

# Επιστημονικός Υπολογισμός Ι

## Ενότητα 2 - Μοντέλα Υπολογισμών

Ευστράτιος Γαλλόπουλος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά ΠΠ  
μαθήματα

**Άσκηση 1** — Να υπολογίσετε το  $\Omega$  για την πράξη

$$C \leftarrow C + AB$$

αν  $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_3}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_2}$

**Απάντηση** — Στη γενική περίπτωση τα  $n_1, n_2, n_3 > 1$ , άρα η πράξη θα αποτελείται από ένα πολλαπλασιασμό μητρώων, και μία πρόσθεση μεταξύ μητρώων.

**Πολλαπλασιασμός Μητρώων** Ο πολλαπλασιασμός  $AB$  κοστίζει  $n_1 n_2$  εσωτερικά γινόμενα μεγέθους  $n_3$ , και αυτό γιατί κάθε στοιχείο  $(i, j)$  του γινομένου προκύπτει ως η πράξη  $A(i, :)^T B(:, j)$ . Κάθε εσωτερικό γινόμενο, κοστίζει  $2n_3 - 1$  πράξεις ( $n_3$  πολλαπλασιασμούς και  $n_3 - 1$  προσθέσεις). Άρα συνολικά  $\Omega_{AB} = n_1 n_2 (2n_3 - 1)$ .

**Πρόσθεση Μητρώων** Η πρόσθεση  $C + AB$  είναι μια πράξη στοιχείο προς στοιχείο. Για αυτό απαιτεί τα μητρώα να είναι ιδίων διαστάσεων. Κάθε στοιχείο  $(i, j)$  του αποτελέσματος προκύπτει ως η πρόσθεση των στοιχείων  $AB(i, j)$  με το  $C(i, j)$ . Άρα συνολικά  $\Omega_{C+AB} = n_1 n_2$ .

Συνολικά  $\Omega = \Omega_{AB} + \Omega_{C+AB} = n_1 n_2 (2n_3 - 1) + n_1 n_2 \implies \Omega = 2n_1 n_2 n_3$ .  $\square$

**Άσκηση 2** — Να υπολογίσετε το  $\Phi_{min}$  για την πράξη

$$C \leftarrow A^T B + D$$

αν  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

**Απάντηση** — Για να υπολογίσουμε το  $\Phi_{min}$  μας ενδιαφέρει να δούμε πόσα LOAD και πόσα STORE θα γίνουν κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος θεωρώντας ότι η κρυφή μνήμη που διαθέτουμε είναι άπειρη. Στην πράξη την οποία πρέπει να αναλύσουμε παρατηρούμε ότι τα δεδομένα εισόδου είναι τα μητρώα  $A, B$  και  $D$ . Άρα πριν αρχίσει η εκτέλεση της πράξης αυτά τα τρία μητρώα πρέπει να φορτωθούν στην κρυφή μνήμη. Οπότε έχουμε:

$$\#LOAD = LOAD_A + LOAD_B + LOAD_D = mn + mn + n^2 = 2mn + n^2$$

Άρα  $\#LOAD = 2mn + n^2$ . Αφού γίνει η πράξη το αποτέλεσμα εκχωρείται στο μητρώο  $C$ , άρα αυτό πρέπει να εγγραφεί στη μνήμη.

$$\#STORE = STORE_C = n^2$$

Άρα  $\#STORE = n^2$ . Συνολικά  $\Phi_{min} = \#LOAD + \#STORE = 2mn + n^2 + n^2 \implies \Phi_{min} = 2(mn + n^2)$ .  $\square$

**Άσκηση 3** — Να υπολογίσετε το  $\mu_{min}$  για την πράξη

$$C \leftarrow C + AB$$

αν  $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_3}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_2}$  στην περίπτωση που  $n_1 = n_2 = 1$  και  $n_3 = n$ .

**Απάντηση** — Στην περίπτωση αυτή το  $C$  είναι ένας βαθμωτός, ενώ τα  $A, B$  είναι διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ . Για να βρούμε το  $\mu_{min}$  πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε το  $\Omega$  και το  $\Phi_{min}$  της πράξης.

$\Omega$  Η πράξη αποτελείται από ένα εσωτερικό γινόμενο μήκους  $n$  άρα  $2n - 1$  πράξεις, και μία πρόσθεση. Άρα  $\Omega = 2n$ .

$\Phi_{min}$  Για την πράξη φορτώνονται ένας βαθμωτός και δύο διανύσματα μήκους  $n$ , άρα  $\#LOADS = 2n + 1$  και αποθηκεύεται ένας βαθμωτός, άρα  $\#STORES = 1$ . Τότε  $\Phi_{min} = 2n + 2$ .

