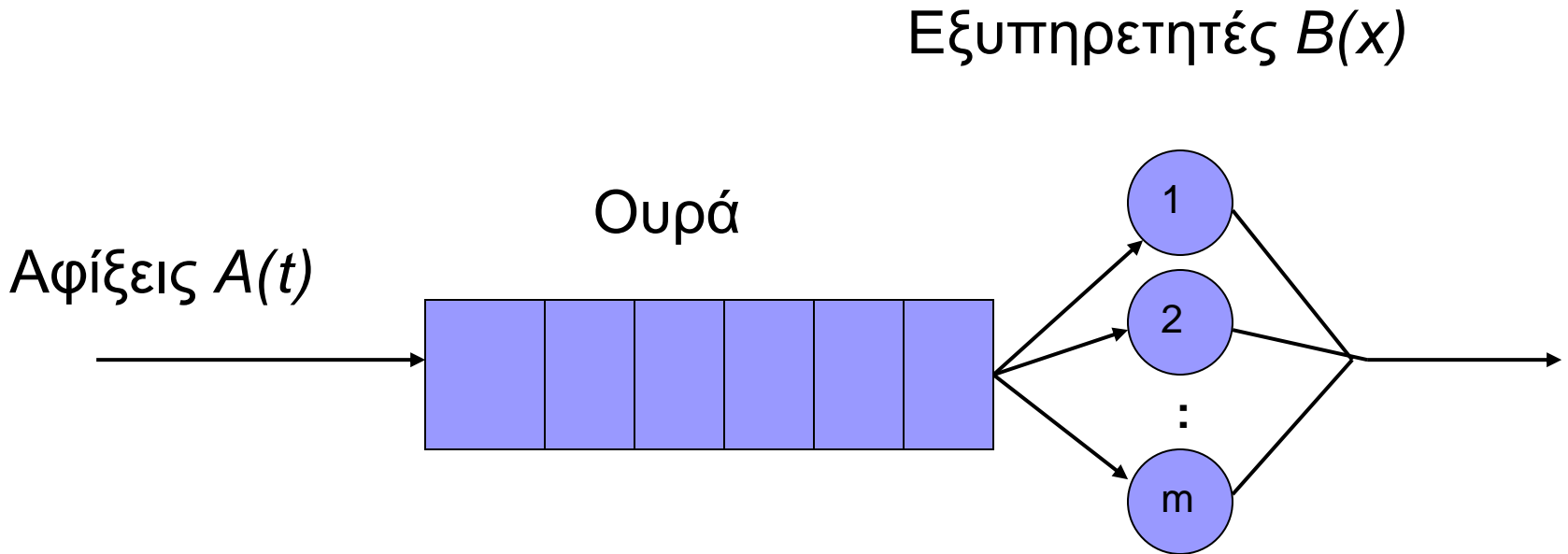


Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Απλά μοντέλα Συστημάτων Αναμονής
Διαδικασίες Markov Συνεχούς Χρόνου

Γιάννης Γαροφαλάκης

Ένα Σύστημα Αναμονής



- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)*
 $A(t) = \text{Prob}[\text{χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων} \leq t]$
- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη (Χ.Ε.)*
 $B(x) = \text{Prob}[\text{χρόνος εξυπηρέτησης} \leq x]$
- Συνήθως υποθέτουμε ότι οι παραπάνω **Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΔ)** συγκροτούνται από ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες **Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)**

Άλλα μεγέθη περιγραφής του συστήματος

- Αριθμός εξυπηρετητών (servers) στο σύστημα m .
- Χωρητικότητα του συστήματος σε πελάτες K
(default: $K = \infty$)
- Πληθυσμός υποψηφίων πελατών M (default: $M = \infty$)
- Πολιτική εξυπηρέτησης, δηλαδή ο τρόπος επιλογής πελατών από την ουρά για τον (τους) εξυπηρετητές.
(default: FCFS ή FIFO)
- Κλάσεις πελατών (default: 1)
- Ομάδες προτεραιότητας πελατών (default: 1)
- Διαθεσιμότητα εξυπηρετητή (default: 100%)

Μετρικές απόδοσης

- *Χρόνος απόκρισης – response time* (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για ένα πελάτη.
- *Χρόνος αναμονής* για ένα πελάτη.
- *Αριθμός πελατών* στο σύστημα.
- *Χρησιμοποίηση (Utilization)* του συστήματος.

Συμβολισμός συστημάτων αναμονής

■ $A/B/m$

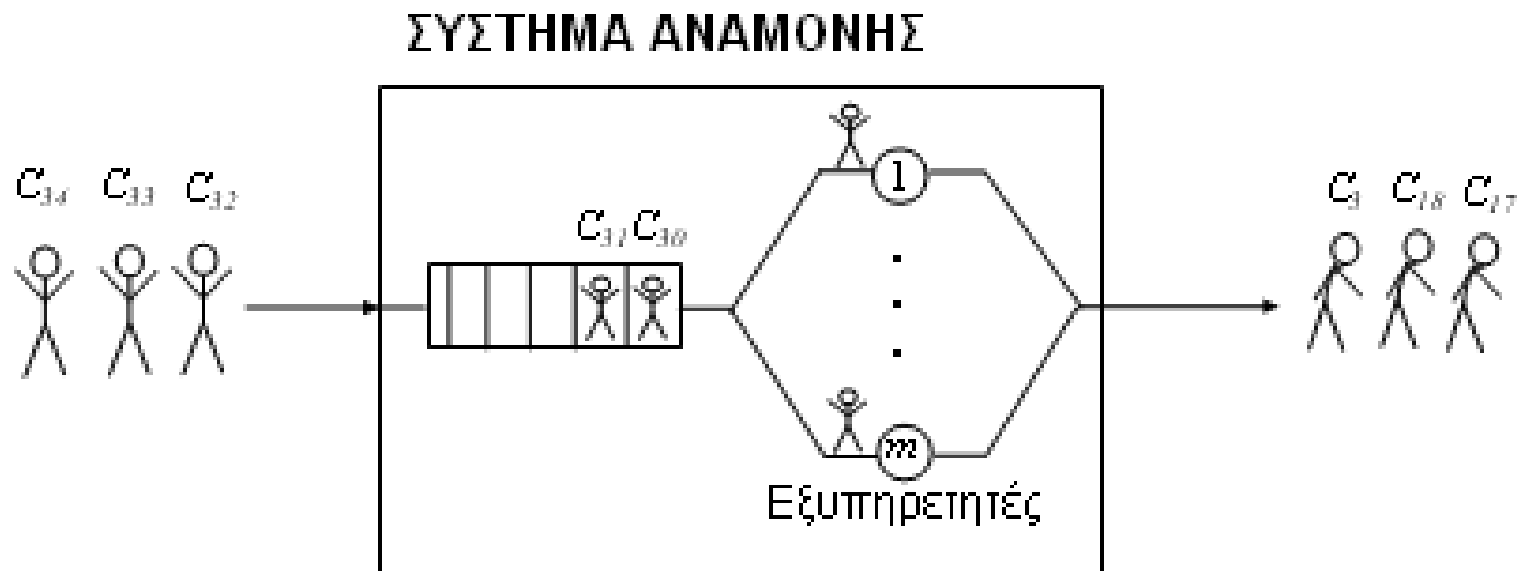
- A, B : Συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας $X.A$ και $X.E$ αντίστοιχα. Εκφράζονται ως
 - M (για την εκθετική κατανομή).
 - D (για τη ντετερμινιστική [σταθερή] κατανομή).
 - Er (για την κατανομή Erlang r -βαθμίδων).
 - G (για ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)
- m : αριθμός εξυπηρετητών

