Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Διαδικασία Bernoulli

Γιάννης Γαροφαλάκης

Διαδικασία Bernoulli

Μία διαδικασία Bernoulli είναι μία πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, X_3, \ldots$, τέτοια ώστε

- Για κάθε i η X_i παίρνει την τιμή 0 ή 1.
- Για κάθε i η πιθανότητα το X_i να είναι 1 είναι πάντα ίση με p.

Κατά συνέπεια, η διαδικασία Bernoulli είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ομοιόμορφα κατανεμημένων **δοκιμών Bernoulli**.

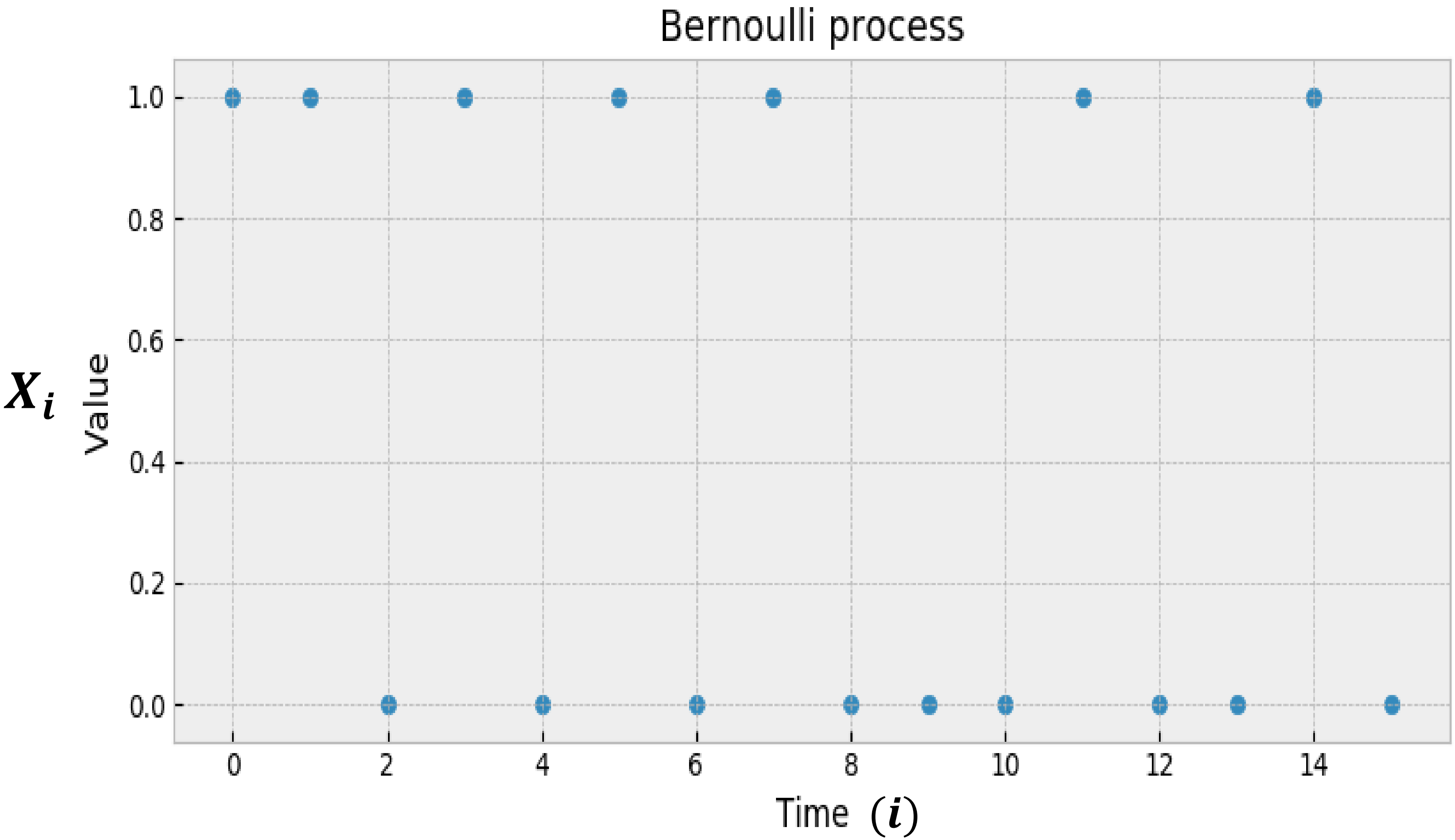
Example

- Μία σειρά ρίψεων ενός νομίσματος
- Αφίξεις πακέτων σε έναν router

Βασικές Ιδιότητες Διαδικασιών Bernoulli

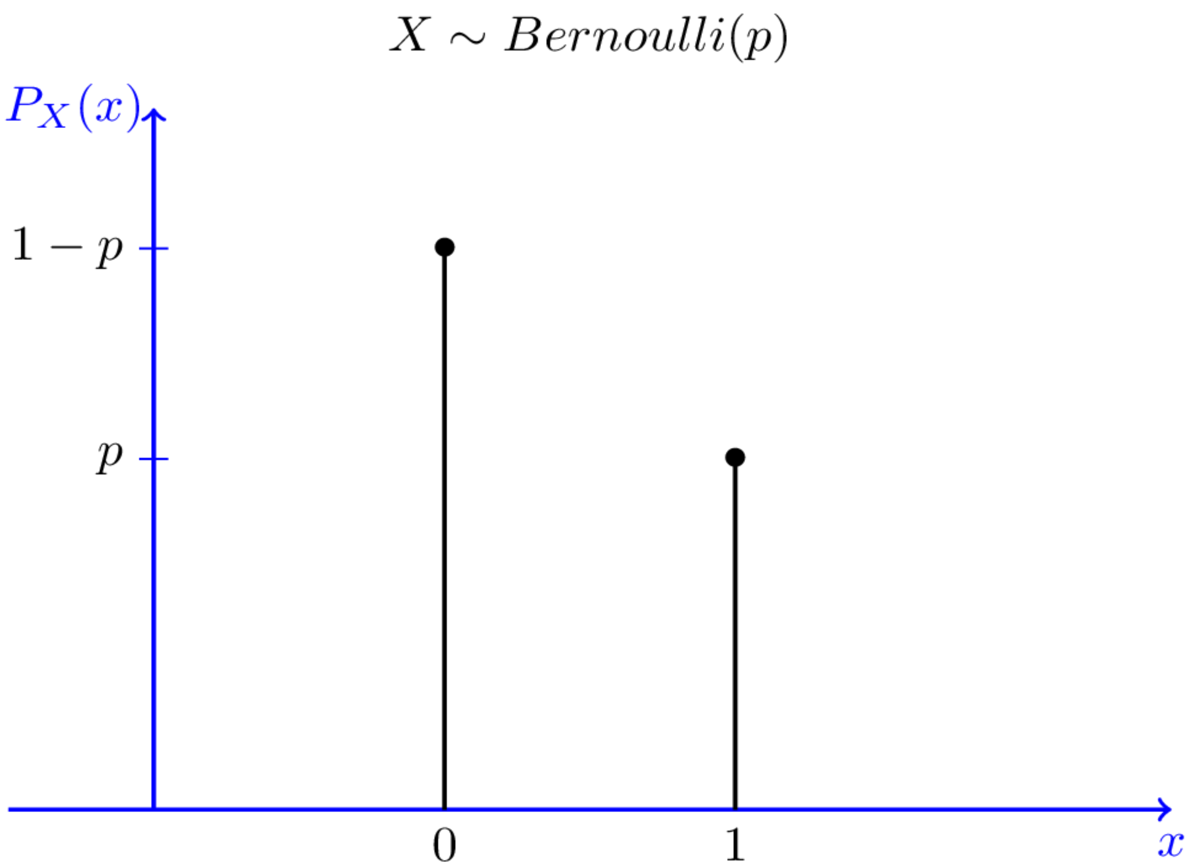
- **Ανεξαρτησία**
- **Έλλειψη μνήμης / Ιδιότητα της Επανεκκίνησης**

Διαδικασία Bernoulli (2)



