ΕΤΥ: Ανάλυση Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων
Χειμερινό Εξάμηνο 2014-15
Τελική Εξέταση
28/02/15
Διάρκεια Εξέτασης: 3 Ώρες

Ονοματεπώνυμο: ______________________

Αριθμός Μητρώου: ______________________

Υπογραφή: ______________________

Ερώτημα:	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
Μονάδες:	2	2	2	2	2	2	12
Βαθμός:							

Το ανά χείρας φύλλο εξέτασης περιέχει 6 σελίδες και 6 ερωτήματα. Παρατηρήστε πως το σύνολο των βαθμών των θεμάτων είναι 12 ενώ για την επίτευξη μέγιστης δυνατής βαθμολογίας αρκούν 10 βαθμοί. Καλή επιτυχία!

Ερώτημα 1 (2 μονάδες)

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις σημειώνοντας ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ.

(α΄) Αν μία τυχαία μεταβλητή T είναι εκθετικά κατανεμημένη, τότε $\Pr\{T > 2 | T \geq 1\} = \Pr\{T > 1\}$.

(α΄) **ΣΩΣΤΟ**

(β΄) Ο νόμος του Little ισχύει ακόμα και για ουρές που δεν μπορούν να περιγραφούν με διαδικασίες Markov.

(β΄) **ΣΩΣΤΟ**

(γ΄) Αν τόσο ο ρυθμός αφίξεων όσο και ο ρυθμός εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα αναμονής διπλασιαστούν, ο μέσος χρόνος απόκρισης θα μείνει ο ίδιος.

(γ΄) **ΛΑΘΟΣ**

(δ΄) Αν σε ένα σύστημα που μπορεί και εξυπηρετεί 3 πελάτες το λεπτό, φθάνουν 3 κατά μέσο όρο πελάτες το λεπτό, η ουρά του θα μένει πάντα άδεια.

(δ΄) **ΛΑΘΟΣ**

(ε΄) Κατά την εφαρμογή της μεθόδου *Lagrange* για την εύρεση της *MaxEnt* κατανομής, δεδομένης της μέσης τιμής και της διασποράς, χρησιμοποιούμε 3 πολλαπλασιαστές.

(ε΄) **ΣΩΣΤΟ**

Ερώτημα 2 (2 μονάδες)

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

(α΄) Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της ουράς σε ένα M/G/2/3 σύστημα αναμονής?

☐ 0 ■ **1** ☐ 2 ☐ 3 ☐ 5

(β΄) Σε ένα Birth/Death μοντέλο μίας ουράς,

☐ Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων έχει ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.

☐ Ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό 1.

☐ Ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

☐ Ο ρυθμός αφίξεων είναι ο ίδιος για όλες τις καταστάσεις

■ **Κανένα από τα παραπάνω**

(γ΄) Σε ένα $M/M/1$ σύστημα αναμονής, αν ο ρυθμός αφίξεων (λ) = ρυθμός εξυπηρέτησης (μ), τότε ☐ $\pi_0 = 1$ στη μόνιμη κατάσταση. ☐ $\pi_i > 0$ για κάθε i. ☐ Η ουρά δεν ορίζει birth-death διαδικασία. ■ **Δεν υπάρχει λύση μόνιμης κατάστασης.** ☐ $\pi_0 = 0$ στη μόνιμη κατάσταση.

(δ΄) Ποια από τις παρακάτω κατανομές έχει τη μέγιστη εντροπία?

☐ $\boldsymbol{\pi} = [1/4, 1/2, 1/8, 1/8]$

■ $\boldsymbol{\pi} = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$

☐ $\boldsymbol{\pi} = [1/2, 0, 1/2, 0]$

☐ $\boldsymbol{\pi} = [0, 1, 0, 0]$

(ε΄) Άνθρωποι καταφθάνουν σε έναν τηλεφωνικό θάλαμο σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με έναν ρυθμό λ ανθρώπων την ώρα, ενώ η διάρκεια της κάθε κλήσης είναι εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 2 λεπτά. Θεωρείστε πως η πολιτική της τηλεφωνικής εταιρείας είναι να εγκαθιστά επιπλέον τηλεφωνικούς θαλάμους αν οι πελάτες περιμένουν στην ουρά κατά μέσο όρο 3 ή περισσότερα λεπτά. Πόσοι πελάτες πρέπει να φθάνουν την ώρα ώστε να δικαιολογηθεί η εγκατάσταση δεύτερου τηλεφωνικού θαλάμου?