Άρα

$$\mu_{min} = \frac{\Phi_{min}}{\Omega} = \frac{2n + 2}{2n}$$

**Άσκηση 4** — Έστω η πράξη

$$(I - uv^T)^2$$

όπου  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  το ταυτοτικό μητρώο και  $u, v \in \mathbb{R}^n$  διανύσματα. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των πράξεων  $\Omega_1$ , β) να προσπαθήσετε να μειώσετε το κόστος πράξεων και να το αναφέρετε ως  $\Omega_2$ .

**Απάντηση** — (α) Ακολουθώντας τους κανόνες μεταξύ πράξεων, αρχικά θα γίνει η πράξη του εξωτερικού γινομένου  $uv^T$ , η οποία θα κοστίζει  $\Omega_{uv^T} = n^2$  πράξεις. Εφόσον υπολογιστεί αυτό θα γίνει η πρόσθεση με το ταυτοτικό μητρώο η οποία θα κοστίζει  $\Omega_{I+uv^T} = n^2$  πράξεις. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί το τετράγωνο το οποίο στην ουσία είναι ένα πολλαπλασιασμός μητρώων και θα κοστίζει  $\Omega_{(I+uv^T)^2} = n^2(2n - 1) = 2n^3 - n^2$  πράξεις. Συνολικά η πράξη αυτή θα χρειαστεί:

$$\Omega_1 = \Omega_{uv^T} + \Omega_{I+uv^T} + \Omega_{(I+uv^T)^2} = 2n^2 + 2n^3 - n^2 \Rightarrow \Omega_1 = 2n^3 + n^2$$

β) Ο μόνος τρόπος να μειώσουμε το κόστος πράξεων είναι να προσπαθήσουμε να γράψουμε την πράξη με διαφορετικό τρόπο. Σκοπός είναι να αποφύγουμε τον παράγοντα  $n^3$  που παρουσιάζεται στο  $\Omega_1$ . Αρχικά θα αναλύσουμε την πράξη επεκτείνοντας την.

$$(I - uv^T)^2 = (I - uv^T)(I - uv^T) = I + uv^T + uv^T + uv^T uv^T = I + 2uv^T + u(v^T u)v = I + (2 + v^T u)uv^T$$

Η πράξη στην οποία καταλήξαμε παρατηρούμε ότι αποτελείται από ένα εσωτερικό γινόμενο,  $v^T u$  με αριθμό πράξεων  $\Omega_{v^T u} = 2n - 1$ , μία πρόσθεση βαθμωτών,  $2 + v^T u$  με κόστος  $\Omega_{2+v^T u} = 1$ , ένας πολλαπλασιασμός βαθμωτού με διάνυσμα,  $(2 + v^T u)u$ , με κόστος  $\Omega_{(2+v^T u)u} = n$ , ένα εξωτερικό γινόμενο,  $uv^T$  με κόστος πράξεων  $\Omega_{(2+v^T u)uv^T} = n^2$  και μία πρόσθεση ενός μητρώου με το ταυτοτικό,  $I + (2 + v^T u)uv^T$ , με κόστος πράξεων  $\Omega_{I+(2+v^T u)uv^T} = n$ . Το κόστος της τελευταίας πράξης, περιμένουμε ότι θα είναι  $n^2$ , ωστόσο μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ειδική δομή του ταυτοτικού μητρώου, δηλαδή ότι έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στη διαγώνιο και να κάνουμε τις πράξεις μόνο με αυτά τα στοιχεία, τα οποία είναι  $n$ . Άρα συνολικά το κόστος πράξεων  $\Omega_2$  θα είναι:

$$\Omega_2 = \Omega_{v^T u} + \Omega_{2+v^T u} + \Omega_{(2+v^T u)u} + \Omega_{(2+v^T u)uv^T} + \Omega_{I+(2+v^T u)uv^T} = 2n - 1 + 1 + n + n^2 + n \Rightarrow \Omega_2 = n^2 + 4n$$

Παρατηρούμε ότι αλλάζοντας τη σειρά πράξεων μπορέσαμε και κατεβήκαμε μία τάξη στον αριθμό πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αποτελέσματος.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ευστράτιος Γαλλόπουλος 2015, "Επιστημονικός Υπολογισμός Ι", Έκδοση: 1.0 Πάτρα 2013-2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1096/>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Διανομή 4.0 ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο "Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων".



Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