Γραμμική Άλγεβρα

Ενότητα **2** : Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοπός Ενότητας

- Διανύσματα και Γραμμικές Εξισώσεις
- Έννοια της απαλοιφής
- Αντίστροφοι
- Απαλοιφή Χρησιμοποιώντας Μητρώα - Απαλοιφή Gauss
- Απαλοιφή και Παραγοντοποίηση $A = LU$
- Μητρώα Μετάθεσης

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

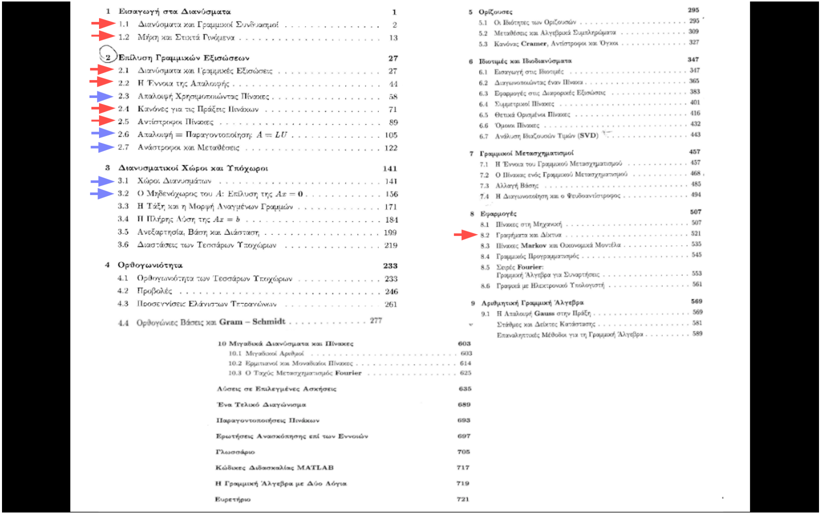
Στην προηγούμενη διάλεξη μιλήσαμε για ορισμένες χρήσεις μητρώων και διανυσμάτων.

- Περιπτώσεις εύκολης αντιστροφής ή διάγνωσης για μη αντιστρεψιμότητα,
- σχετικά με την (μη χρήση) του αντιστρόφου στην πράξη, «πίσω (και εμπρός) αντικατάσταση» για την επίλυση άνω (και κάτω) τριγωνικών συστημάτων.
- στοιχειώδη μητρώα Gauss για την απαλοιφή και μεθοδολογία επίλυσης τετραγωνικών συστημάτων.

Σήμερα θα παρουσιάσουμε:

1. Απαλοιφή Gauss: Χρήση εναλλαγών για την αποφυγή μηδενικών οδηγών (οδήγηση). Στοιχειώδη μητρώα μητρώα εναλλαγής και μητρώα μετάθεσης.
2. Παρουσίαση της διαδικασίας απαλοιφής Gauss ως μετασχηματισμό του $[A, b]$ σε $[U, \hat{b}]$ με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με ς.μ. Gauss και εναλλαγής.
3. Παραγοντοποίηση LU και επίλυση συστήματος.
4. Εφαρμογή: Εύρεση πολυωνύμου (συντελεστών της δυναμομορφής) με βάση τις τιμές του (παρεμβολή).
5. Μέθοδος Gauss-Jordan για αντιστροφή μητρώου.

Υπό συζήτηση ενότητες



The Big Picture

$$\begin{aligned} Ax = b \Rightarrow L_{n-1} \cdots L_1 A x &= L_{n-1} \cdots L_1 b \\ Ux &= \hat{b} \\ A = (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1} U &= L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U \end{aligned}$$

επομένως έχουμε την παραγοντοποίηση LU

$$A = LU, L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

Προσοχή: Να επαληθεύσετε ότι το L περιέχει κάτω από τη διαγώνιο κάθε στήλης j τα (αρνητικά) στοιχεία της στήλης j του L_j.
Κόστος Η παραγοντοποίηση LU επιτυγχάνεται σε $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ αριθμητικές πράξεις.

Εμπόδια και διαχείριση μηδενικών οδηγών I

- Πολλαπλασιάζοντας με στ.μ. Gauss επιτυγχάνουμε σταδιακά την αναγωγή του A σε άνω τριγωνική μορφή.
- Όποτε χρειάζεται, αρχίζοντας από το $A^{(0)} = A$, θα ονομάζουμε $A^{(k)}, k = 1, ..., n-1$ το μητρώο που έχει προκύψει μετά από k βήματα της διαδικασίας.