■ **18** ☐ 9.8 ☐ 2 ☐ 0.3 ☐ Δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για την απάντηση.

Ερώτημα 3 (2 μονάδες)

Απαντήστε σύντομα στις παρακάτω ερωτήσεις.

(α΄) Θεωρείστε το παρακάτω μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης μιας αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0.6 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & \beta \\ 0.1 & \gamma & 0.9 \end{pmatrix}$$

Ποια η τιμή των παραμέτρων α, β, γ?

(α΄) $\underline{\alpha = \beta = 0.1, \gamma = 0}$

(β΄) Θεωρείστε το παρακάτω μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης μιας αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου:

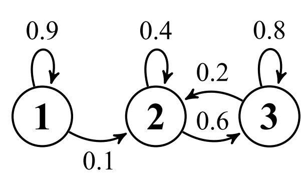
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Για ποια τιμή του α η οριακή κατανομή της αλυσίδας Markov είναι η $\boldsymbol{\pi} = [2/3, 1/3]$?

(β΄) $\underline{\alpha = 0.6}$

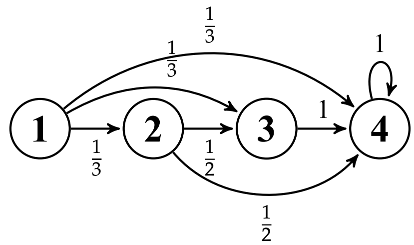
(γ΄) Σχεδιάστε μία αλυσίδα που έχει 3 καταστάσεις, εκ των οποίων η μία δέχεται επισκέψεις το πολύ πεπερασμένο αριθμό φορών και οι άλλες δύο άπειρο αριθμό φορών (με πιθανότητα 1).

Λύση: Η αλυσίδα θα πρέπει να αποτελείτε από μία *μεταβατική* κατάσταση και από δύο *επαναληπτικές*. Για παράδειγμα:



(δ΄) Μία αλυσίδα Markov παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4. Από την i μπορεί να προχωρήσει σε οποιαδήποτε $j > i$ με ίση πιθανότητα. Η κατάσταση 4 είναι απορροφητική. Αρχίζοντας από την κατάσταση 1, πόσα βήματα θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να φτάσουμε στην κατάσταση 4?

Λύση: Η αλυσίδα που περιγράφει η εκφώνηση είναι η παρακάτω:



Για να βρούμε τον μέσο αριθμό βημάτων που θα χρειαστούν για να φτάσουμε στην κατάσταση 4, λύνουμε την αναδρομή, όπως είδαμε και στο μάθημα. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}(1+\mu_2) + \frac{1}{3}(1+\mu_3) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1+\mu_3) \\ \mu_3 &= 1 \end{aligned}$$

Οπότε με πίσω αντικατάσταση λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $\mu_1 = \frac{11}{6}$

(δ΄) 11/6

Ερώτημα 4 (2 μονάδες)

Θεωρείστε ένα M/G/1 σύστημα αναμονής στο οποίο οι πελάτες φθάνουν με ρυθμό 6 πελάτες την ώρα. Θεωρείστε τα εξής δύο σενάρια:

i. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι *ακριβώς* 5 λεπτά/πελάτη.
ii. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 4 λεπτά και διασπορά 4 λεπτά^2.

Κατά πόσο τοις εκατό μικρότερη είναι η ουρά στο δεύτερο σενάριο? (Υπενθυμίζεται ο τύπος της διασποράς μίας τυχαίας μεταβλητής: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$)

Λύση: Η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης στο πρώτο σενάριο είναι *ντετερμινιστική*. Συνεπώς θα ισχύει:

$$\mathrm{Var}[X_1] = 0 \Rightarrow \mathrm{E}[X_1^2] = (\mathrm{E}[X_1])^2 = 25 \text{ λεπτά}^2$$

Επίσης, $\mu_1 = \frac{1}{\mathrm{E}[X_1]} = 0.2$ πελάτες/λεπτό και $\lambda = 6$ πελάτες/ώρα $= 0.1$ πελάτες/λεπτό. Συνεπώς, το utilization του συστήματος θα είναι $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{1}{2}$. Οπότε για το μέσο αριθμό πελατών στην ουρά στο σενάριο 1 έχουμε:

$$\mathrm{E}[N_{Q_1}] = \frac{\lambda^2\,\mathrm{E}[X_1^2]}{2(1-\rho_1)} = \frac{1}{4}$$