■ $A/B/m/K/M$

- K : η χωρητικότητα του συστήματος
- M : το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών
όταν αυτά είναι διαφορετικά από ∞

■ Παράδειγμα: **$D/M/2//200$**

Αναπαράσταση συστήματος αναμονής



- $A(t), B(x)$: αυθαίρετα
- m εξυπηρετητές
- Αριθμούμε τους πελάτες με το δείκτη n και ορίζουμε C_n τον n -οστό πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα

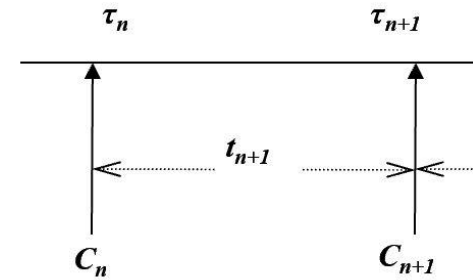
Συμβολισμοί βασικών μεγεθών

■ Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:

$\tau_n \equiv$ χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n

$t_n \equiv$ χρόνος μεταξύ των αφίξεων των C_{n-1} , C_n

$= \tau_n - \tau_{n-1}$ για $n \geq 2$ ($t_1 = \tau_1$)



Έστω ότι υπάρχει το: $\tilde{t} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$

Δηλαδή το \tilde{t} είναι η Σ.Δ. του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, ανεξάρτητο από το n .

$$A(t) = \mathbf{Prob}[\tilde{t} \leq t]$$

➤ \bar{t} μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

➤ Ρυθμός αφίξεων (arrival rate) των πελατών: $\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (2)

■ Χρόνοι εξυπηρέτησης:

$x_n \equiv$ χρόνος εξυπηρέτησης του C_n . Και εδώ: $\tilde{x} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\text{Prob}[\tilde{x} \leq x] = B(x)$$

\bar{x} : μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate) των πελατών : $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$

■ Χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:

$w_n \equiv$ χρόνος αναμονής (στην ουρά) του C_n . ($\tilde{w} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$)

$$W = \bar{w} \quad \text{μέσος χρόνος αναμονής}$$

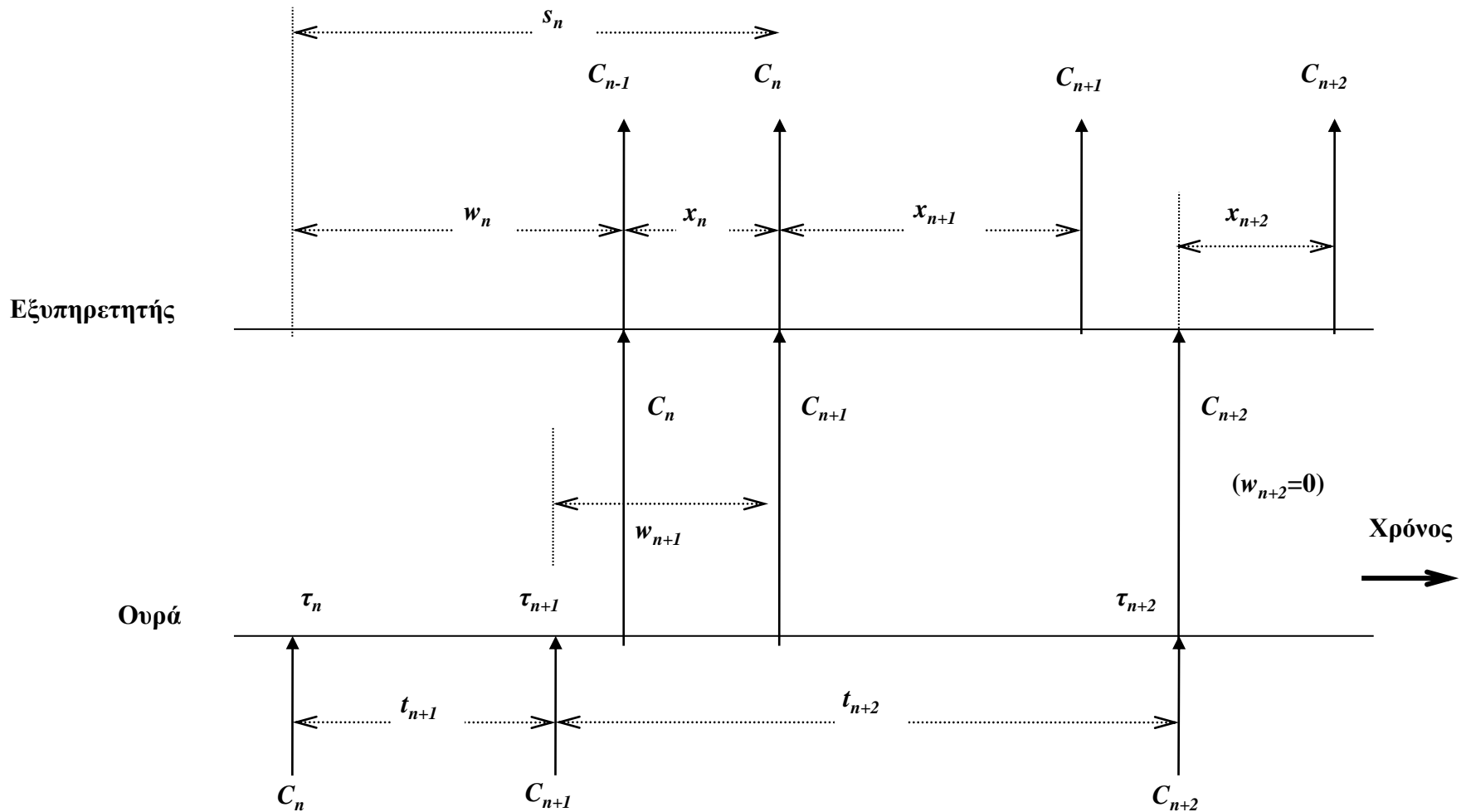
■ Συνολικός χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (χρόνος απόκρισης):

$s_n \equiv$ χρόνος συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) του C_n

$$= W_n + X_n \quad (\tilde{s} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n)$$

$$T = W + \bar{x} \quad \text{μέσος χρόνος συστήματος} \quad (T \equiv \bar{s})$$

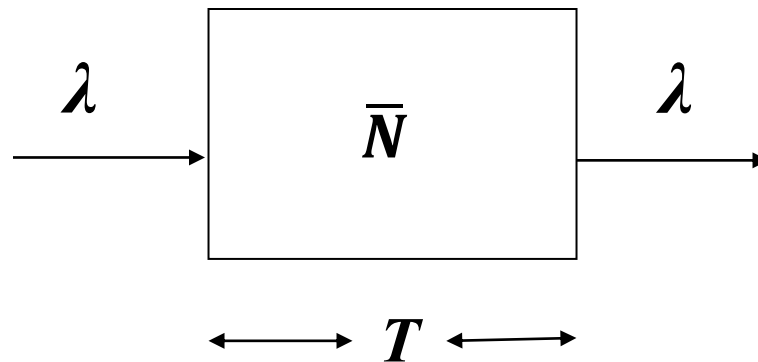
Χρονικό Διάγραμμα Συστήματος Αναμονής (1 εξυπηρετητής – FCFS)



Νόμος του Little

- Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ' αυτό.

$$\bar{N} = \lambda \cdot T$$

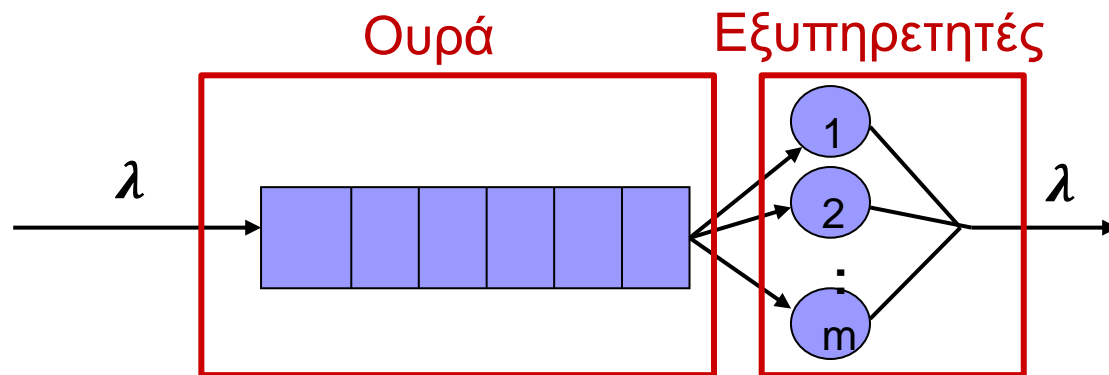


Νόμος του Little (2)

- *Διαισθητική αιτιολόγηση:* ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα βρει μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών \bar{N} που θα υπάρχει όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν $\lambda \cdot T$ πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

- Ο Νόμος δίνει μια χρήσιμη σχέση μεταξύ ορισμένων βασικών μεγεθών ενός συστήματος αναμονής, αλλά δεν αποτελεί «λύση» στο γενικό μας πρόβλημα: Ουσιαστικά συνδέει ένα γνωστό μέγεθος εισόδου (λ), με δύο άγνωστα μεγέθη (\bar{N} , T) τα οποία είναι μετρικές απόδοσης που θέλουμε να βρούμε.

Νόμος του Little (3)



- Για όρια του συστήματος μόνο στην ουρά

$$\bar{N}_q = \lambda \cdot W$$

- Για όρια συστήματος μόνο στον(-ους) εξυπηρετητή(-ές)

$$\bar{N}_s = \lambda \cdot \bar{x}$$

Χρησιμοποίηση (Utilization)

- Ο συντελεστής απασχόλησης ή χρησιμοποίηση ρ , ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται «δουλειά» στο σύστημα, προς το **μέγιστο** ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μπορεί να εκτελέσει αυτή τη «δουλειά». Δηλαδή για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = (\text{μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών}) \times (\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}) / 1$$

$$\rightarrow \rho = \lambda \cdot \bar{x}$$

- Στην περίπτωση m (ίδιων) εξυπηρετητών:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$$

- $\rho = \{\text{Μέση τιμή του ποσοστού εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι}\}$. Διότι:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m} = \frac{\bar{N}_s}{m} \quad (N. Little)$$

Δηλαδή, για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = \bar{N}_s$$

Σταθερό σύστημα αναμονής

- **Σταθερό** σύστημα αναμονής, είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου (άπειρου) μήκους.
- Σε ένα σταθερό σύστημα ισχύει $0 \leq \rho < 1$

G/G/1

- Έστω τ ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος περιμένουμε ο **αριθμός των αφίξεων A** να είναι πολύ κοντά στην τιμή $\lambda \cdot \tau$. Επίσης, έστω p_0 η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος τ , ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος για $\tau - \tau \cdot p_0$ sec και άρα ο **αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται B** στο χρονικό διάστημα τ , είναι περίπου $\frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$
- **$A = B$** : $\lambda \cdot \tau \cong \frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$ οπότε για $\tau \rightarrow \infty$, έχουμε: $\lambda \bar{x} = 1 - p_0$
- Οπότε **$\rho = 1 - p_0$**
όπου p_0 η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (1)

Τα απλούστερα συστήματα: $M/M/m/K$

- *Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)*

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

- *Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης (Χ.Ε.)*

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (2)

- *Ιδιότητα της αμνησίας*: «ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός».

- ΑΦΙΞΕΙΣ:

Αν έχει περάσει χρόνος t_0 από την τελευταία άφιξη (του C_{n-1})

$$Prob[t_n \leq t + t_0 \mid t_n > t_0] = Prob[t_n \leq t]$$

- ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ:

Αν έχει περάσει χρόνος x_0 εξυπηρέτησης του πελάτη C_n

$$Prob[x_n \leq x + x_0 \mid x_n > x_0] = Prob[x_n \leq x]$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (3)

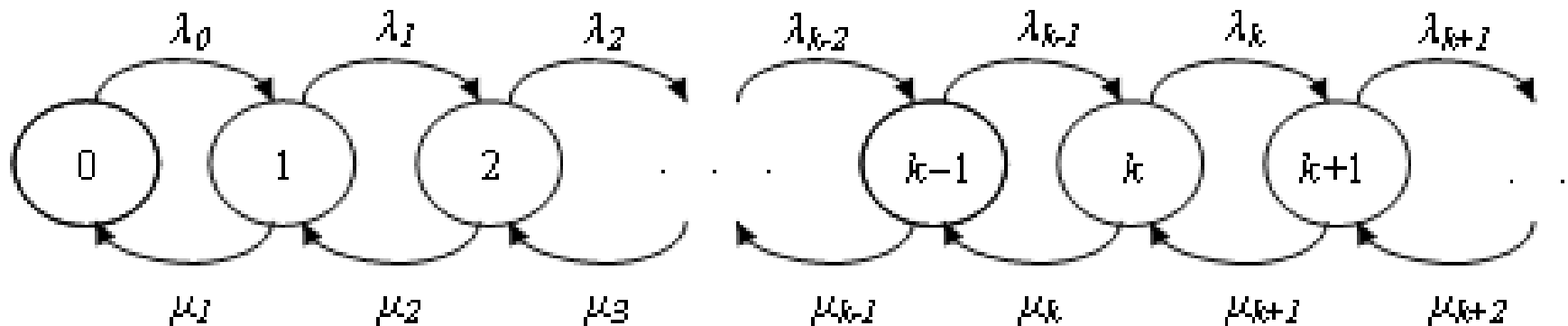
- $P_k(t) = \text{Prob}[k \text{ πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή } t]$
για $0 \leq k \leq K, t \geq 0$
- $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \text{Prob}[k \text{ πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον}]$
- *Κατανομή μόνιμης κατάστασης.*
- Υπάρχει, αν το σύστημα είναι σταθερό ($0 \leq \rho < 1$)

Νόμος ισορροπίας της ροής πιθανότητας

Στη μόνιμη κατάσταση, ο «ρυθμός ροής πιθανότητας» μιας αλυσίδας Markov από κάθε κατάσταση, είναι ίσος με το «ρυθμό ροής πιθανότητας» προς την κατάσταση.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (1)

- Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j , τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις $j-1$ ή $j+1$.
- λ_k : ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα
- μ_k : ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα



Διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (2)

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **από** την κατάσταση k } =

$$p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **προς** την κατάσταση k } =

$$p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$$

- Με βάση το νόμο ισορροπίας ροής

- Για $k \geq 1$ $p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k) = p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$ (1)

- Για $k = 0$ $p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$ (2)

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (3)

- Ισχύει πάντα ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \quad (3)$$

- Λύνοντας τις εξισώσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

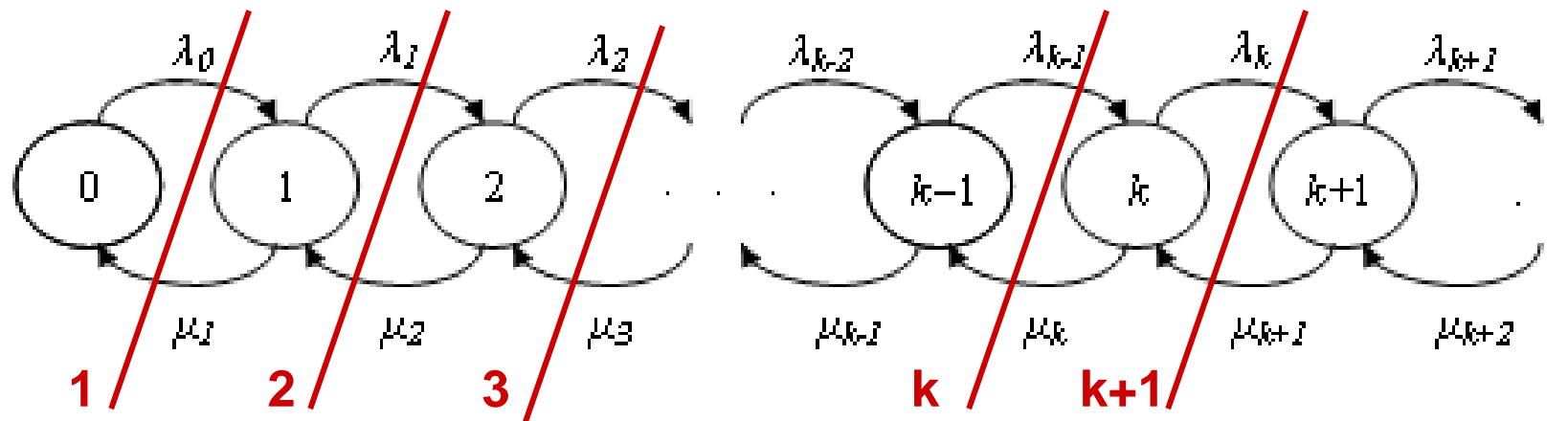
$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad (4)$$

- Η παραπάνω λύση υπάρχει (δηλαδή, υπάρχει μόνιμη κατάσταση), αν $p_0 > 0$, δηλαδή αν ο παρονομαστής της σχέσης (4) είναι μικρότερος από ∞ . Για να ισχύει το τελευταίο, θα πρέπει η ακολουθία λ_k / μ_k να συγκλίνει, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιο k_0 τέτοιο ώστε:
$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 \quad \text{για όλα τα } k \geq k_0$$

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (4)

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Ο Νόμος διατήρησης της ροής εφαρμόζεται και σε κάθε «σύνορο» της αλυσίδας Markov:



1: $\rho_0 \cdot \lambda_0 = \rho_1 \cdot \mu_1$

2: $\rho_1 \cdot \lambda_1 = \rho_2 \cdot \mu_2$

:

k: $\rho_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = \rho_k \cdot \mu_k$

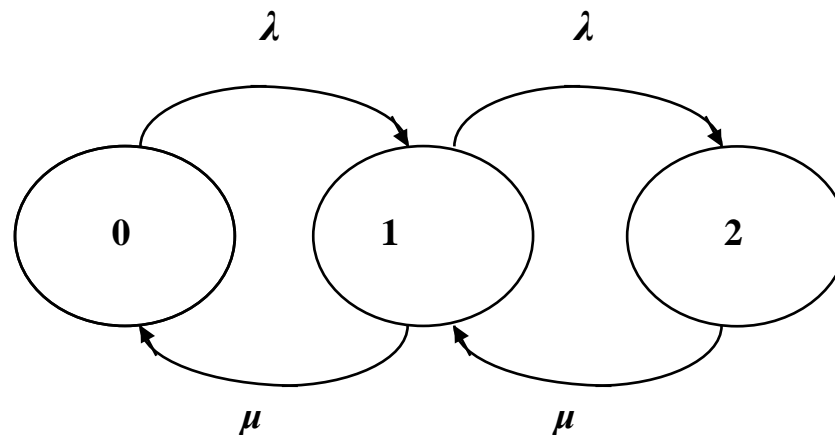
Ίδια Αποτελέσματα

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μας δίνεται μια αλυσίδα Markov γεννήσεων – θανάτων, η οποία έχει μόνο τρεις καταστάσεις $\{0, 1, 2\}$, ενώ ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \text{ για } k = 0, 1 \quad \text{και} \quad \mu_k = \mu \text{ για } k = 1, 2$$



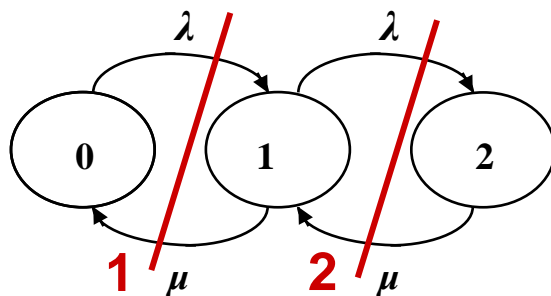
Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Για την κατάσταση 0: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 1: $p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 2: $p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda$

Από τις παραπάνω 3 σχέσεις, μόνο οι 2 είναι ανεξάρτητες.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:



1: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

2: $p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$

Ανεξάρτητες.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Χρησιμοποιούμε την $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ με 2 από τις παραπάνω, και παίρνουμε την τελική λύση:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

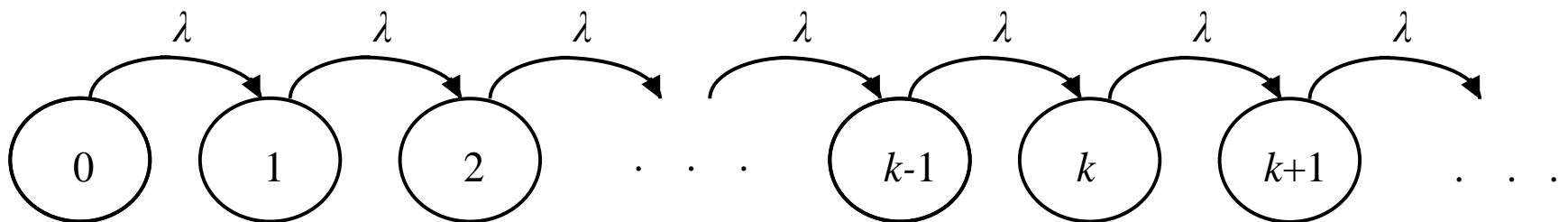
$$p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

$$p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

- Η αλυσίδα αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα **M/M/1/2**. Γιατί;
- Στο σύστημα αυτό επιτρέπεται $\lambda/\mu \geq 1$. Γιατί;

Διαδικασίες Poisson (1)

- Ειδική περίπτωση Γεννήσεων-Θανάτων (μόνο αφίξεις)
 - $\lambda_k = \lambda$ για όλα τα k
 - $\mu_k = 0$ για όλα τα k



Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων Διαδικασίας Poisson

Δεν είναι εργοδικό σύστημα. Όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές.

Διαδικασίες Poisson (2)

- Έστω το σύστημα ξεκινά τη στιγμή $t = 0$, άδειο. Δηλαδή:

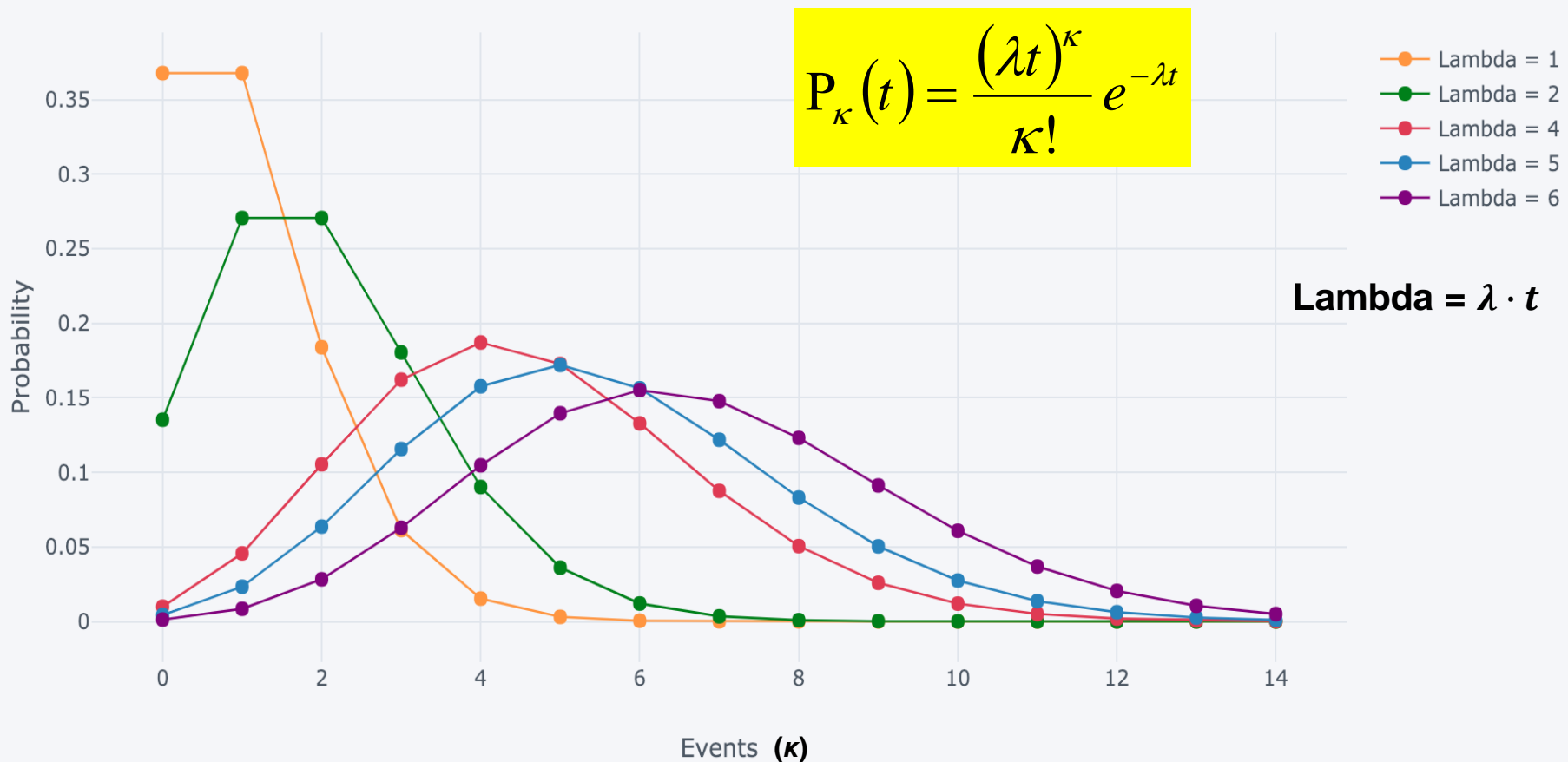
$$P_{\kappa}(0) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ 0, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

- Τη χρονική στιγμή t : $P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$ για $k \geq 0, t \geq 0$
Κατανομή Poisson

- Μέση Τιμή και Διακύμανση (αριθμού αφίξεων στο $[0, t]$), ίσα με λt . (αναμενόμενο).
- Δηλαδή, στο M/M/1, η διαδικασία μόνο των αφίξεων, είναι Poisson

Η κατανομή Poisson

Probability of Events in One Interval



Poisson αφίξεις → Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ αφίξεων

$$A(t) = P[\tilde{t} \leq t]$$

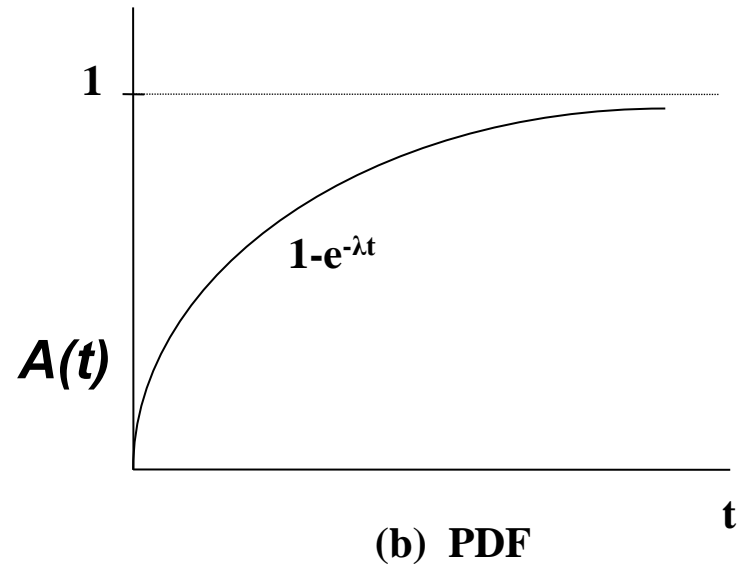
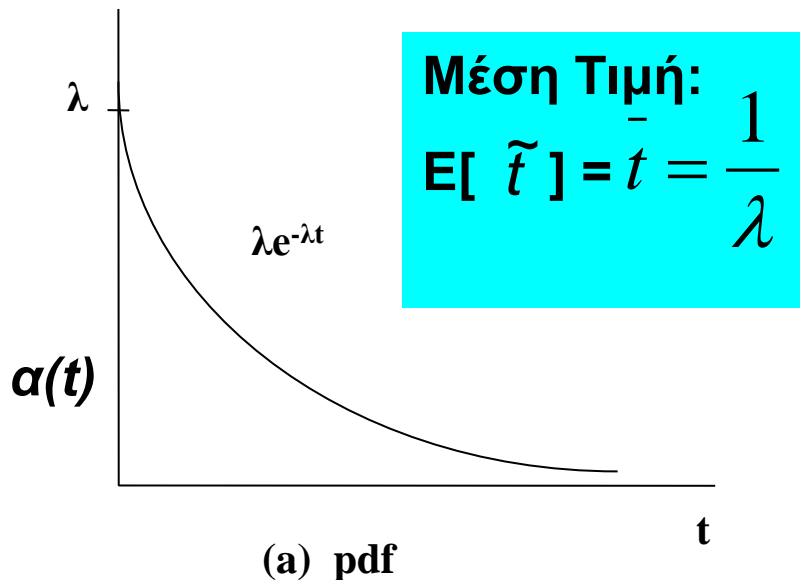
$$P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$$

- \tilde{t} = ΤΜ για το χρόνο μεταξύ αφίξεων, με PDF $A(t)$ και pdf $\alpha(t)$

Poisson

$$A(t) = 1 - P[\tilde{t} > t] = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{PDF Εκθετικής})$$

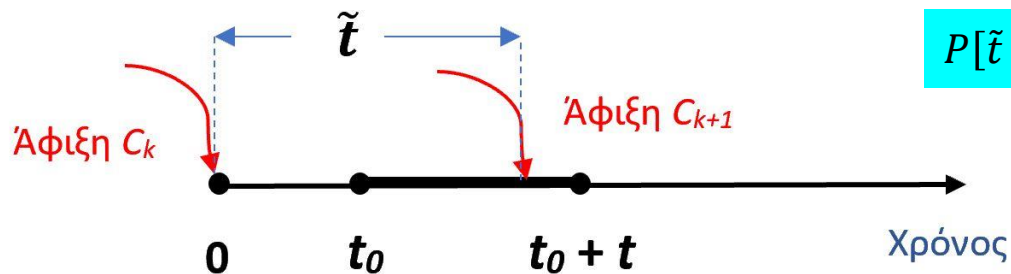
$$\text{Παράγωγος ως προς } t: \quad \alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{pdf Εκθετικής})$$



Η εκθετική κατανομή

Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής

Έστω ότι γίνεται μια άφιξη τη χρονική στιγμή 0 . Τώρα, έστω ότι πέρασαν t_0 δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των οποίων δεν έγινε άφιξη. Αν αυτή τη στιγμή t_0 ρωτήσουμε «ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να γίνει μέσα στα επόμενα t δευτερόλεπτα από τώρα», η απάντηση θα είναι:

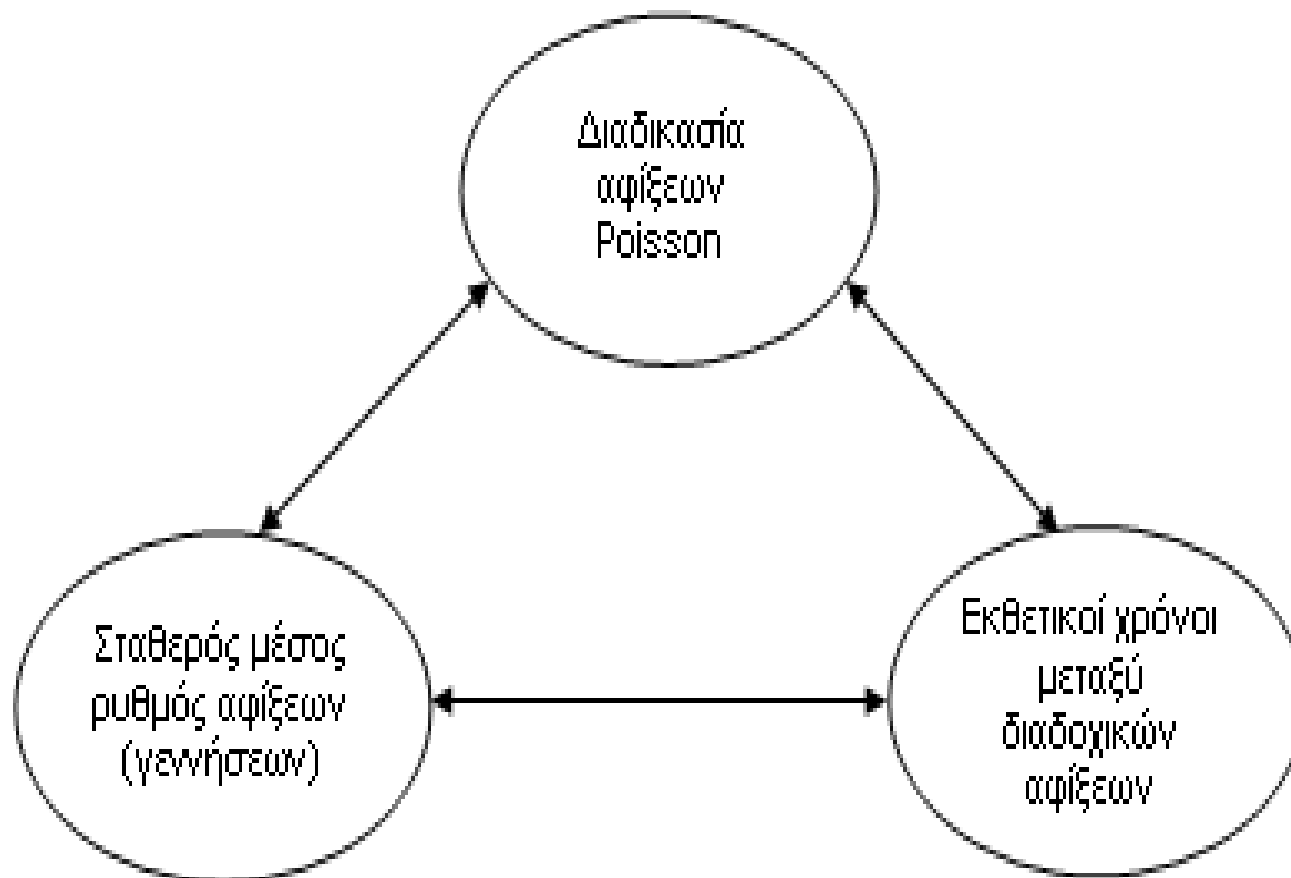


$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{P[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]} = \frac{P[\tilde{t} \leq t + t_0] - P[\tilde{t} \leq t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]}$$

$$\Leftrightarrow P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} \Leftrightarrow$$

$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = P[\tilde{t} \leq t]$$

Σχέσεις



Το κλασικό Σύστημα Αναμονής

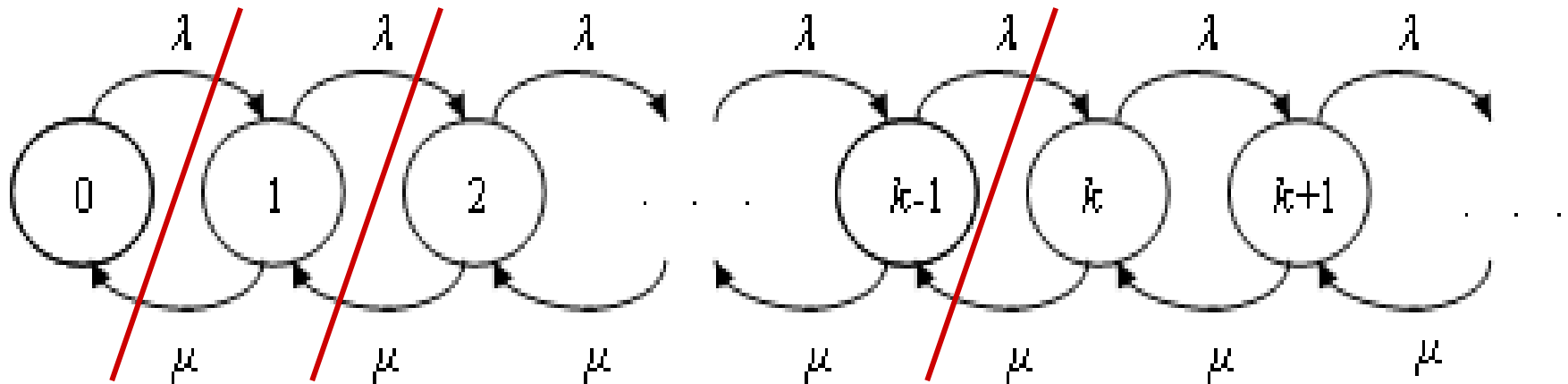
M/M/1

- *Εκθετική* κατανομή της διαδικασίας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- *Εκθετική* κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης
- Ένας εξυπηρετητής
- Άπειρο μήκος ουράς
- Αλυσίδα Markov Γεννήσεων – Θανάτων
- Με τη συνηθισμένη παραδοχή ότι οι *ρυθμοί* αφίξεων και εξυπηρέτησης δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός παρόντων πελατών), ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Το Σύστημα Αναμονής $M/M/1$ (συνέχεια)



Διάγραμμα καταστάσεων - ρυθμών μεταβάσεων για το σύστημα $M/M/1$.