> Σε κάθε βήμα, η γραμμή που χρησιμοποιείται για να μηδενίσουμε στοιχεί- α ονομάζεται γραμμή οδηγός και το στοιχείο που χρησιμοποιείται για την απαλοιφή καλείται οδηγός.

- Στα παραπάνω, οι οδηγοί είναι τα στοιχεία $\alpha_{1,1}^{(0)}, \alpha_{2,2}^{(1)}, \cdots, \alpha_{n-1,n-1}^{(n-2,n-2)}$.

ΘΕΜΑ Αν παρουσιαστεί μηδενικός οδηγός;

Περίπτωση 1: Να μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα

Περίπτωση 2: Το μητρώο δεν είναι αντιστρέψιμο (δεν υπάρχει λύση ή υπάρχουν άπειρες λύσεις)

Εμπόδια και διαχείριση μηδενικών οδηγών II

Οδήγηση: Απαλοιφή Gauss εφαρμόζοντας κατάλληλα επιλεγμένες **εναλλαγές γραμμών και στηλών** (εξισώσεων και αγνώστων).
Πριν το βήμα k της διαδικασίας:

Απλή οδήγηση: αν το στοιχείο στη θέση (k, k) είναι μη μηδενικό, δεν κάνουμε τίποτα. Αν είναι 0, φέρνουμε μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού εναλλάσσοντας τη γραμμή k με μία από τις γραμμές $k+1$ ως n που δεν περιέχει μηδέν στη στήλη k.

Μερική οδήγηση: Όπως και στην απλή οδήγηση, αλλά επιλέγουμε και εναλλάσσουμε με τη γραμμή με το μέγιστο σε μέτρο στοιχείο στις θέσεις $k+1, \ldots, n$ στη στήλη k.

Προσοχή: Αν όλα τα στοιχεία στις θέσεις $(k, k), (k+1, k), \ldots, (n, k)$ είναι 0, τότε το μητρώο είναι μη αντιστρέψιμο.

Πλήρης οδήγηση: Επιλέγουμε να φέρουμε στη θέση (k, k) και να χρησιμοποιήσουμε ως οδηγό το μέγιστο σε μέτρο στοιχείο στις θέσεις $(k : n, k : n)$. Αυτό απαιτεί εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώο μετάθεσης αποκαλείται κάθε μητρώο που έχει προέλθει από μετάθεση των γραμμών (ή στηλών) του ταυτοτικού μητρώου.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώο μετάθεσης αποκαλείται κάθε μητρώο που έχει προέλθει από μετάθεση των γραμμών (ή στηλών) του ταυτοτικού μητρώου.

Προσέξτε:

1. Κάθε γινόμενο μητρώων εναλλαγής είναι μητρώο μετάθεσης.
2. Κάθε μητρώο μετάθεσης μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο μητρώων εναλλαγής (μη μοναδικά).

Παρατήρηση: Το αντίστροφο μητρώου μετάθεσης είναι μητρώο μετάθεσης.

$$(P_{2,j_2}P_{1,j_1})^{-1} = P_{1,j_1}^{-1}P_{2,j_2}^{-1} = P_{1,j_1}^{\top}P_{2,j_2}^{\top} = P_{1,j_1}P_{2,j_2}$$

Απλή οδήγηση I

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Ως έχει, δεν μπορούμε να μηδενίσουμε .... ΜΗΠΩΣ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ;

Απλή οδήγηση ΙΙ

Παράδειγμα

$$P_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, P_{1,2}b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1P_{1,2}b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{25}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \underbrace{L_1P_{1,2}A}_{A^{(1)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1(P_{1,2}b)) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{L_2(L_1(P_{1,2}A))}_{A^{(2)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Απλή οδήγηση III

Παράδειγμα

$$L_3(L_2(L_1(P_{1,2}b))) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}, \underbrace{L_3(L_2(L_1(P_{1,2}A)))}_{A^{(3)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Προσέξτε την παραγοντοποίηση LU:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Επίλυση με απαλοιφή Gauss με απλή οδήγηση