Αντίστοιχα στο δεύτερο σενάριο έχουμε

$$\mathrm{Var}[X_2] = 4 \text{ λεπτά}^2 \Rightarrow \mathrm{E}[X_2^2] = 4 \text{ λεπτά}^2 + 16 \text{ λεπτά}^2 = 20 \text{ λεπτά}^2$$

Επίσης, $\mu_2 = \frac{1}{\mathrm{E}[X_2]} = 0.25$ πελάτες/λεπτό και το utilization θα είναι, $\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = 0.4$. Συνεπώς αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο παίρνουμε

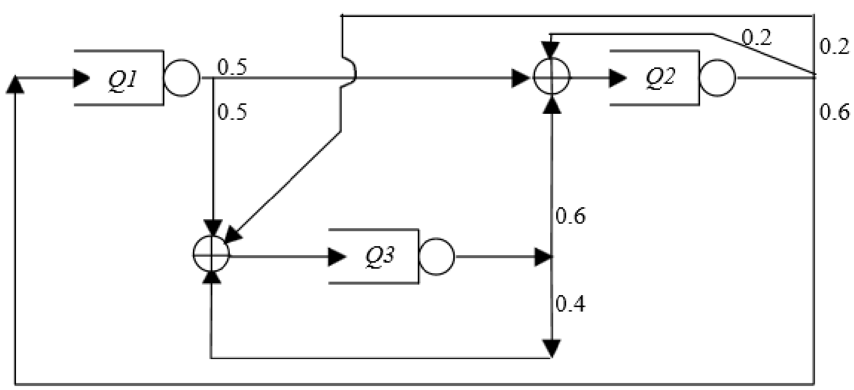
$$\mathrm{E}[N_{Q_2}] = \frac{\lambda^2\,\mathrm{E}[X_2^2]}{2(1-\rho_2)} = \frac{1}{6}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η ουρά στο 2ο σενάριο είναι μικρότερη κατά

$$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1/12}{1/4} \approx 33\%$$

Ερώτημα 5 (2 μονάδες)

Θεωρείστε το κλειστό δίκτυο συστημάτων αναμονής εκθετικής εξυπηρέτησης που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης των συστημάτων Q_1, Q_2 και Q_3 είναι $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 1$ και $\mu_3 = 0.5$ αντίστοιχα.

(α΄) Αν το σύστημα έχει συνολικά 3 χρήστες, να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο MVA και να βρείτε το μέσο αριθμό πελατών, N_i σε κάθε σύστημα $Q_i, i = 1, 2, 3$.

Λύση: Από το νόμο εξαναγκασμένης ροής για αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.6\lambda_2 \\ \lambda_3 &= 0.5\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + 0.4\lambda_3 \end{aligned}$$

Το οποίο δίνει: $\lambda_2 = 1.667\lambda_1$ και $\lambda_3 = 1.389\lambda_1$. Επιλέγοντας το Q_1 σαν σύστημα αναφοράς παίρνουμε τα Visit ratios

$$V_1 = 1 \quad V_2 = 1.667 \quad V_3 = 1.389$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, τα βήματα του MVA θα έχουν ως εξής:

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & m=0 & N_1=0 & N_2=0 & N_3=0 \\
(2) & m=1 & W_1=2 & W_2=1 & W_3=2 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{\lambda=\frac{1}{2+1.667+(2\cdot 1.389)}=0.155} \\
 & & N_1=0.31 & N_2=0.258 & N_3=0.431 \\
(3) & m=2 & W_1=2.62 & W_2=1.258 & W_3=2.862 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{\lambda=\frac{2}{2.62+(1.667\cdot 1.258)+(1.389\cdot 2.862)}=0.23} \\
 & & N_1=0.603 & N_2=0.482 & N_3=0.914 \\
(4) & m=3 & W_1=3.206 & W_2=1.482 & W_3=3.828 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{\lambda=\frac{3}{3.206+(1.667\cdot 1.482)+(1.389\cdot 3.828)}=0.273} \\
 & & N_1=0.875 & N_2=0.674 & N_3=1.451
\end{array}
$$

Άρα ο μέσος αριθμός πελατών σε κάθε σύστημα θα είναι: $N_1 = 0.875, N_2 = 0.674, N_3 = 1.451$

(β΄) Θεωρείστε το ίδιο σύστημα με M χρήστες, όπου το M πολύ μεγάλο. Πώς θα κατανεμηθούν οι M χρήστες στα τρία συστήματα αναμονής?