Για τη λύση:

$$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$$

$$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$$

:

$$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$$

:

και $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Λύση συστήματος $M/M/1$

- Χρησιμοποίηση (G/G/1):

$$\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Συνθήκη σταθερότητας: $0 < \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

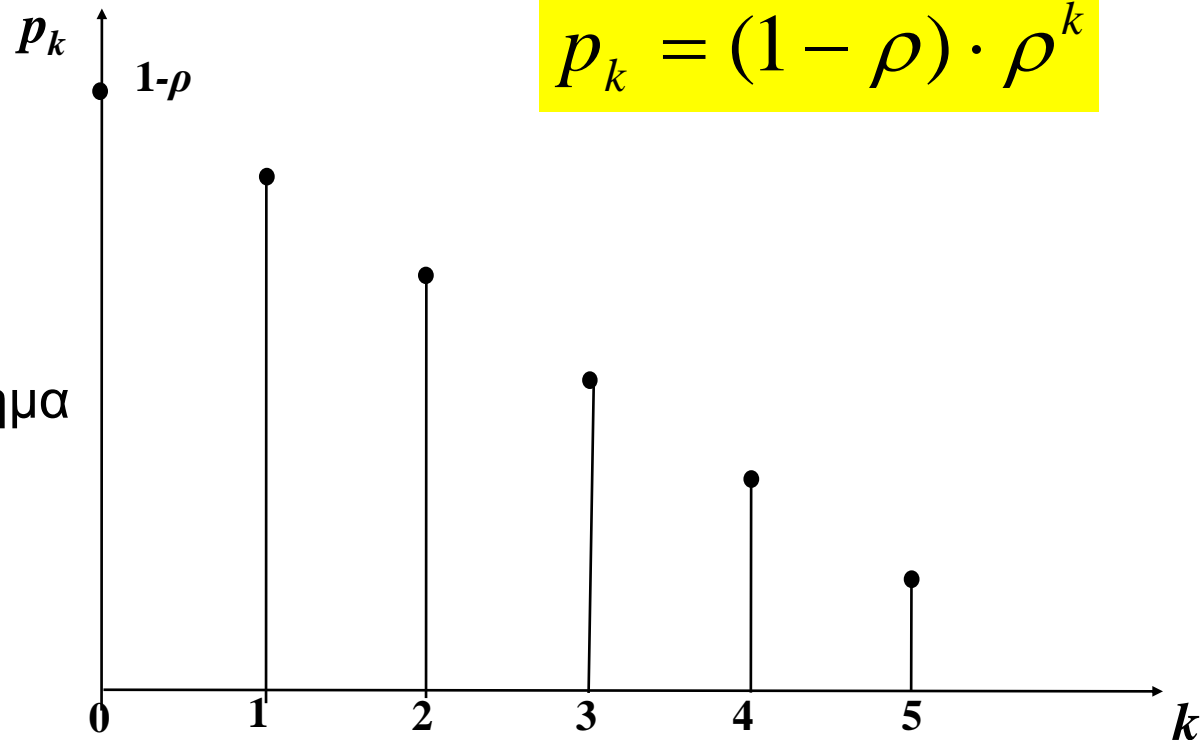
- Από τη γενική λύση των διαδικασιών Γ-Θ (ή την προσέγγιση της προηγούμενης διαφάνειας):

$$p_k = (1 - \rho) \cdot \rho^k \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Περιέχεται το: $p_0 = 1 - \rho$

Λύση συστήματος $M/M/1$ (συν)

- Τα p_k ακολουθούν τη Γεωμετρική Κατανομή
- Εξαρτώνται από τα λ και μ , μόνο μέσω του λόγου ΤΟΥΣ ρ

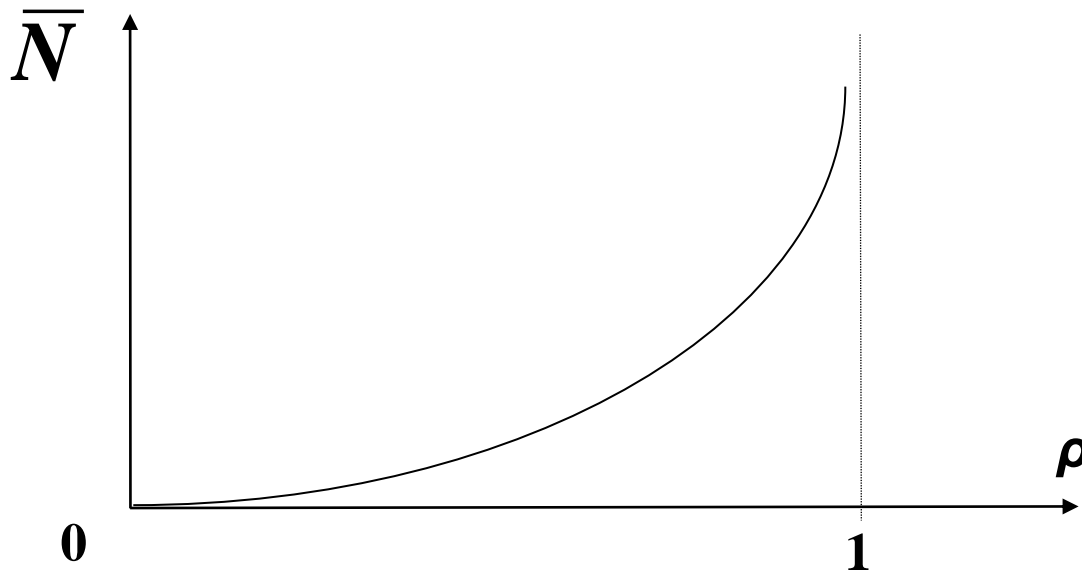


Τα p_k στο σύστημα $M/M/1$.

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

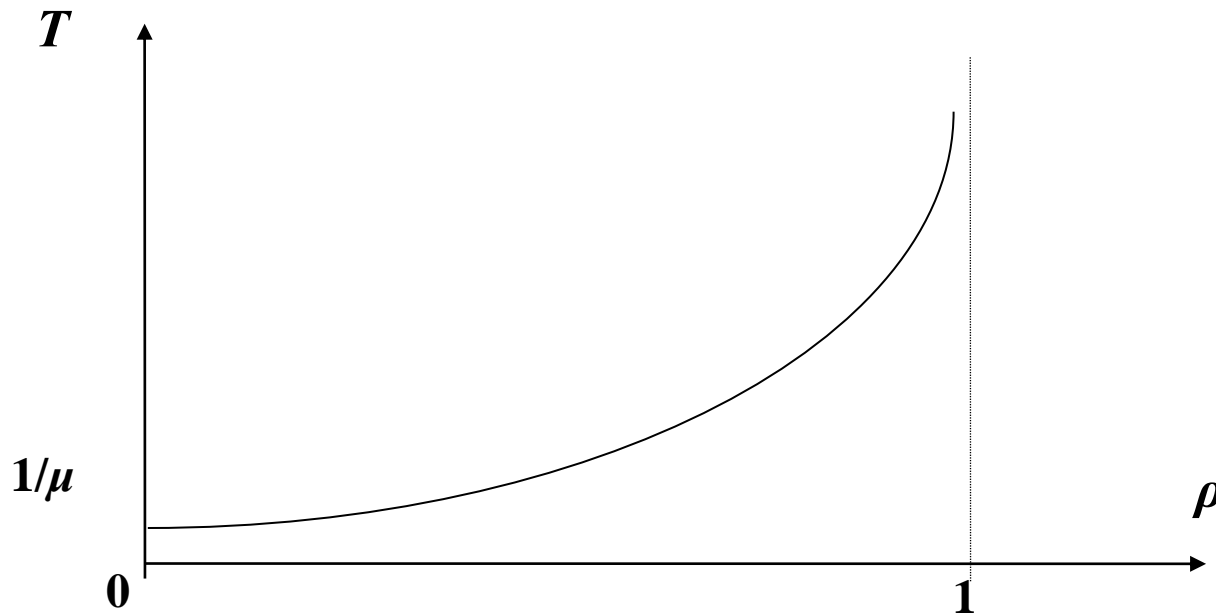


Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα
(*Response Time*)

Με χρήση του *Νόμου του Little*:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$



Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον n πελάτες στο σύστημα

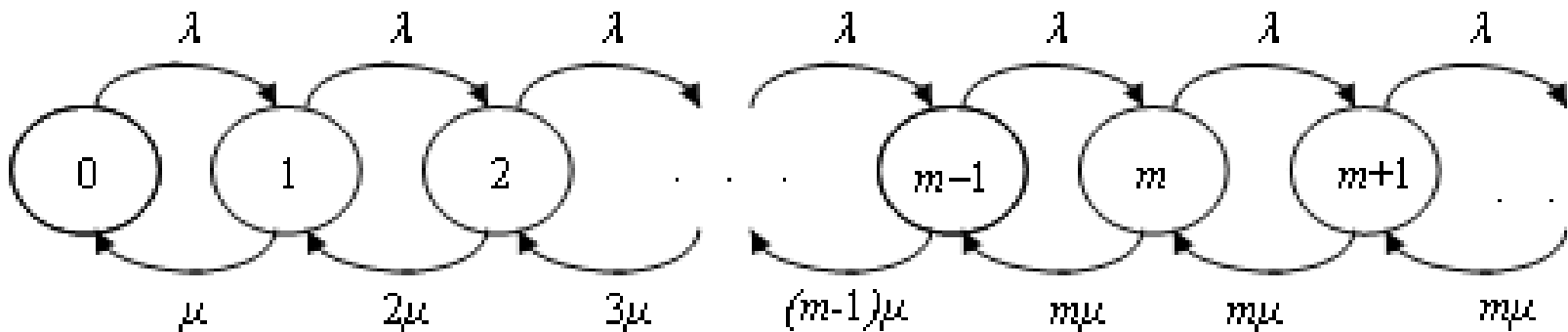
$$P_{(n)} = \text{Prob}[n \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$$

$$P_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = (1 - \rho) \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \frac{1}{1 - \rho} = \rho^n$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/m$

- m ίδιοι εξυπηρετητές
- Ο καθένας με ρυθμό εξυπηρέτησης μ
- Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, ίδια με του $M/M/1$
- $\lambda_k = \lambda$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

- $$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ m\mu & \text{για } m \leq k \end{cases}$$



Το σύστημα αναμονής $M/M/m$ (συν)

■ Χρησιμοποίηση

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Συνθήκη Σταθερότητας

$$0 < \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

■ Λύση μόνιμης κατάστασης

$$P_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!} & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} & \text{για } k \geq m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$

- Πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά ένας πελάτης:

$\Pi = Prob[m \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} = p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m\rho + \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$ (συν)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (response time)

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\Pi}{m(1-\rho)} \right) \quad (\text{N. Little})$$

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\Pi}{m\mu(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m\rho = \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

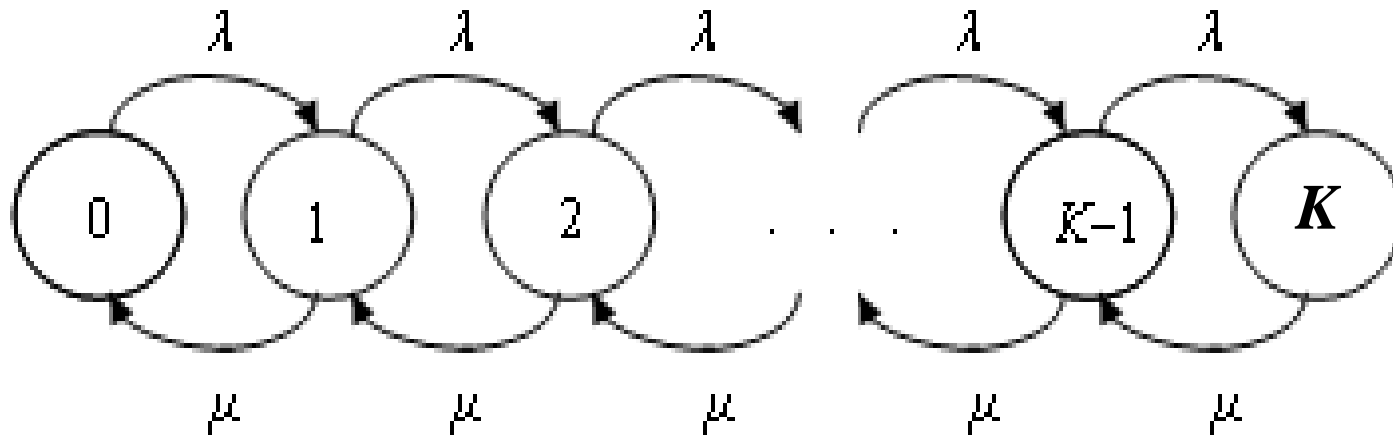
Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$

- Ίδια χαρακτηριστικά με το $M/M/1$, αλλά περιορισμένη χωρητικότητα σε πελάτες.
- Στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ K πελάτες (στην ουρά και στον εξυπηρετητή).
- Πελάτες που φθάνουν και βρίσκουν γεμάτο το σύστημα, χάνονται.
- Οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης του $M/M/1/K$:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{για } 0 \leq k < K \\ 0 & \text{για } k \geq K \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & \text{για } 1 \leq k \leq K \\ 0 & \text{για } k > K \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)



■ Λύση συστήματος

$$P_k = \begin{cases} \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{για } 0 \leq k \leq K \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

ΜΕΤΡΙΚΕΣ

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^K k p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \sum_{k=2}^K (k-1) p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - (\lambda/\mu) \cdot \frac{1 + K(\lambda/\mu)^K}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

■ Παράδειγμα: Το μοντέλο μιας τηλεφωνικής συσκευής χωρίς κράτηση κλήσεων (παλιό αναλογικό σύστημα):

$M/M/1/1$

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 0 \\ \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

p_0 : Πιθανότητα να μιλήσει, κάποιος που καλεί

p_1 : Πιθανότητα να βρει κατειλημμένη τη συσκευή, κάποιος που καλεί

λ : Μέσος ρυθμός με τον οποίο γίνονται κλήσεις στη συσκευή

$\bar{x} = 1/\mu$: Μέση χρονική διάρκεια μιας συνομιλίας