Αναγωγή σε άνω τριγωνικό $Ax = b \Leftrightarrow L_3L_2L_1P_{1,2}Ax = L_3L_2L_1P_{1,2}b \Leftrightarrow Ux = \hat{b}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Πίσω αντικατάσταση

<u>Βήμα 1:</u> $-\frac{11}{9}\xi_4 = \frac{11}{9} \Rightarrow \xi_4 = -1,$

<u>Βήμα 2:</u> $-4\xi_3 = \frac{22}{3} - \frac{2}{3}\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_3 = -2,$

<u>Βήμα 3:</u> $3\xi_2 = 1 - 2\overbrace{(-2)}^{\xi_3} - 1\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_2 = 2,$

<u>Βήμα 4:</u> $3\xi_1 = -5 - 0\overbrace{\;2\;}^{\xi_2} - 3\overbrace{(-2)}^{\xi_3} - 2\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_1 = 1.$

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

☺☺☺

Προσοχή:

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

☺ ☺ ☺

Προσοχή:

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!
- Μπορεί ένα μητρώο να είναι ιδιόμορφο ΚΑΙ η διαγώνιός του να μην περιέχει 0!

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

☺ ☺ ☺

Προσοχή:

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!
- Μπορεί ένα μητρώο να είναι ιδιόμορφο ΚΑΙ η διαγώνιός του να μην περιέχει 0!
- Μπορεί να χρειαστεί εναλλαγή σε επόμενο βήμα!

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, P_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(1)} = L_1 P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

προσέξτε ότι $\alpha_{2,2}^{(1)} \neq 0$ επομένως δεν χρειάστηκε εναλλαγή,

$$A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix},$$

όμως $\alpha_{3,3}^{(2)} = 0$, επομένως εναλλαγή

$$P_{3,4} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

που είναι άνω τριγωνικό.

Διαχωρισμός στοιχειωδών μητρώων: εναλλαγής από Gauss

Έστω ότι συμβολίζουμε τις εναλλαγές με P_j όπου υπονοείται ότι αφορά σε εναλλαγή της γραμμής j με γραμμή j (οπότε τετριμμένη εναλλαγή, δηλ. $P_{j,j} = I$) ή με μία από τις γραμμές $j+1, j+2, ..., n$.
π.χ. αν $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, ισχύει (αφού $P_jP_j = I$):

$$\begin{aligned}
L_3P_3L_2P_2L_1P_1A &= U \\
A &= (L_3P_3L_2P_2L_1P_1)^{-1}U = P_1L_1^{-1}P_2L_2^{-1}P_3L_3^{-1}U \\
P_1A &= L_1^{-1}P_2L_2^{-1}P_3L_3^{-1}U \\
\underbrace{P_3P_2P_1}_{P} A &= \underbrace{(P_3P_2L_1^{-1}P_2P_3)}_{\hat{L}_1}\underbrace{(P_3L_2^{-1}P_3)}_{\hat{L}_2}\underbrace{L_3^{-1}}_{\hat{L}_3} U
\end{aligned}$$

επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$PA = \underbrace{\hat{L}_1\hat{L}_2\hat{L}_3}_{L} U = LU$$

Βασικά θεωρήματα παραγοντοποίησης LU

1ο θεώρημα παραγοντοποίησης LU

Εστω αντιστρέψιμο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για το οποίο ισχύει ότι τα $n-1$ πρωτεύοντα κύρια υπομητρώα $A_{1:k,1:k}$, $k=1,\dots,n-1$ του είναι αντιστρέψιμα, Τότε υπάρχουν κάτω τριγωνικό μητρώο L με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με την μονάδα και άνω τριγωνικό μητρώο U τέτοια ώστε $A = LU$. Οι παράγοντες L, U είναι μοναδικοί.

2ο θεώρημα παραγοντοποίησης LU (με οδήγηση)

Έστω αντιστρέψιμο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε υπάρχουν κάτω τριγωνικό μητρώο L με μονάδες στη διαγώνιο, άνω τριγωνικό μητρώο U και μητρώο μετάθεσης P τέτοια ώστε $LU = PA$.

Προσοχή (I): Συνήθως, όταν λέμε ότι ¨εφαρμόζουμε LU σε ένα μητρώο, εννοούμε παραγοντοποίηση τύπου $PA = LU$.
Προσοχή (II): Μη ύπαρξη παραγοντοποίησης LU με οδήγηση ισοδυναμεί με έλλειψη αντιστρεψιμότητας.

Βασικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

Απαλοιφή Gauss

- $[A, b] \to L_1P_1[A, b] \to L_2P_2L_1P_1[A, b] \rightsquigarrow\longrightarrow [Ux, L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1b]$
- Πίσω αντικατάσταση $U\mathbf{x} = \hat{b}$

Παραγοντοποίηση LU

- $A \to L_1P_1A \longrightarrow L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1A = U$
- Εμπρός αντικατάσταση: $L\mathbf{y} = P_{n-1}\cdots P_1b$, όπου $L = \hat{L}_1\cdots\hat{L}_{n-1}$ όπως σε προηγούμενη ανάλυση
- Πίσω αντικατάσταση $U\mathbf{x} = y$

Παρατηρήσεις:

- Το κυρίαρχο κόστος σε πράξεις είναι $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.
- Εφόσον υπολογίσουμε την παραγοντοποίηση LU, μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί για τη λύση με άλλο δεξιά μέλη, π.χ. $Az_i = p_i$, $i = 1, \ldots$

Γραμμικά συστήματα: Πολυωνυμική παρεμβολή

Θέμα Δίνονται n ζεύγη τιμών $T = \{(\xi_i, \beta_i), i = 1, \ldots, n\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής $p(x)$, δηλ. ένα πολυώνυμο που ικανοποιεί τις σχέσεις $p(\xi) = \beta_i$ για $i = 1, \ldots, n$.
Ερωτήματα Υπάρχει; Είναι μοναδικό;
Δεδομένα Αν οι n τιμές είναι ξ_i είναι διαφορετικές υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που ικανοποιεί τις συνθήκες.
Παράδειγμα: $T = \{(0,1),(1,4)\}$ τότε $p(x) = 3x+1$ (υπολογίζεται και με το μάτι!!!) Είναι όμως ένα 2×2 γραμμικό σύστημα!
Παράδειγμα: Όμως αν $T = \{(-1,0),(0,1),(1,4)\}$ και αναζητούμε το $p(x) = \pi_2 x^2 + \pi_1 x + \pi_0$, η εύρεση των συντελεστών απαιτεί περισσότερη δουλειά (3×3 σύστημα)

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1\xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi + \pi_2 \xi^2$ τ.ώ. $p(-1) = 0$ και $p(0) = 1, p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1\xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1\xi + \pi_2\xi^2$ τ.ώ. $p(-1) = 0$ και $p(0) = 1, p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Γενική διατύπωση

Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \cdots + \pi_{n-1}\xi^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$p(\xi_1) = \beta_1, \ldots, p(\xi_n) = \beta_n.$$

Γενική διατύπωση

Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \cdots + \pi_{n-1}\xi^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$p(\xi_1) = \beta_1, \ldots, p(\xi_n) = \beta_n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \xi_n & & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Για την επίλυση του

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Θα εφαρμόσουμε απαλοιφή Gauss επιλέγοντας για οδηγό πάντα το μέγιστο σε απόλυτη τιμή κάθε στήλης:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1[A, b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_{2,3}L_1[A, b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2P_{2,3}L_1[A, b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Με πίσω αντικατάσταση $\pi_2 = 1$, $\pi_1 = 2$, $\pi_0 = 1$ άρα το πολυώνυμο είναι $p(x) = x^2 + 2x + 1$ (δεν γράφουμε τους συντελεστές όταν είναι 1).

Μέθοδος αντιστροφής Gauss-Jordan

(Strang, σελ. 93-94)

Βήμα 1: Επαυξημένο μητρώο και αναγωγή σε άνω τριγωνική μορφή

$$(A, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Στη GJ συνεχίζουμε ως την αναγμένη μορφή: Δημιουργούμε μηδενικά πάνω από τους οδηγούς προσθέτοντας γραμμές σε αυτές που είναι από επάνω.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & \mathbf{0} & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & \mathbf{0} & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Διαίρεση κάθε γραμμής με τον αντίστοιχο οδηγό.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Το αντίστροφο του A είναι στις στήλες 4, 5, 6.

Παραγοντοποιήσεις μητρώων

Βασική ιδέα: Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, αναζητούμε υπολογίσουμε κατάλληλα μητρώα (παράγοντες) C, D, E, τ.ώ.

$$A = CDE \text{ ή γενικότερα } \quad A \approx CDE$$

Οι παράγοντες επιλέγονται να έχουν ειδικές ιδιότητες σύμφωνα με κάποιες προδιαγραφές.