Λύση: Παρατηρήστε πως αν επιλέξουμε $\lambda_1 = \mu_1 = 0.5$, τότε οι σχετικές χρησιμοποιήσεις των συστημάτων θα είναι $u_1 = 1, u_2 = 0.833, u_3 = 1.389$. Συνεπώς παρατηρούμε πως το bottleneck του συστήματος είναι το σύστημα Q_3. Αυτό σημαίνει πως για αρκετά μεγάλο M, θα υπάρχει πάντα ένας ή περισσότεροι πελάτες στο Q_3 και συνεπώς ο ρυθμός αναχωρήσεων από το σύστημα αυτό θα προσεγγίζει τον ρυθμό εξυπηρέτησής του, $\mu_3 = 0.5$.
Συνεπώς, για μεγάλο M, έχουμε:

$$\lambda_3 = \mu_3 = 0.5$$

Χρησιμοποιώντας αυτό μαζί με το νόμο εξαναγκασμένης ροής, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.5/1.389 = 0.36 \\
\lambda_2 &= 1.667 \cdot 0.36 = 0.6 \qquad [1]
\end{aligned}
$$

Άρα για $M \to \infty$, θα έχουμε:
Πραγματικό Throughput: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.36, 0.60, 0.50)$
Πραγματικό Utilization: $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (0.72, 0.60, \rho_3 \to 1)$
Συνεπώς με χρήση του αποτελέσματος:

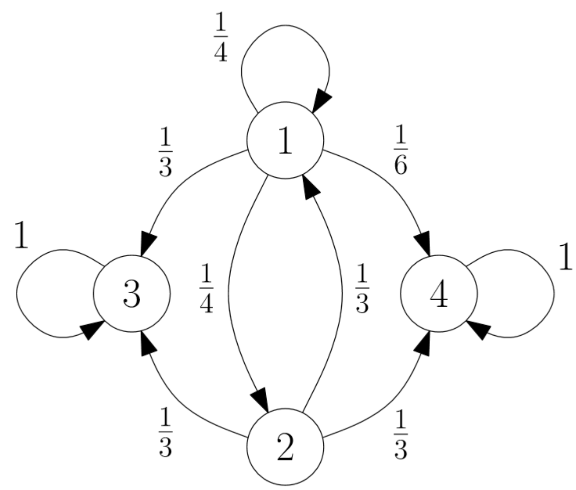
$$N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

παίρνουμε τελικά,

$$N_1 = 2.57 \qquad N_2 = 1.5 \qquad N_3 = (M - 4.07)$$

Ερώτημα 6 (2 μονάδες)

Θεωρείστε την αλυσίδα Markov με το παρακάτω διάγραμμα μετάβασης:



(α΄) Να βρεθεί η πιθανότητα $\Pr\{X_2 = 4|X_0 = 2\}$.

Λύση: Η πιθανότητα μετάβασης 2-βημάτων από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 4 μπορεί να βρεθεί απαριθμώντας όλες τις δυνατές ακολουθίες. Είναι οι $\{2 \to 1 \to 4\}$ and $\{2 \to 4 \to 4\}$. Οπότε,

$$\Pr\{X_2 = 4|X_0 = 2\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{18}$$

(β΄) Υπάρχουν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης? Αν ναι, υπολογίστε τες – αν όχι εξηγήστε γιατί.

Λύση: Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δεν υπάρχουν επειδή η αλυσίδα δεν είναι αμείωτη. Οι οριακές πιθανότητες θα εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση.

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επισκεφτούμε τελικά την κατάσταση 4, δεδομένου πως η αρχική κατάσταση είναι $X_0 = 1$?

Λύση: Για να βρούμε την πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 4, λύνουμε την αναδρομή των πιθανοτήτων όπως είδαμε και στο μάθημα, προσέχοντας πως $a_4 = 1$ και $a_3 = 0$, αφού η κατάσταση αυτή είναι επίσης απορροφητική. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6}a_4 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{4}a_2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 \qquad [2] \\ a_2 &= \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_4 \\ &= \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3} \qquad [3] \end{aligned}$$

Οπότε λύνοντας το σύστημα των [2] και [3], βρίσκουμε: $a_1 = \frac{3}{8}$.