𝑦), 𝐸𝑎𝑟𝑙𝑦𝐸𝑎𝑟𝑛𝑖𝑛𝑔𝑠(𝑦)}

(3) {¬𝐻𝑖𝑔ℎ𝑙𝑦𝑄𝑢𝑎𝑙𝑖𝑓𝑖𝑒𝑑(𝑧), 𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑧)}

(4) {¬𝐸𝑎𝑟𝑙𝑦𝐸𝑎𝑟𝑛𝑖𝑛𝑔𝑠(𝑤), 𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑤)}

Στη συνέχεια παίρνουμε την άρνηση του αποδεικτέου:

¬𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑀𝑒) και την μετατρέπουμε σε ΠΜ:

(5): {¬𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑀𝑒)}

Τώρα εφαρμόζουμε τον κανόνα της επίλυσης διαδοχικά, μέχρι να παραχθεί η κενή πρόταση (αν παραχθεί):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Από (5) και (3) με {𝑀𝑒/𝑧}, έχουμε: | {¬𝐻𝑖𝑔ℎ𝑙𝑦𝑄𝑢𝑎𝑙𝑖𝑓𝑖𝑒𝑑(𝑀𝑒)} | (6) |
| Από (6) και (1) με {𝑀𝑒/𝑥}, έχουμε: | {¬𝑃ℎ𝐷(𝑀𝑒)} | (7) |
| Από (7) και (2) με {𝑀𝑒/𝑦}, έχουμε: | {𝐸𝑎𝑟𝑙𝑦𝐸𝑎𝑟𝑛𝑖𝑛𝑔𝑠(𝑀𝑒)} | (8) |
| Από (8) και (4) με {𝑀𝑒/𝑤}, έχουμε: | {𝑅𝑖𝑐ℎ(𝑀𝑒)} | (9) |
| Από (9) και (5), έχουμε: | { } | (10) |

Έχει παραχθεί η κενή πρόταση, οπότε αποδείχθηκε το ζητούμενο.

**Δ.** Δίνεται το παρακάτω σύνολο προτάσεων :

T ⇒ (R Q), (P  ¬Q) ⇒ R, (¬T  ¬P) ⇒ ¬S, ¬Q, S, ¬T

(α) Ποια από τις στρατηγικές Γραμμική Επίλυση και Μοναδιαία Επίλυση είναι ασφαλέστερη για αυτό το σύνολο προτάσεων και γιατί;

(β) Χρησιμοποιείστε τη διαδικασία της αντίφασης της επίλυσης και την ασφαλέστερη στρατηγική που επιλέξατε στο (α) για να αποδείξετε ότι η R είναι θεώρημα.

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Κατ’ αρχήν μετατρέπουμε το σύνολο σε προτασιακή μορφή:

(1) {¬T, R, Q}

(2) {¬P, Q, R}

(3) {T, P, ¬S}

(4) {¬Q}

(5) {S}

(6) {¬T}

Η Γραμμική-Επίλυση είναι πάντα πλήρης. Αντίθετα, η Μοναδιαία είναι πλήρης μόνο για προτάσεις τύπου Horn. Όμως, για παράδειγμα, η πρόταση {¬T ,R ,Q} δεν είναι τύπου Horn αφού έχει περισσότερα από ένα θετικά στοιχεία, επομένως η Μοναδιαία επίλυση δεν είναι πλήρης για το συγκεκριμένο σύνολο προτάσεων. Άρα ασφαλέστερη στρατηγική είναι η Γραμμική Επίλυση που είναι πλήρης.

β) Σύμφωνα με την διαδικασία της αντίφασης της επίλυσης, παίρνουμε την άρνηση της προς απόδειξη πρότασης (¬R), την μετατρέπουμε σε ΠΜ ({¬R})και την εισάγουμε στο αρχικό σύνολο προτάσεων:

(7) {¬R}

Στη συνέχεια, επιλύοντας σύμφωνα με την επιλεγείσα στρατηγική προσπαθούμε να καταλήξουμε στην κενή πρόταση. Να θυμηθούμε στο σημείο αυτό ότι στην Γραμμική Επίλυση πρέπει σε κάθε βήμα της επίλυσης ο ένας γονέας να είναι η πιο πρόσφατη επιλύουσα, και ξεκινά από την προς απόδειξη πρόταση.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (7) – (1): | {¬T, Q} | (8) |
| (8) – (3): | {P, ¬S, Q} | (9) |
| (9) – (4): | {P, ¬S} | (10) |
| (10) – (5): | {P} | (11) |
| (11) – (2): | {Q, R} | (12) |
| (12) – (4): | {R} | (13) |
| (13) – (7): | { } |  |

Επομένως, η R είναι θεώρημα, δηλ. αποδείχτηκε.

**Ε.** Ποιο/ά από τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα;

# 1. { x Q(x), x (Q(x)  R(x)), x R(x)}.

2. { y x P(x,y), x P(x,x)}.

# 3. { x y (P(x,y)  P(y,y)), x P(x,x), x y P(x,y)}.

4. { x y P(x,y), x P(x,x)}.

# 5. { x Q(x), x Q(x)}.

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΣΥΝΟΛΟ 1

Μετατροπή των προτάσεων σε ΠΜ

# (1-1) x Q(x)  **{Q(a)}** όπου a σταθερά

(1-2) x (Q(x)  R(x))  **{****Q(x1), R(x1)}**

(1-3) x R(x)  **{****R(x2)}**

# Επιλύσεις

(1-1) – (1-2): με σ1 = {a/x1}  **{R(a)} (1-4)**

# (1-4) – (1-3): με σ2 = {a/x2}  **{ }**

Άρα μη ικανοποιήσιμο.

ΣΥΝΟΛΟ 2

Μετατροπή των προτάσεων σε ΠΜ

(2-1) y x P(x,y)  **{P(x1, a)}** όπου a σταθερά (2-2) x P(x,x)  **{****P(x2, x2)}**

Επιλύσεις

# (2-1) – (2-2): με σ={a/x1, a/x2}  { } Άρα μη ικανοποιήσιμο.

ΣΥΝΟΛΟ 3

Μετατροπή των προτάσεων σε ΠΜ

(3-1) x y (P(x,y)  P(y,y))  **{****P(x1,y1), P(y1,y1)}**

(3-2) x P(x,x)  **{****P(x2,x2)}**

# (3-3) x y P(x,y)  **{P(a,b)}** όπου a, b σταθερές

Επιλύσεις

(3-1) – (3-2): με σ1={x2/y1}  **{****P(x1,x2)} (3-4)**

# (3-4) – (3-3): με σ2={a/x1, b/x2}  **{ }**

Άρα μη ικανοποιήσιμο.

ΣΥΝΟΛΟ 4

Μετατροπή των προτάσεων σε ΠΜ

(4-1) x y P(x,y)  **{P(x1, f(x1))}**

(4-2) x P(x,x)  **{****P(x2, x2)}**

Επιλύσεις

Η μόνη πιθανή επίλυση (4-1) – (4-2) απαιτεί την αντικατάσταση σ = {x1/x2, f(x1)/x2} η οποία δεν είναι έγκυρη, διότι η μεταβλητή x2 προσδένεται σε δύο διαφορετικές τιμές. Άρα το σύνολο είναι ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ.

ΣΥΝΟΛΟ 5

Μετατροπή των προτάσεων σε ΠΜ

(5-1) x Q(x)  **{Q(a)}**

(5-2) x Q(x)  **{****Q(x)}**

Επιλύσεις

# (5-1) – (5-2): με σ = {a/x}  **{ }**

Άρα μη ικανοποιήσιμο.