Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διαδικασίες Markov Διακριτού Χρόνου

Γιάννης Γαροφαλάκης

Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις (τιμές) και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την *κατάσταση* i_{n-1} όπου είναι στο βήμα *(n-1)*, στην *κατάσταση* j κατά το βήμα *n (ιδιότητα Markov):*

$$P\left[X_n = j \;\middle|\; X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right] = P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i_{n-1}\right]$$

Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι *ανεξάρτητες του n*, τότε έχουμε μια *ομογενή αλυσίδα Markov. Ορίζουμε:*

$$p_{ij} \equiv P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i\right]$$

- Πιθανότητες μετάβασης *m*-βημάτων:

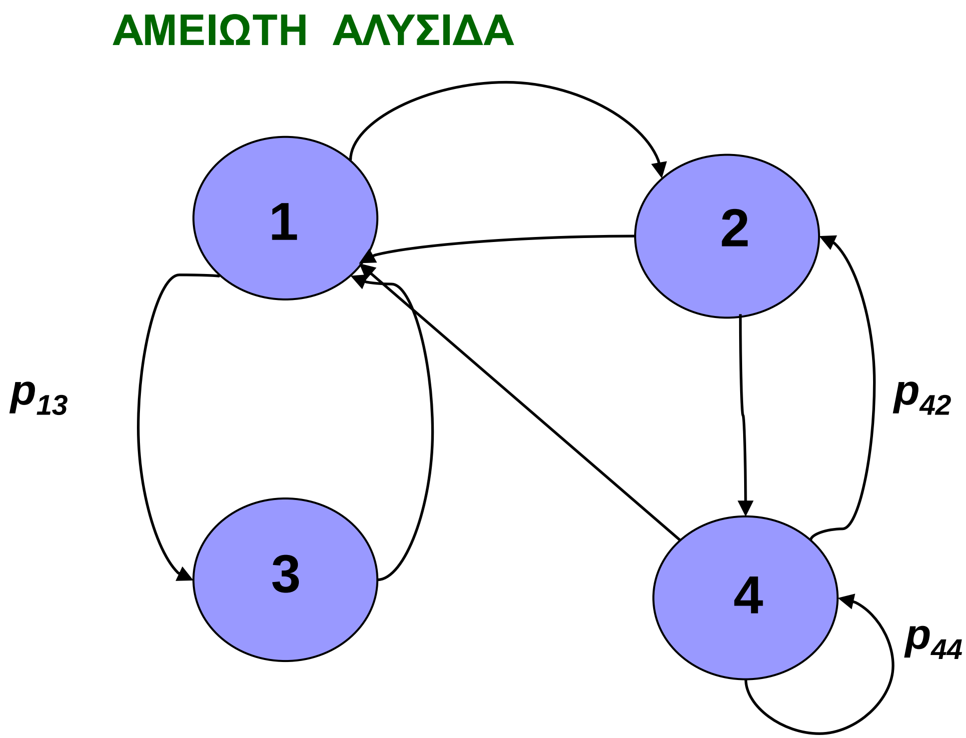
$$p_{ij}^{(m)} \equiv P\left[X_{n+m} = j \;\middle|\; X_n = i\right]$$

- Εύκολα βγαίνει: $p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$
- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την E_i στην E_j μέσα σε *m* βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την E_i σε κάποια E_k μέσα σε *(m-1)* βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος m_0 για κάθε ζευγάρι καταστάσεων E_i , E_j :

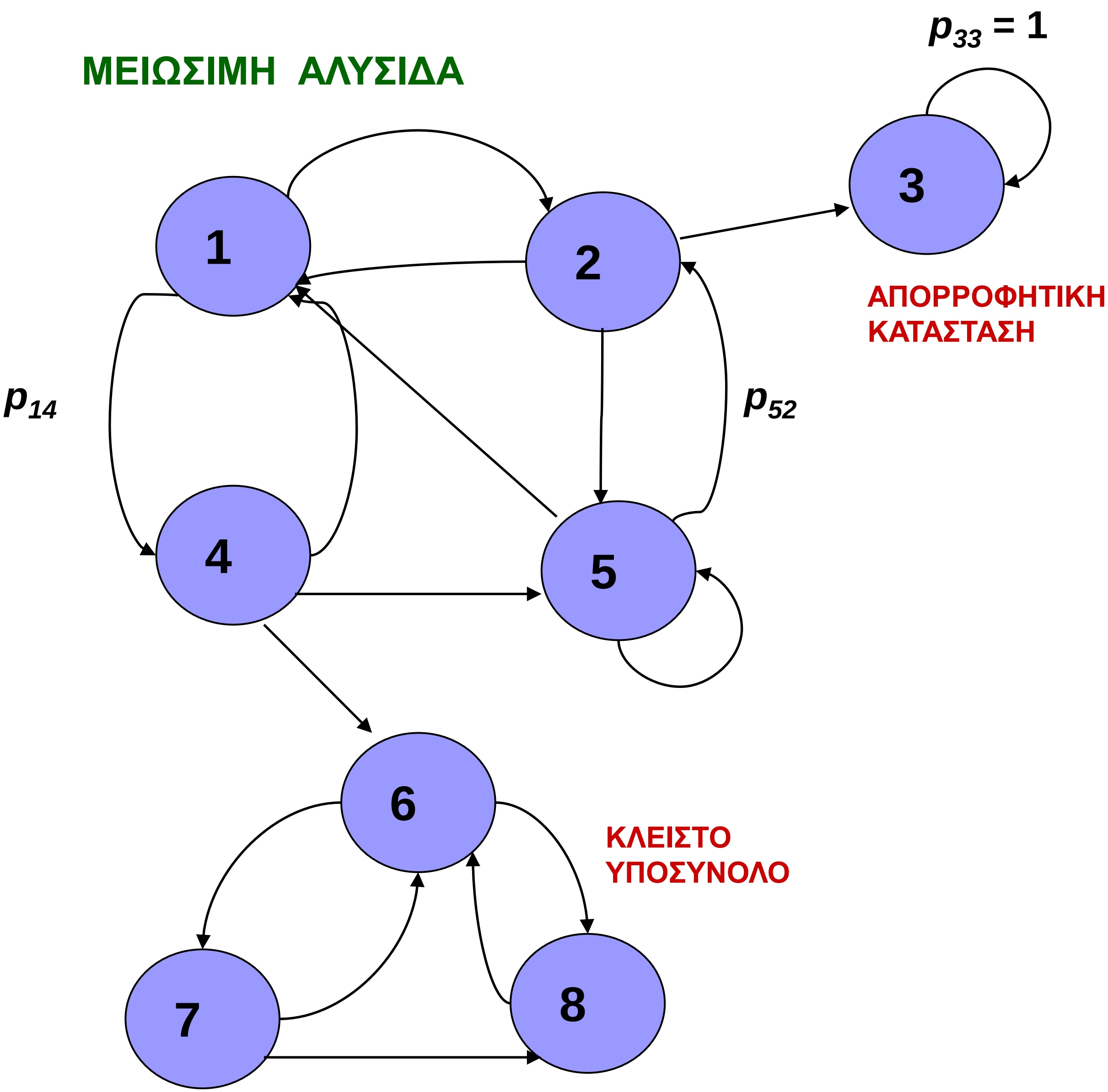
$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων *A1* λέγεται *κλειστό* αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του *A1* σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του *A1*.
- Αν το *A1* αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω E_i , τότε αυτή καλείται *απορροφητική* κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η E_i απορροφητική, είναι $p_{ii} = 1$.
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα, η αλυσίδα λέγεται *μειώσιμη.*

Παράδειγμα



$p_{33} = 1$
ΜΕΙΩΣΙΜΗ ΑΛΥΣΙΔΑ
1
2
3
ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΗ
ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
p_{14}
p_{52}
4
5
6
ΚΛΕΙΣΤΟ
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ
7
8

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

- $f_j^{(n)} \equiv$ *Prob [Η πρώτη επιστροφή στην* E_j *γίνεται μετά από n βήματα από την αναχώρηση από την* E_j *]*

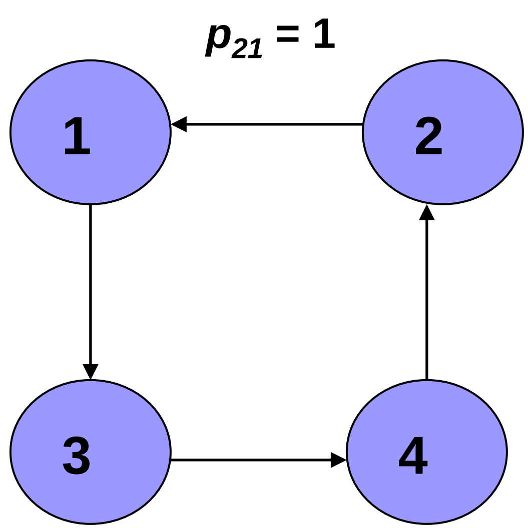
- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ = *Prob[Κάποτε να επιστρέψουμε στην* E_j *]*

- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση E_j, f_j, *είναι* $f_j = 1$, η κατάσταση E_j λέγεται *επαναληπτική*.
- Αν $f_j < 1$, λέγεται *μεταβατική*.

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (4)

- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην E_j είναι *γ, 2γ, 3γ, . . ., (γ* ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος*)* τότε η E_j λέγεται *περιοδική* με περίοδο *γ*. Αν *γ = 1* τότε η E_j είναι *μη-περιοδική*.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (5)

- Για τις καταστάσεις με $f_j = 1$, ορίζουμε το Μέσο Χρόνο Επανάληψης της (επιστροφής στην) E_j :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην E_j , M_j, *είναι* $M_j = \infty$, η E_j λέγεται *μηδενικά επαναληπτική*, ενώ αν *είναι* $M_j < \infty$, η E_j λέγεται *βέβαια επαναληπτική*.

Θεώρημα 1

- *Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε **όλες** μεταβατικές, είτε όλες βέβαια επαναληπτικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο γ.*

Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P[X_n = j]$: Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση E_j κατά το n-στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$: στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση E_j κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.

  Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης: $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$
- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης $\{\pi_j^{(0)}\}$ έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα $\{\pi_j\}$ είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

Θεώρημα 2

Σε μια αμείωτη και μη-περιοδική ομογενή αλυσίδα Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχουν πάντα , και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι μηδενικά επαναληπτικές, οπότε $\pi_j = 0$ και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.
2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι βέβαια επαναληπτικές και τότε $\pi_j > 0$ για όλα τα j, στην οποία περίπτωση το σύνολο $\{\pi_j\}$ είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες π_j καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i \qquad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

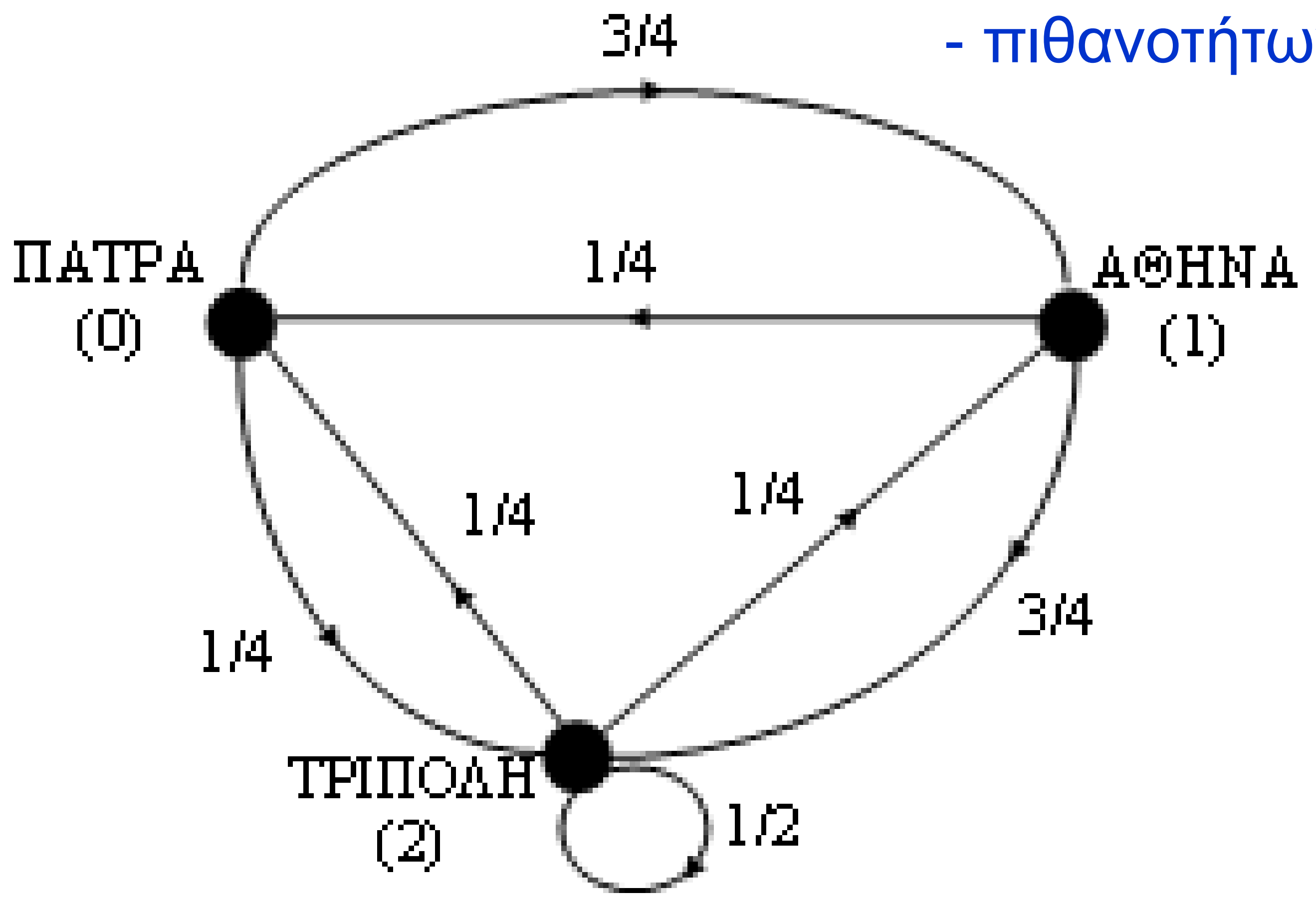
Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση E_j λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.

  Δηλαδή αν $f_j = 1$, $M_j < \infty$ και $\gamma = 1$.
- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι εργοδικές, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια *εργοδική*.

Παράδειγμα

Διάγραμμα καταστάσεων -
- πιθανοτήτων μεταβάσεων



Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

- $\vec{\mathbf{P}} = \left[p_{ij} \right]$ πίνακας μεταβάσεων

- $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \left[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \right]$ διάνυσμα πιθανοτήτων

- Από το θεώρημα 2: $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\boldsymbol{\pi}} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

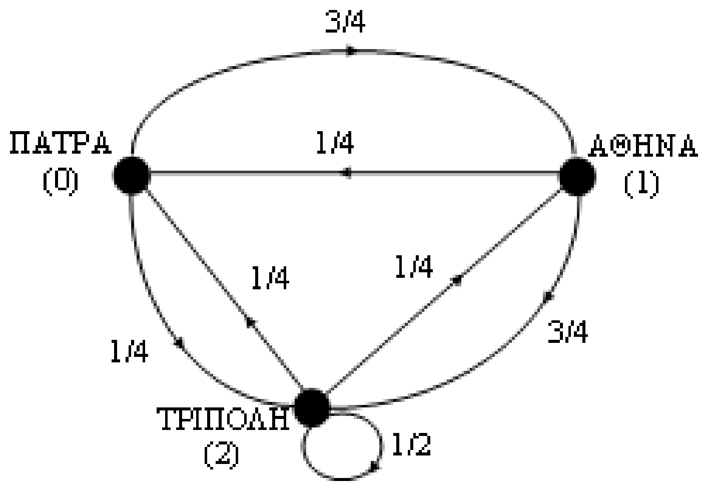
- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

- Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\pi_0 = 0 \cdot \pi_0 + \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$
$$\pi_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$
$$\pi_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi_0 + \frac{3}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

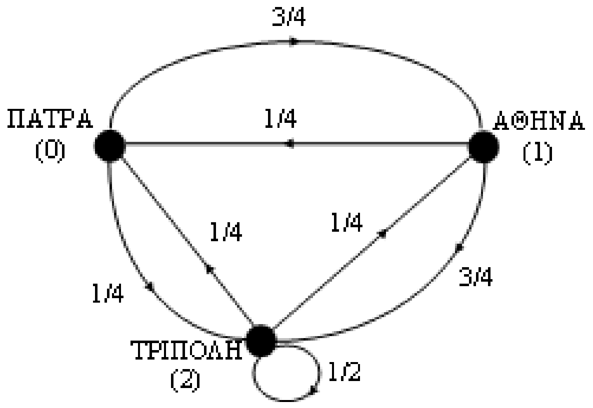


Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τις:

$$\pi_0^{(n+1)} = 0 \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$
$$\pi_1^{(n+1)} = \frac{3}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + 0 \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$
$$\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{3}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{2} \cdot \pi_2^{(n)}$$
$$\pi_0^{(n)} + \pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} = 1$$

για $\boldsymbol{n} \to \infty$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (3)



- Αποτέλεσμα:

$$\pi_0 = 1/5 = 0.20$$

$$\pi_1 = 7/25 = 0.28$$

$$\pi_2 = 13/25 = 0.52$$

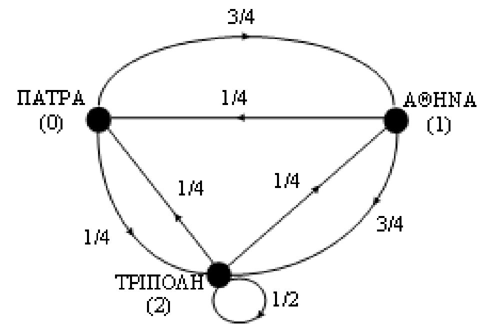
Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης

Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

- Υπολογισμός πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)}$: η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση E_j τη χρονική στιγμή n.
- $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} \equiv \left[\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \quad \ldots\right]$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα n
- Ισχύει ότι $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n-1)} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

$$\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(0)} \cdot (\vec{\mathbf{P}})^n$$

Ανάλυση μεταβατικής συμ-περιφοράς συστήματος (2)



- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η $\vec{\pi}^{(0)} = [1,0,0]$, δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	. . . .	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	. . . .	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	. . . .	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	. . . .	0.52

- Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.

Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

Prob [Το σύστημα να παραμείνει στην E_i για ακριβώς m επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην E_i] = $(1 - p_{ii})\, p_{ii}^{m}$

Γεωμετρική κατανομή

(Ιδιότητα αμνησίας)