Παραγοντοποιήσεις μητρώων

Βασική ιδέα: Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, αναζητούμε υπολογίσουμε κατάλληλα μητρώα (παράγοντες) C, D, E, τ.ώ.

$$A = CDE \text{ ή γενικότερα } \quad A \approx CDE$$

Οι παράγοντες επιλέγονται να έχουν ειδικές ιδιότητες σύμφωνα με κάποιες προδιαγραφές.

- π.χ. να προσφέρονται για οικονομικότερη διαχείριση από το A.
- π.χ. να αποκαλύπτουν σημαντικές πληροφορίες για το πρόβλημα.

Παρατηρήσεις:

- Αποτελούν πολύ σημαντική κατηγορία τεχνικών επίλυσης πολλών προβλημάτων της υπολογιστικής γραμμικής άλγεβρας (όχι μόνον γραμμικών συστημάτων)!
- Χρησιμοποιούνται εκτενώς σε Data Analytics, δείτε π.χ. εδώ.
- η παραγοντοποίηση ενίοτε αναφέρεται και ως διάσπαση.
- Η μεθοδολογία της παραγοντοποίησης θεωρήθηκε μία από τις πιο σημαντικές αλγοριθμικές ιδέες του 20ου αιώνα.

«Αναρίθμητες» και νέες εφαρμογές

Factorizing Gigantic Matrices: Tutorial at ECML-PKDD 2011

Christian Bauckhage (Fraunhofer IAIS), Kristian Kersting (Fraunhofer IAIS), Christian Thurau (Fraunhofer IAIS)

Tutorial description

Low-rank approximations of data matrices have become an important tool in machine learning and data mining. They allow for embedding high dimensional data in lower dimensional spaces and can therefore mitigate effects due to noise, uncover latent relations, or facilitate further processing. These properties have been proven successful in many applications areas such as bio-informatics, computer vision, text process ing, recommender systems, social network analysis, among others. Present day technologies are characterized by exponentially growing amounts of data. Recent advances in sensor technology, Internet applications, and communication networks call for methods that scale to very large and/or growing data matrices. In this tutorial, we discuss basic characteristics of matrix factorization and introduce several recent approaches that scale to modern massive data analysis problems.

Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America

CURRENT ISSUE // ARCHIVE // NEWS & MULTIMEDIA // FOR AUTHORS // ABOUT PNAS COLLECTED ARTICLES / BROW

Current Issue > vol. 106 no. 3 > Michael W. Mahoney, 697–702, doi: 10.1073/pnas.0803205106

CrossMark
click for updates

CUR matrix decompositions for improved data analysis

Michael W. Mahoney[a1] and Petros Drineas[b]

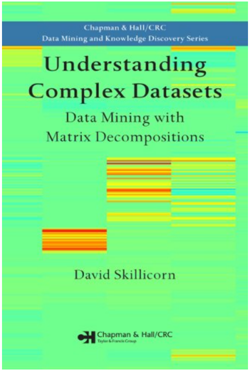
Author Affiliations

Edited by Jon Kleinberg, Cornell University, Ithaca, NY, and accepted by the Editorial Board November 11, 2008 (received for review April 3, 2008)

Abstract | Full Text | Authors & Info | Figures | SI | Metrics | +SI

Abstract

Principal components analysis and, more generally, the Singular Value Decomposition are fundamental data analysis tools that express a data matrix in terms of a sequence of orthogonal or uncorrelated vectors of decreasing importance. Unfortunately, being linear combinations of up to all the data points, these vectors are notoriously difficult to interpret in terms of the data and processes generating the data. In this article, we



Βιβλιογραφία I

G. Strang.
Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.
Εκδόσεις Πανεπιστημιου Πατρών, 2006.

Χρήση Έργου Τρίτων I

1. https://sites.google.com/site/factorizinggiganticmatrices/ (βλ. σελ 26)
2. http://www.pnas.org/content/106/3/697.abstract (βλ. σελ 26)
3. http://images.tandf.co.uk/common/jackets/amazon/978158488/9781584888321.jpg (βλ. σελ 26)

Σημείωμα Αναφοράς

``Γραμμική Άλγεβρα'', Έκδοση: 1.0, Πάτρα 2014-2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1097/

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης