

Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Στοχαστικές Διαδικασίες



Η Διαδικασία Bernoulli

Γιάννης Γαροφαλάκης

Στοχαστικές διαδικασίες

- **Στοχαστική Διαδικασία (Σ.Δ.):** ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.), $X(t)$, όπου οι Τ.Μ. X έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο t .
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
 - **ο χώρος καταστάσεων** (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
 - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές \rightarrow Σ.Δ. **διακριτών-καταστάσεων** (αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων $\leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$
 - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα \rightarrow Σ.Δ. **συνεχών-καταστάσεων**
 - **η χρονική παράμετρος** (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
 - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [X_n – Στοχαστική Ακολουθία]
 - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [$X(t)$]
 - **η στατιστική σχέση μεταξύ των Τ.Μ.**

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις TM

$\vec{X} = [X(t_1), X(t_2), \dots]$, δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}; \vec{t}) \equiv P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

για όλα τα $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ και n .

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

1. Στάσιμες ΣΔ

Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό τ , πρέπει: $F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t} + \tau) = F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t})$ όπου $\vec{t} + \tau = (t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$.

2. Ανεξάρτητες ΣΔ

Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t}) \equiv f_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{x_1}(x_1; t_1) \dots f_{x_n}(x_n; t_n)$$

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov $\{X(t)\}$, η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή $X(t_{n+1})$ θα είναι ίση με x_{n+1} , εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή $X(t_n) = x_n$ και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

Ιδιότητα Markov (για αλυσίδα Markov):

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1] &= \\ &= P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n] \end{aligned}$$

όπου $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, ενώ τα x_i περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Αποδεικνύεται ότι ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

Εκθετική Κατανομή (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη - **Γεωμετρική Κατανομή** (διαδικασία διακριτού χρόνου).

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (4)

4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Δηλαδή αν $X(t_n) = i$, τότε $X(t_{n+1}) = i - 1$ ή $X(t_{n+1}) = i + 1$ μόνο.

5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα σε αυτές τις στιγμές λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (5)

6. Τυχαίοι περίπατοι

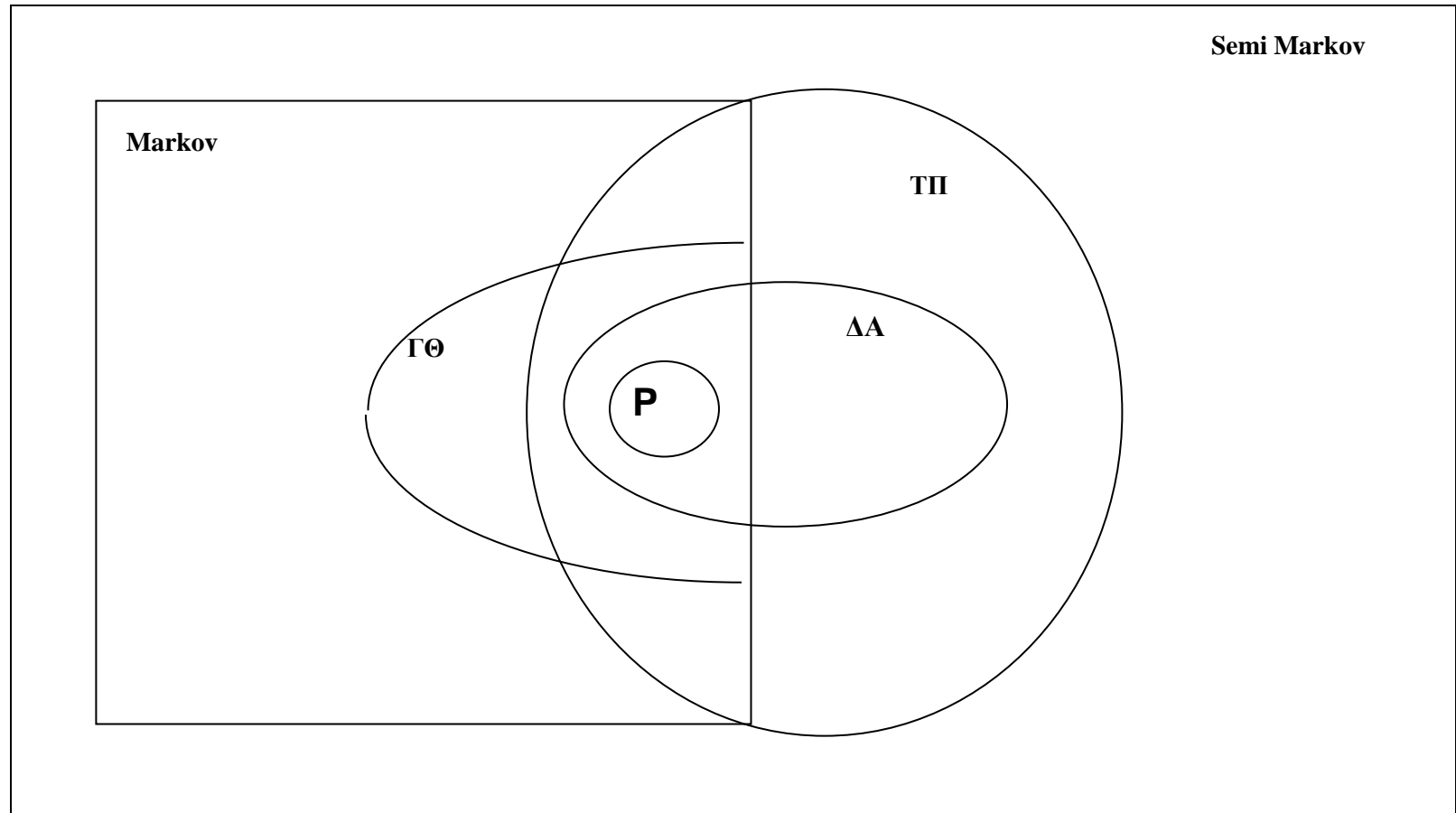
Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

Δηλαδή, μια ακολουθία TM $\{S_n\}$ είναι τυχαίος περίπατος αν:
 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ όπου $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$ και X_1, X_2, \dots είναι ακολουθία ανεξάρτητων TM με κοινή κατανομή.

7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- S_n είναι τώρα η TM που καθορίζει τη χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η n -οστή μεταβολή κατάστασης και $\{X_n\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων TM, όπου η X_n αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(n-1)$ -οστής και n -οστής μεταβολής κατάστασης. Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



P: Poisson

Διαδικασία Bernoulli

Μία διαδικασία Bernoulli είναι μία πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, X_3, \dots , τέτοια ώστε

- Για κάθε i η X_i παίρνει την τιμή 0 ή 1.
- Για κάθε i η πιθανότητα το X_i να είναι 1 είναι πάντα ίση με p .

Κατά συνέπεια, η διαδικασία Bernoulli είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων **δοκιμών Bernoulli**.

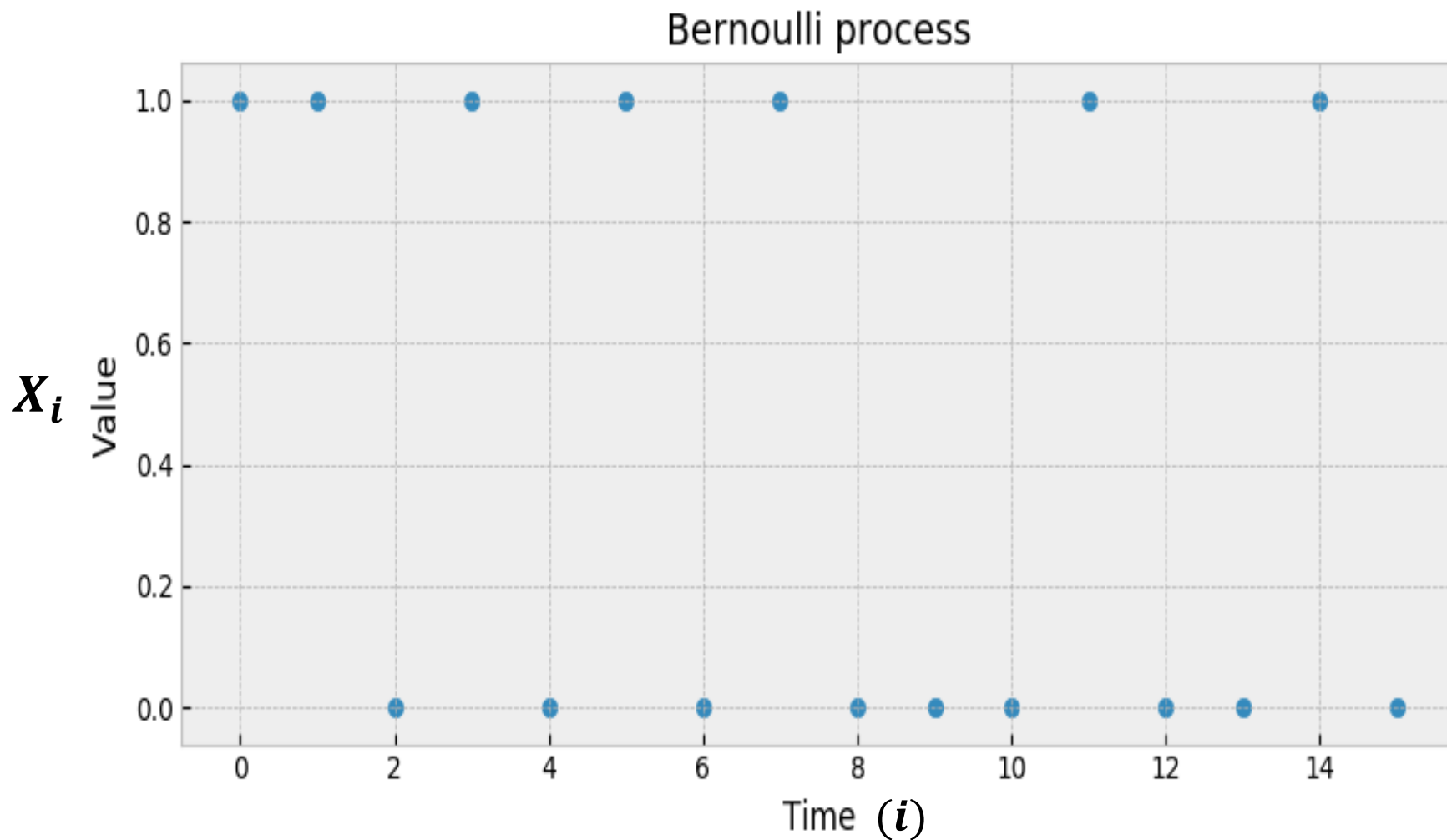
Example

- Μία σειρά ρίψεων ενός νομίσματος
- Αφίξεις πακέτων σε έναν router

Βασικές Ιδιότητες Διαδικασιών Bernoulli

- **Ανεξαρτησία**
- **Έλλειψη μνήμης / Ιδιότητα της Επανεκκίνησης**

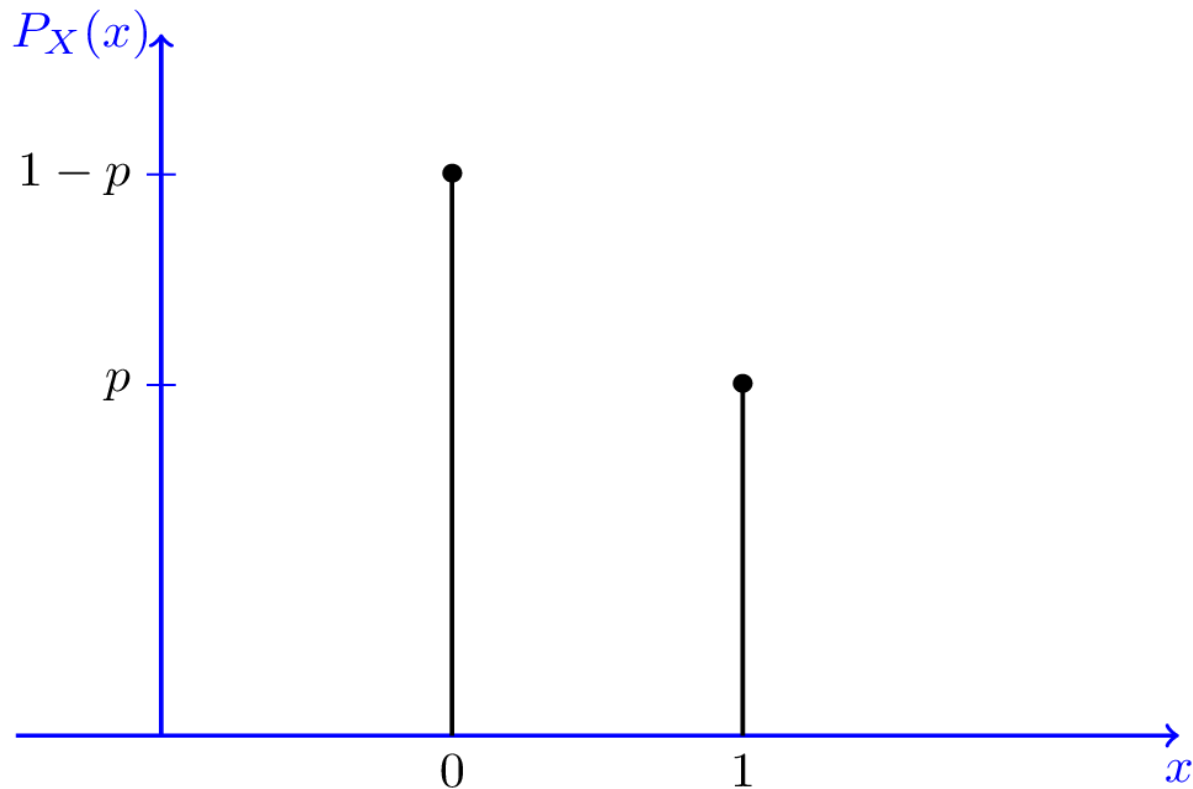
Διαδικασία Bernoulli (2)



Κατανομή Bernoulli

■ pmf: $p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

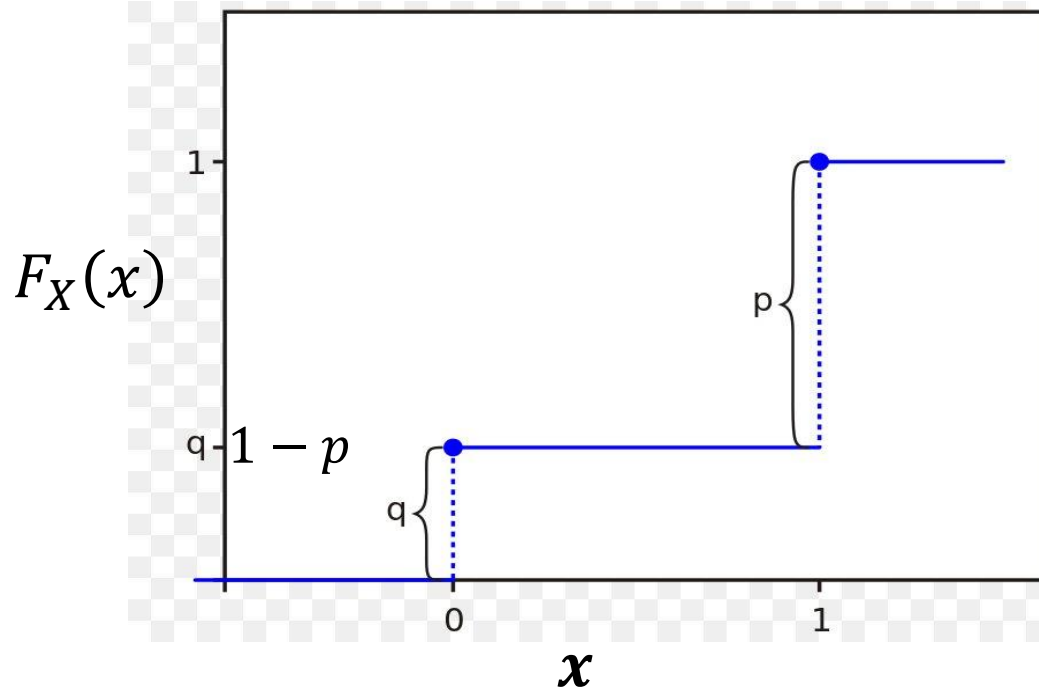


Κατανομή Bernoulli (2)

$$\text{pmf: } p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

■ **CDF:** $F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$



Κατανομή Bernoulli (3)

$$\text{pmf: } p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

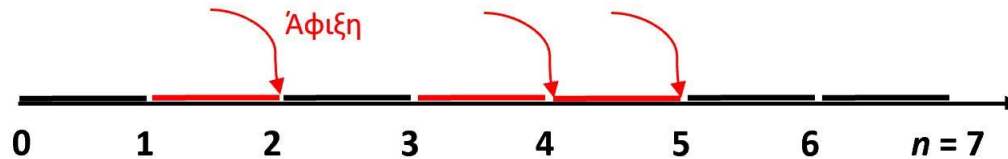
- $E[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$

$$\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E[X])^2 p_X(x_i)$$

- $\text{Var}(X) = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p \cdot (1 - p)$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (1)

- Η τ.μ. N που μετρά το πλήθος των αφίξεων (επιτυχιών) k , κατά τη διάρκεια n slots (δοκιμών):



Αριθμός τρόπων κατανομής k επιτυχιών σε n προσπάθειες:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{οπότε:}$$

$$\Pr\{k \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια } n \text{ slots}\} = p_N(k) = \\ = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad \text{Binomial } \mathbf{B}(n, p)$$

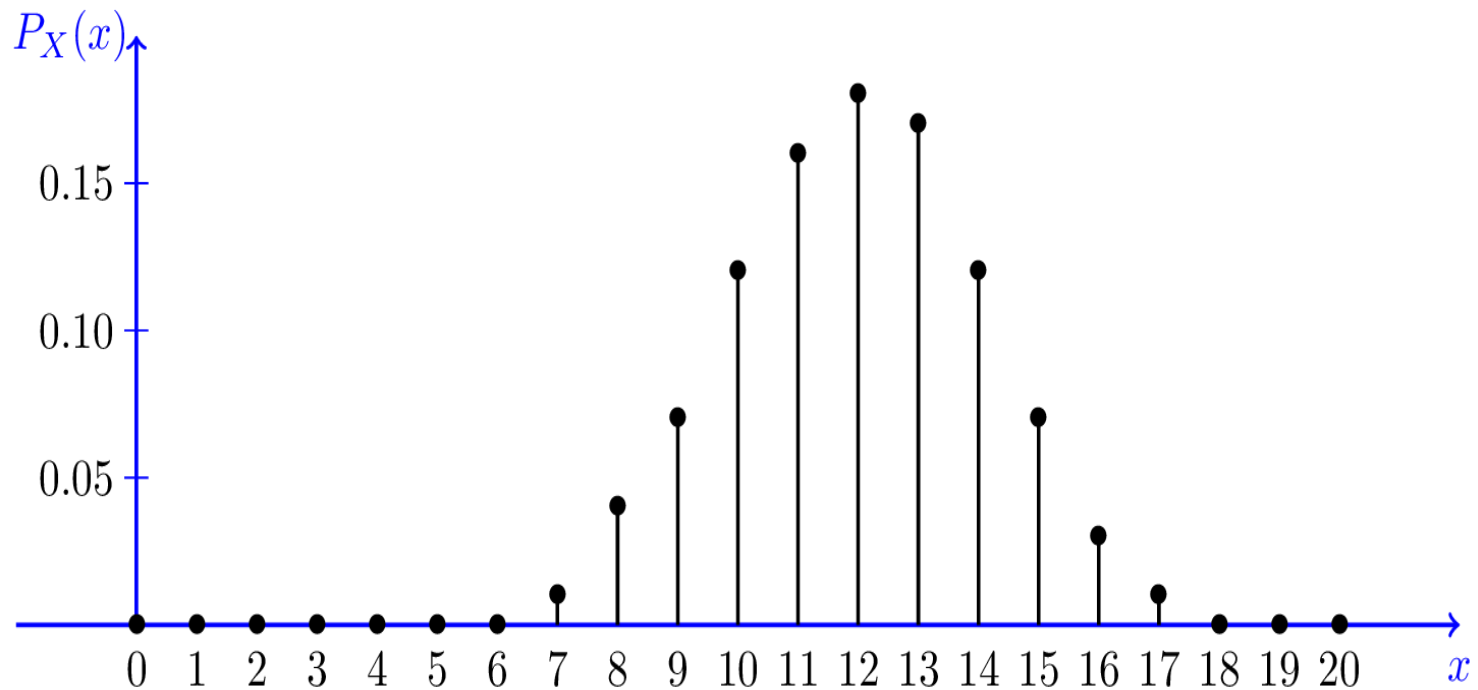
$$E[N] = n \cdot p$$

$$Var(N) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

pmf της Binomial $B(n, p)$

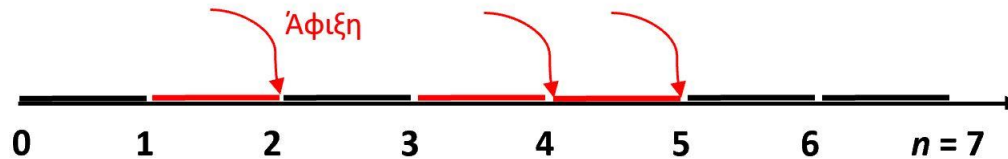
$$p_N(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$X \sim \text{Binomial}(n = 20, p = 0.6)$



Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (2)

- Η τ.μ. T που μετρά το χρόνο t μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:



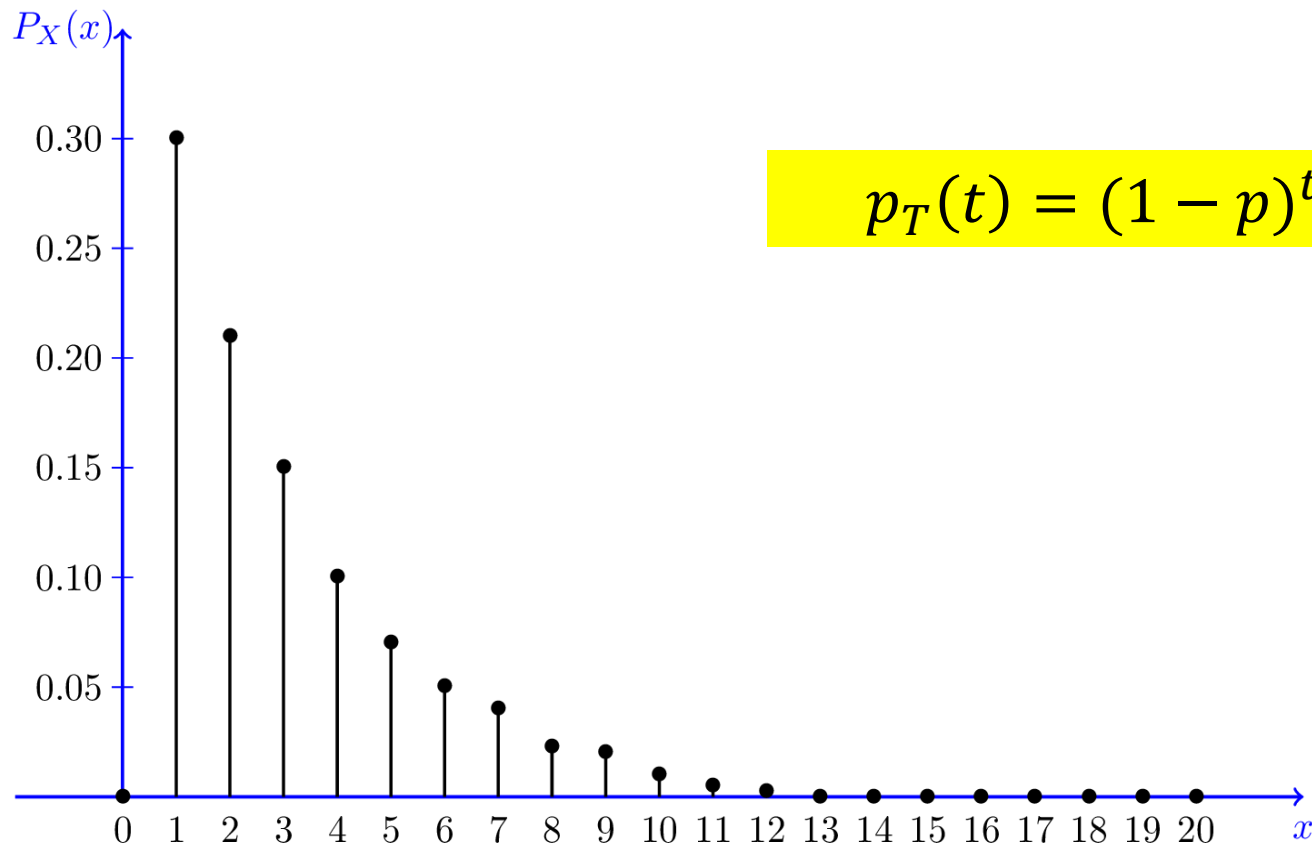
$$\Pr\{t \text{ slots μέχρι την επόμενη άφιξη}\} = p_T(t) =$$
$$= (1 - p)^{t-1} \cdot p \quad \text{Γεωμετρική NB}(1, p)$$

$$E[T] = 1/p$$

$$Var(T) = (1 - p)/p^2$$

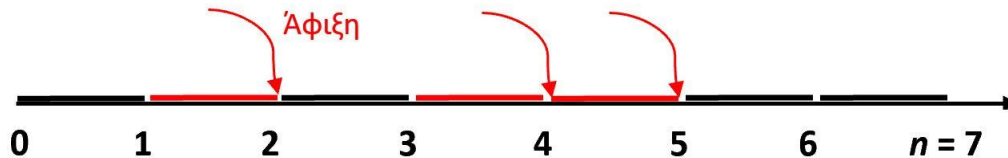
pmf της Γεωμετρικής NB(1, p)

$X \sim \text{Geometric}(p = 0.3)$



Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (3)

- Η τ.μ. Y_k που μετρά το χρόνο t μέχρι την k -οστή άφιξη:



Δηλαδή: $k - 1$ αφίξεις σε $t - 1$ slots (binomial), και μετά, 1 άφιξη.

$$\Pr\{\text{Η } k\text{-οστή άφιξη γίνεται στο } t \text{ slot}\} = p_{Y_k}(t) =$$

$$= \binom{t-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(t-1)-(k-1)} \cdot p =$$

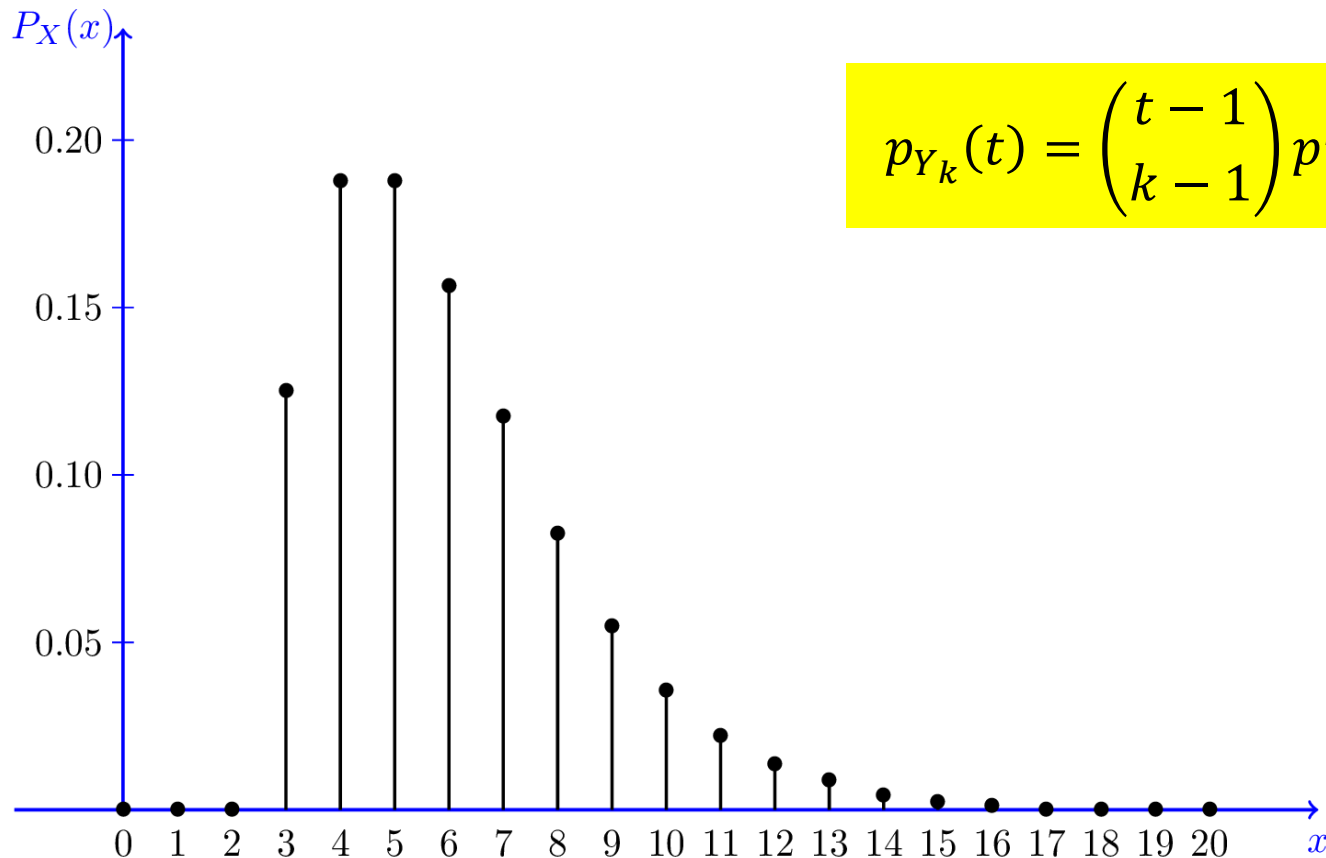
$$= \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k} \quad \text{Negative Binomial}$$

$$E[Y_k] = k/p$$

$$\text{Var}(Y_k) = k(1-p)/p^2$$

pmf της Negative Binomial

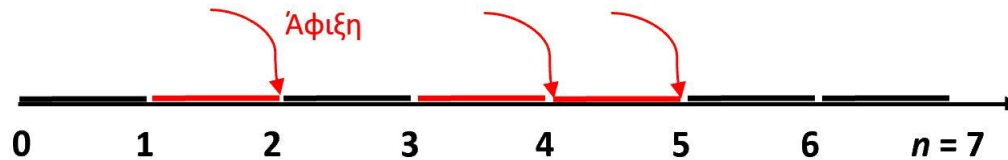
$X \sim \text{Negative Binomial}(m = 3, p = 0.5)$



$$p_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (4)

- Η τ.μ. B που μετρά τον αριθμό των διαδοχικών slots στα οποία είχαμε αφίξεις (busy slots):



$$\Pr\{k \text{ διαδοχικά busy slots}\} = p_B(k) = \\ = p^k (1 - p) \quad \text{Γεωμετρική}$$

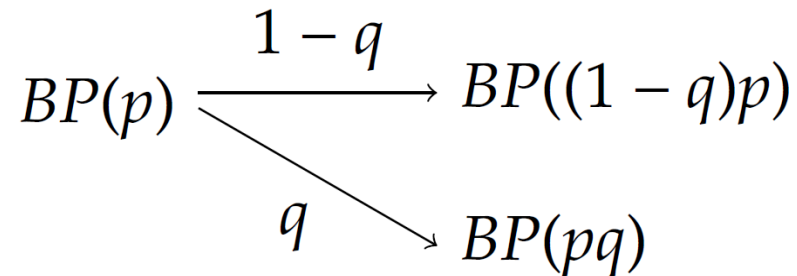
$$E[B] = 1/(1 - p)$$

$$\text{Var}(B) = p/(1 - p)^2$$

Διαχωρισμός και Συνένωση Διαδικασιών Bernoulli

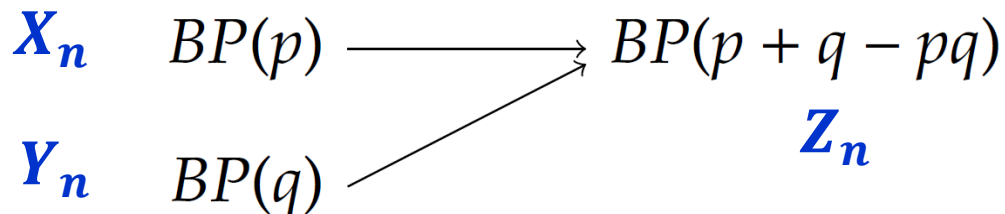
Διαχωρισμός

Οι διαδικασίες που προκύπτουν από το διαχωρισμό μίας διαδικασίας Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



Συνένωση

Η διαδικασία που προκύπτει από τη συνένωση δύο διαδικασιών Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.



Συνένωση Διαδικασιών Bernoulli

- Θα έχουμε άφιξη της Z_n στο slot n , αν μία από τις X_n, Y_n ή και οι δύο ταυτόχρονα, έχουν άφιξη στο slot n .
- Δηλαδή: $Z_n = \max\{X_n, Y_n\}$

και

$$\begin{aligned} P[\mathbf{Z}_n = \mathbf{1}] &= 1 - P[X_n = 0, Y_n = 0] = \\ &= 1 - (1 - p)(1 - q) = \mathbf{p + q - pq} \end{aligned}$$