

Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διαδικασίες Markov Διακριτού Χρόνου

Γιάννης Γαροφαλάκης

Στοχαστικές διαδικασίες

- **Στοχαστική Διαδικασία (Σ.Δ.):** ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.), $X(t)$, όπου οι Τ.Μ. έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο t .
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
 - **ο χώρος καταστάσεων** (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
 - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές \rightarrow Σ.Δ. **διακριτών-καταστάσεων** (αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων $\leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$
 - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα \rightarrow Σ.Δ. **συνεχών-καταστάσεων**
 - **η χρονική παράμετρος** (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
 - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [X_n – Στοχαστική Ακολουθία]
 - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [$X(t)$]
 - **η στατιστική σχέση μεταξύ των Τ.Μ.**

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις ΤΜ

$\vec{X} = [X(t_1), X(t_2), \dots]$, δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}; \vec{t}) \equiv P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

για όλα τα $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ και n .

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

1. Στάσιμες ΣΔ

Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό τ , πρέπει: $F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t} + \tau) = F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t})$ όπου $\vec{t} + \tau = (t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$.

2. Ανεξάρτητες ΣΔ

Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t}) \equiv f_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{x_1}(x_1; t_1) \dots f_{x_n}(x_n; t_n)$$

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov $\{X(t)\}$, η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή $X(t_{n+1})$ θα είναι ίση με x_{n+1} , εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή $X(t_n) = x_n$ και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

Ιδιότητα Markov (για αλυσίδα Markov):

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1] &= \\ &= P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n] \end{aligned}$$

όπου $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, ενώ τα x_i περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Θα αποδείξουμε αργότερα ότι ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

Εκθετική Κατανομή (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη - **Γεωμετρική Κατανομή** (διαδικασία διακριτού χρόνου).

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (4)

4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Δηλαδή αν $X(t_n) = i$, τότε $X(t_{n+1}) = i - 1$ ή $X(t_{n+1}) = i + 1$ μόνο.

5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα σε αυτές τις στιγμές λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (5)

6. Τυχαίοι περίπατοι

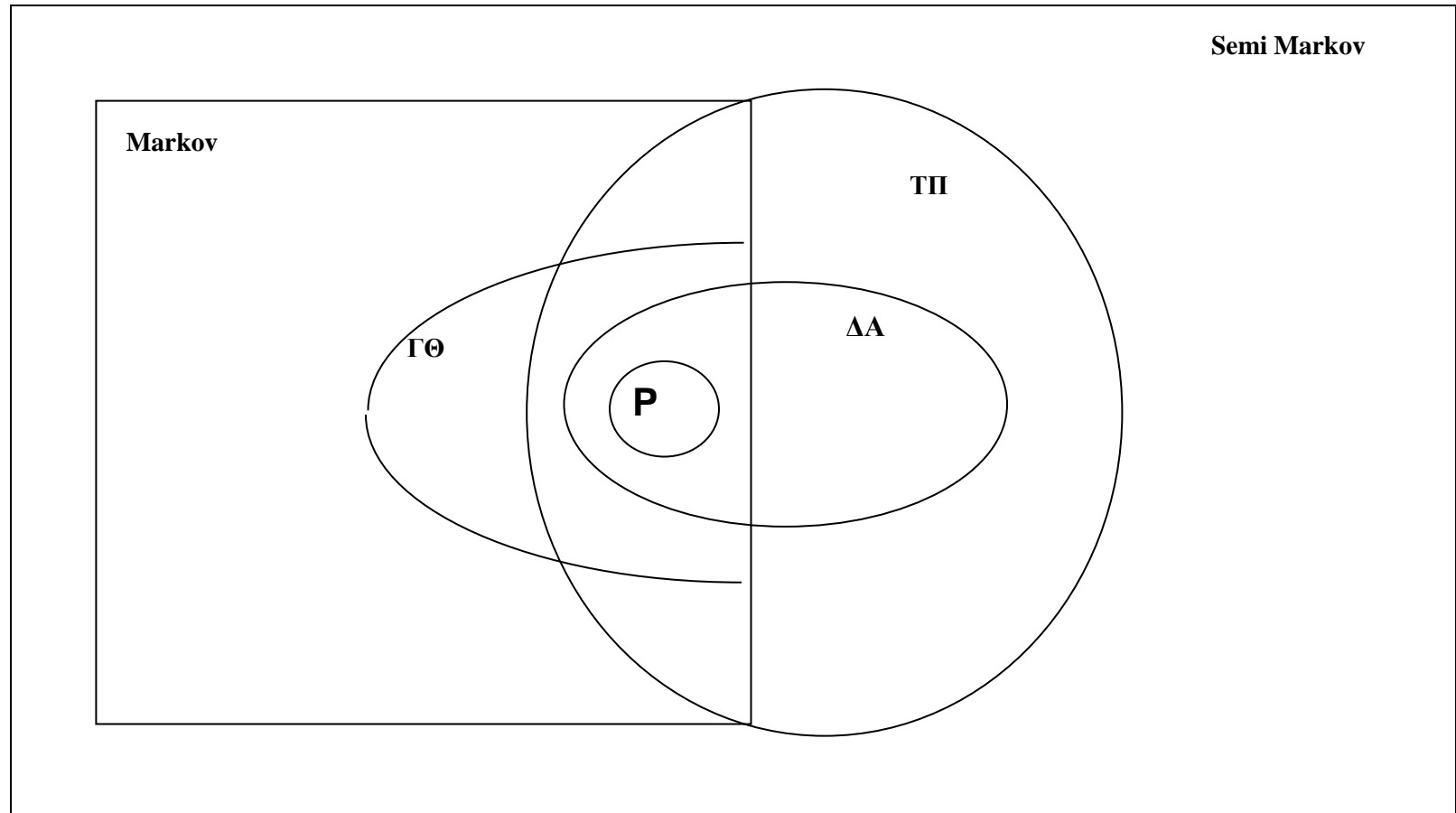
Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

Δηλαδή, μια ακολουθία TM $\{S_n\}$ είναι τυχαίος περίπατος αν:
 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ όπου $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$ και X_1, X_2, \dots είναι ακολουθία ανεξάρτητων TM με κοινή κατανομή.

7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- S_n είναι τώρα η TM που καθορίζει τη *χρονική στιγμή* στην οποία γίνεται η n -οστή μεταβολή κατάστασης και $\{X_n\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων TM, όπου η X_n αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(n-1)$ -οστής και n -οστής μεταβολής κατάστασης. Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



P: Poisson

Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την κατάσταση E_i όπου είναι στο βήμα $(n-1)$, στην κατάσταση E_j κατά το βήμα n

$$P[X_n = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}]$$

Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι **πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος** είναι ανεξάρτητες του n , τότε έχουμε μια **ομογενή** αλυσίδα Markov. Ορίζουμε:

$$p_{ij} \equiv P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$$

- Πιθανότητες μετάβασης m -βημάτων:

$$p_{ij}^{(m)} \equiv P[X_{n+m} = j \mid X_n = i]$$

- Εύκολα βγαίνει: $p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$

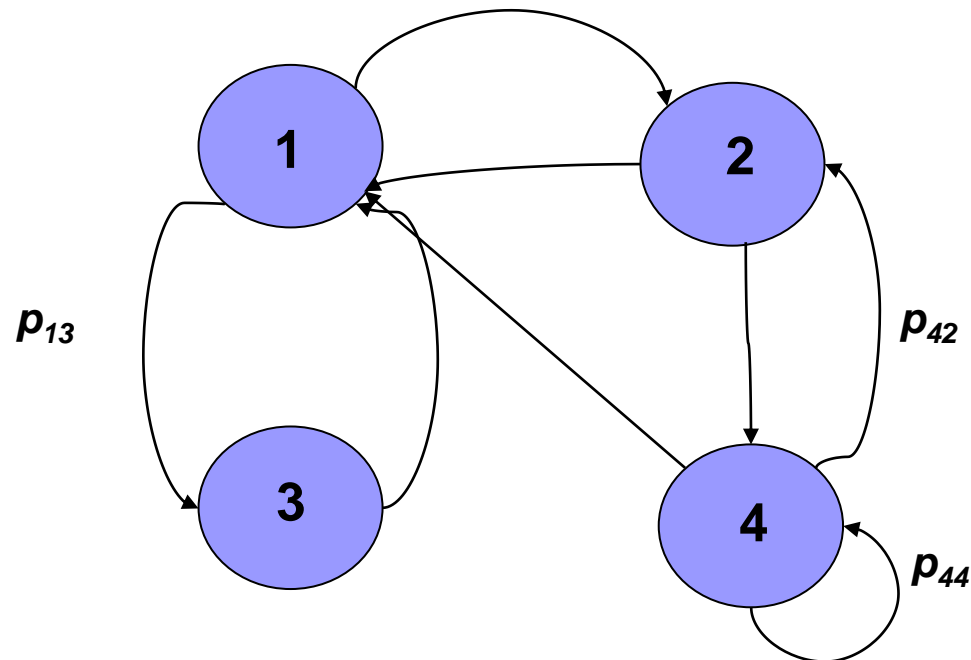
- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την E_i στην E_j μέσα σε m βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την E_i σε κάποια E_k μέσα σε $(m-1)$ βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος m_0 για κάθε ζευγάρι καταστάσεων E_i, E_j :

$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$

ΑΜΕΙΩΤΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

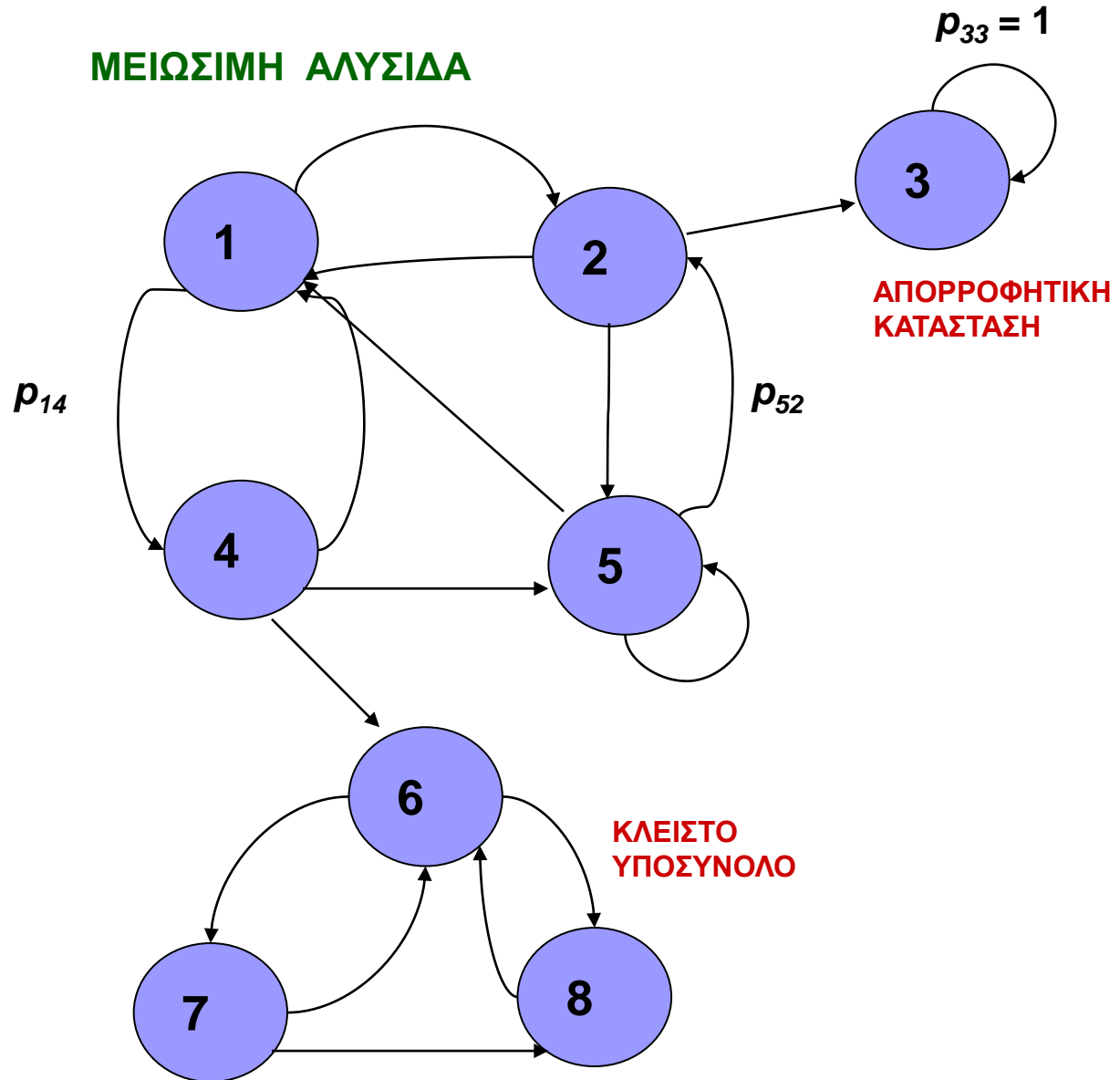


Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων $A1$ λέγεται **κλειστό** αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του $A1$ σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του $A1$.
- Αν το $A1$ αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω E_i , τότε αυτή καλείται **απορροφητική** κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η E_i απορροφητική, είναι $p_{ii} = 1$.
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα, η αλυσίδα λέγεται **μειώσιμη**.

Παράδειγμα

ΜΕΙΩΣΙΜΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



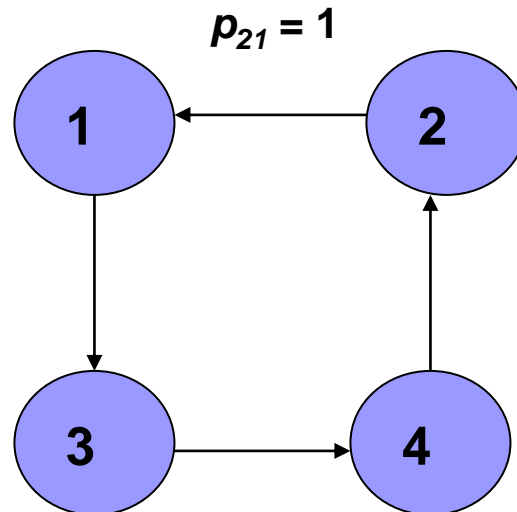
Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

- $f_j^{(n)} \equiv \text{Prob} [\text{Η πρώτη επιστροφή στην } E_j \text{ γίνεται μετά από } n \text{ βήματα από την αναχώρηση από την } E_j]$
- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = \text{Prob}[\text{Κάποτε να επιστρέψουμε στην } E_j]$
- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση E_j , f_j , είναι $f_j = 1$, η κατάσταση E_j λέγεται **επαναληπτική**.
- Αν $f_j < 1$, λέγεται **μεταβατική**.

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (4)

- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην E_j είναι $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$, (γ ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος) τότε η E_j λέγεται **περιοδική** με περίοδο γ . Αν $\gamma = 1$ τότε η E_j είναι **μη-περιοδική**.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (5)

- Για τις καταστάσεις με $f_j = 1$, ορίζουμε το **Μέσο Χρόνο Επανάληψης της** (επιστροφής στην) E_j :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην E_j , M_j , είναι $M_j = \infty$, η E_j λέγεται **μηδενικά επαναληπτική**, ενώ αν είναι $M_j < \infty$, η E_j λέγεται **βέβαια επαναληπτική**.

Θεώρημα 1

- Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε **όλες μεταβατικές**, είτε **όλες βέβαια επαναληπτικές** ή **όλες μηδενικά επαναληπτικές**. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο γ .

Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P[X_n = j]$: Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση E_j κατά το n -στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$: στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση E_j κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης: $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$

- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης $\{\pi_j^{(0)}\}$ έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα $\{\pi_j\}$ είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

Θεώρημα 2

Σε μια **αμείωτη** και **μη-περιοδική** ομογενή αλυσίδα Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχουν πάντα, και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι **μεταβατικές** ή όλες είναι **μηδενικά επαναληπτικές**, οπότε $\pi_j = 0$ και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.
2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι **βέβαια επαναληπτικές** και τότε $\pi_j > 0$ για όλα τα j , στην οποία περίπτωση το σύνολο $\{\pi_j\}$ είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες π_j καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i$$

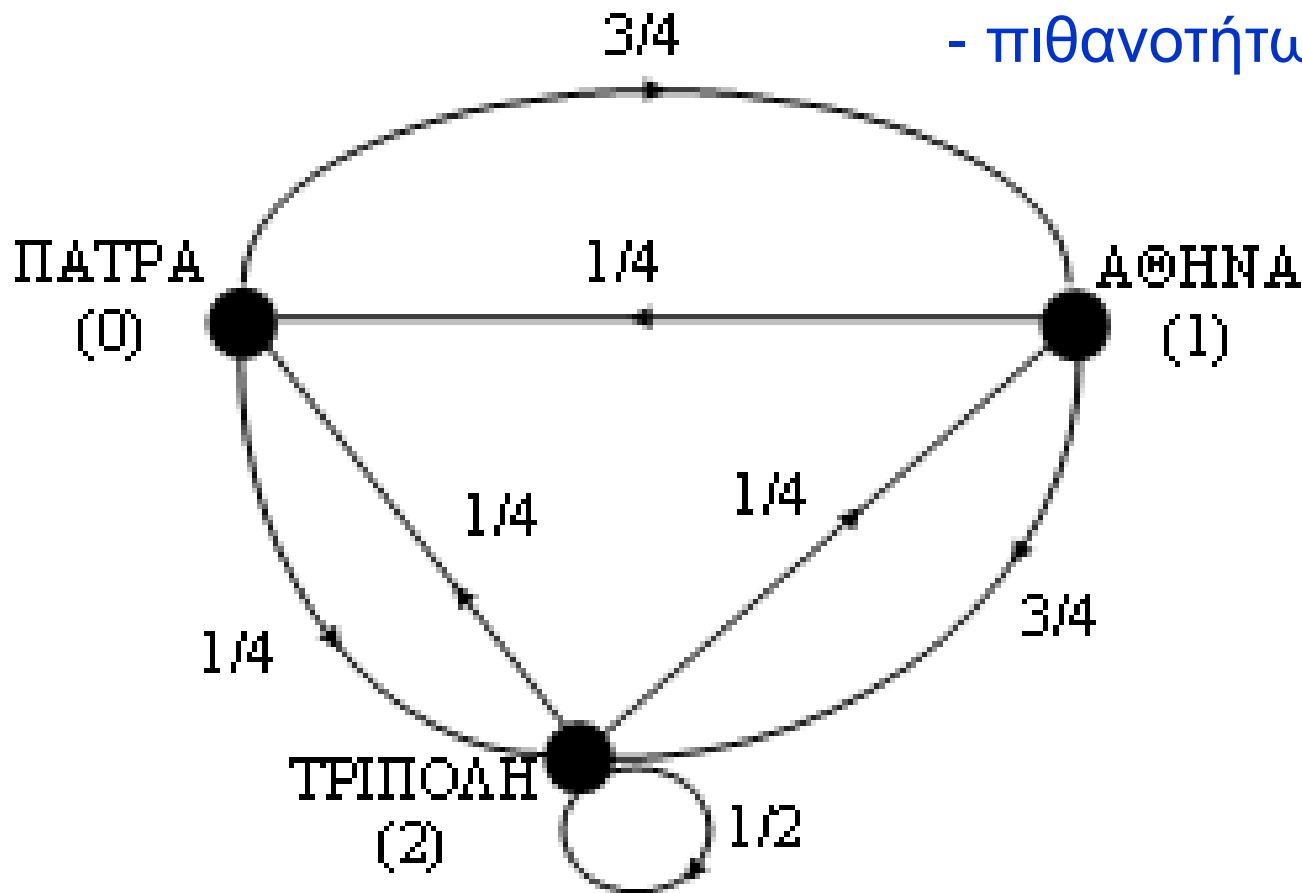
$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση E_j λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.
Δηλαδή αν $f_j = 1$, $M_j < \infty$ και $\gamma = 1$.
- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι **εργοδικές**, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια **εργοδική**.

Παράδειγμα

Διάγραμμα καταστάσεων -
- πιθανοτήτων μεταβάσεων



Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

- $\vec{\mathbf{P}} = [p_{ij}]$ πίνακας μεταβάσεων

- $\vec{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ διάνυσμα πιθανοτήτων

- Από το θεώρημα 2: $\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

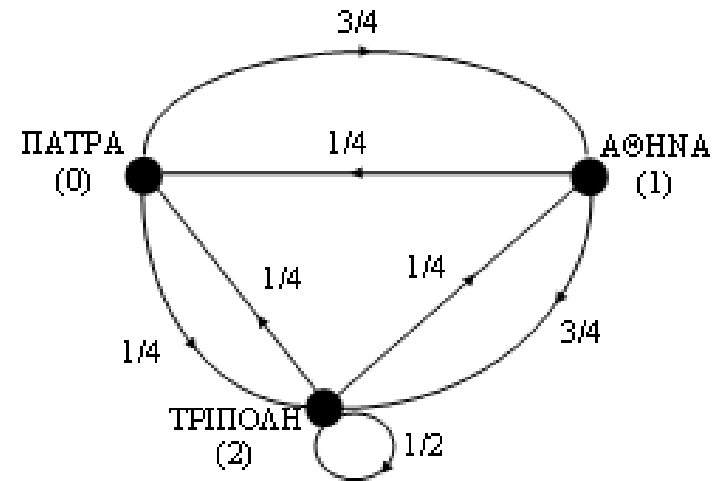
■ Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\pi_0 = 0 \cdot \pi_0 + \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi_0 + \frac{3}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$



Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τις:

$$\pi_0^{(n+1)} = 0 \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_1^{(n+1)} = \frac{3}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + 0 \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{3}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{2} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_0^{(n)} + \pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} = 1$$

για $n \rightarrow \infty$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (3)

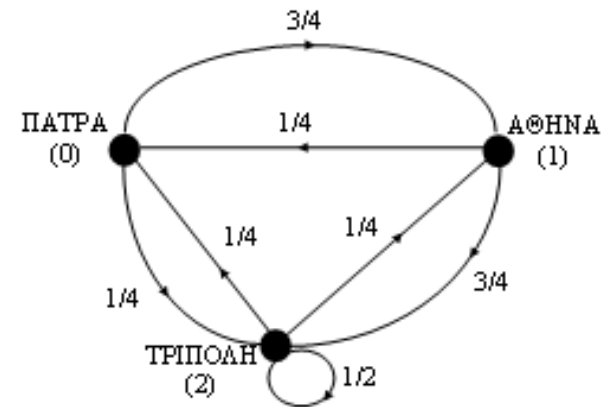
■ Αποτέλεσμα:

$$\pi_0 = 1/5 = 0.20$$

$$\pi_1 = 7/25 = 0.28$$

$$\pi_2 = 13/25 = 0.52$$

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης



Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

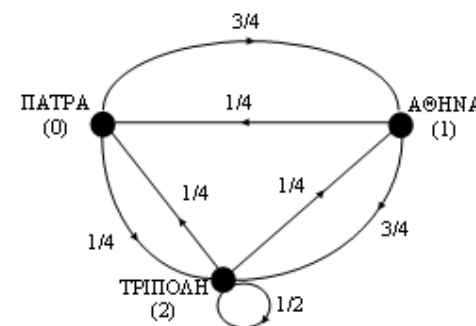
- Υπολογισμός πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)}$: η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση E_j τη χρονική στιγμή n .

- $\vec{\pi}^{(n)} \equiv [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα n

- Ισχύει ότι
$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}$$

$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(0)} \cdot (\mathbf{P})^n$$

Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (2)



- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η $\vec{\pi}^{(0)} = [1, 0, 0]$, δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	...	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	...	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	...	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	...	0.52

- Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.

Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

Prob [Το σύστημα να παραμείνει στην E_i για ακριβώς m επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην $E_i] = (1 - p_{ii}) p_{ii}^m$

Γεωμετρική κατανομή
(Ιδιότητα αμνησίας)