Κατανομή Bernoulli

- **pmf**: $p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$

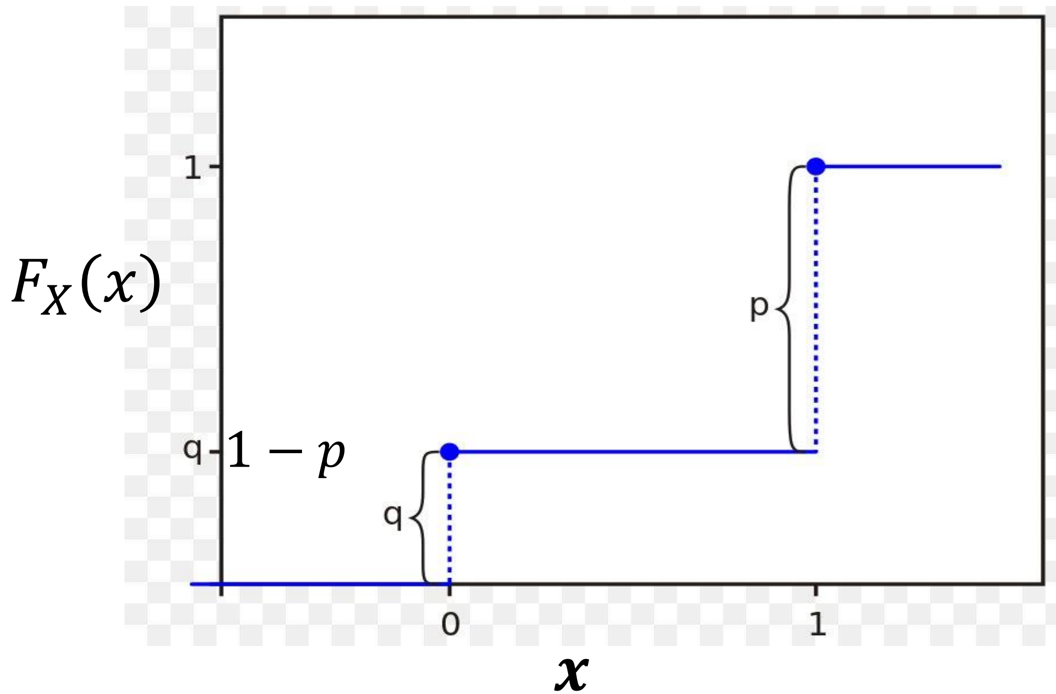


Κατανομή Bernoulli (2)

pmf: $p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} p_X(x_i)$$

- **CDF**: $$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



Κατανομή Bernoulli (3)

pmf: $p_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1-p & x=0 \\ p & x=1 \end{cases}$

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

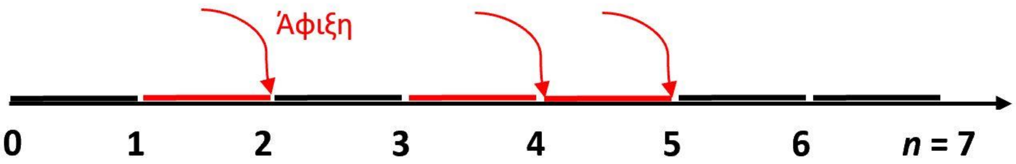
- $E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = \boldsymbol{p}$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - E[X])^2 p_X(x_i)$$

- $Var(X) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{p})$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (1)

- Η τ.μ. *N* που μετρά το πλήθος των αφίξεων (επιτυχιών) *k*, κατά τη διάρκεια *n* slots (δοκιμών):



Αριθμός τρόπων κατανομής *k* επιτυχιών σε *n* προσπάθειες:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ οπότε:

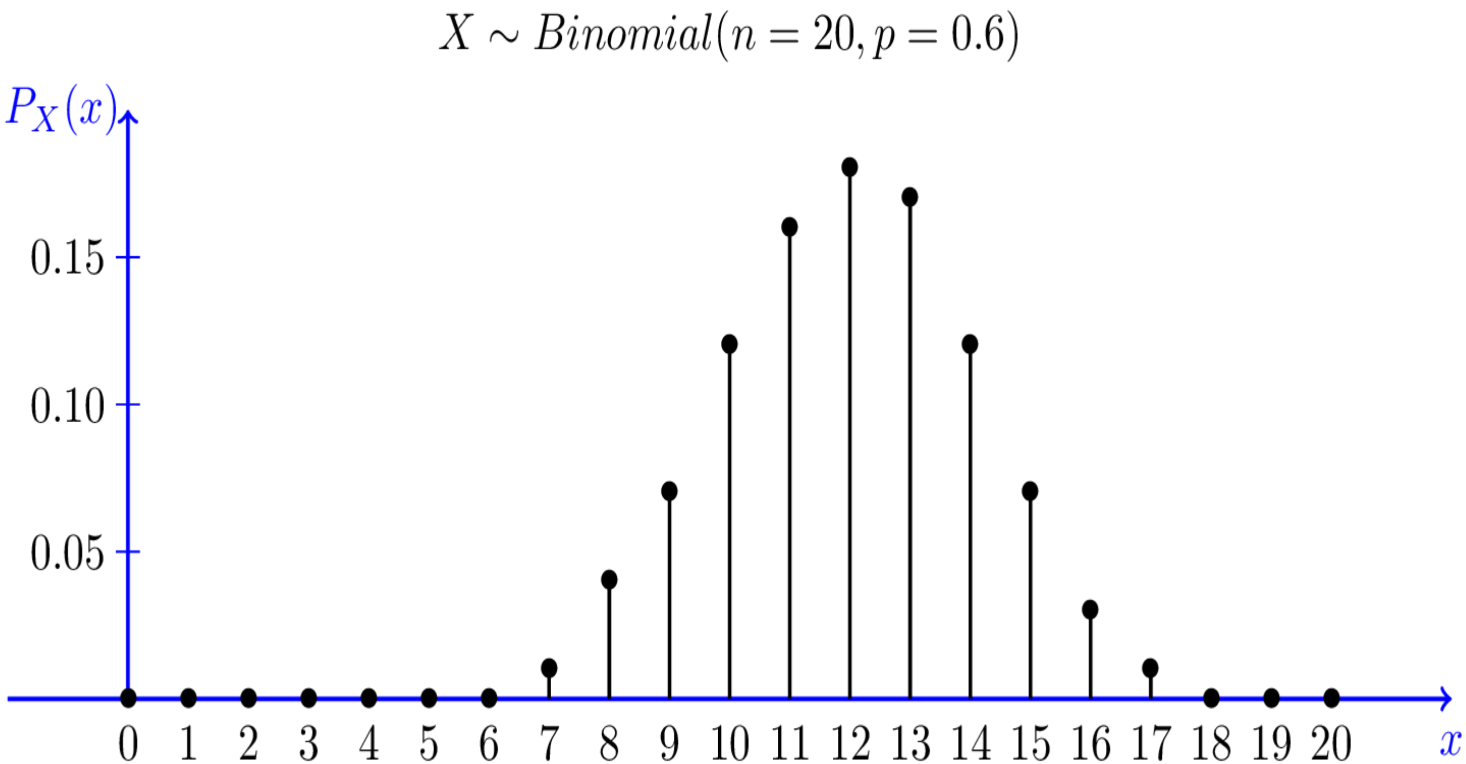
$\Pr\{k$ αφίξεις κατά τη διάρκεια n slots$\} = p_N(k) =$

$= \boldsymbol{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$, $0 \leq k \leq n$ **Binomial** $\mathbf{B}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$

$\mathrm{E}[\mathrm{N}] = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}$ $Var(N) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \cdot (\mathbf{1} - \boldsymbol{p})$

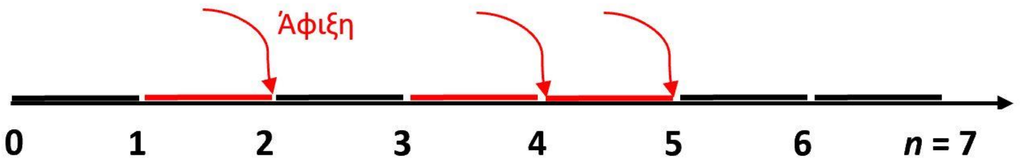
pmf της Binomial $\mathbf{B}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$

$$p_N(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (2)

- Η τ.μ. T που μετρά το χρόνο $\boldsymbol{t}$ μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:



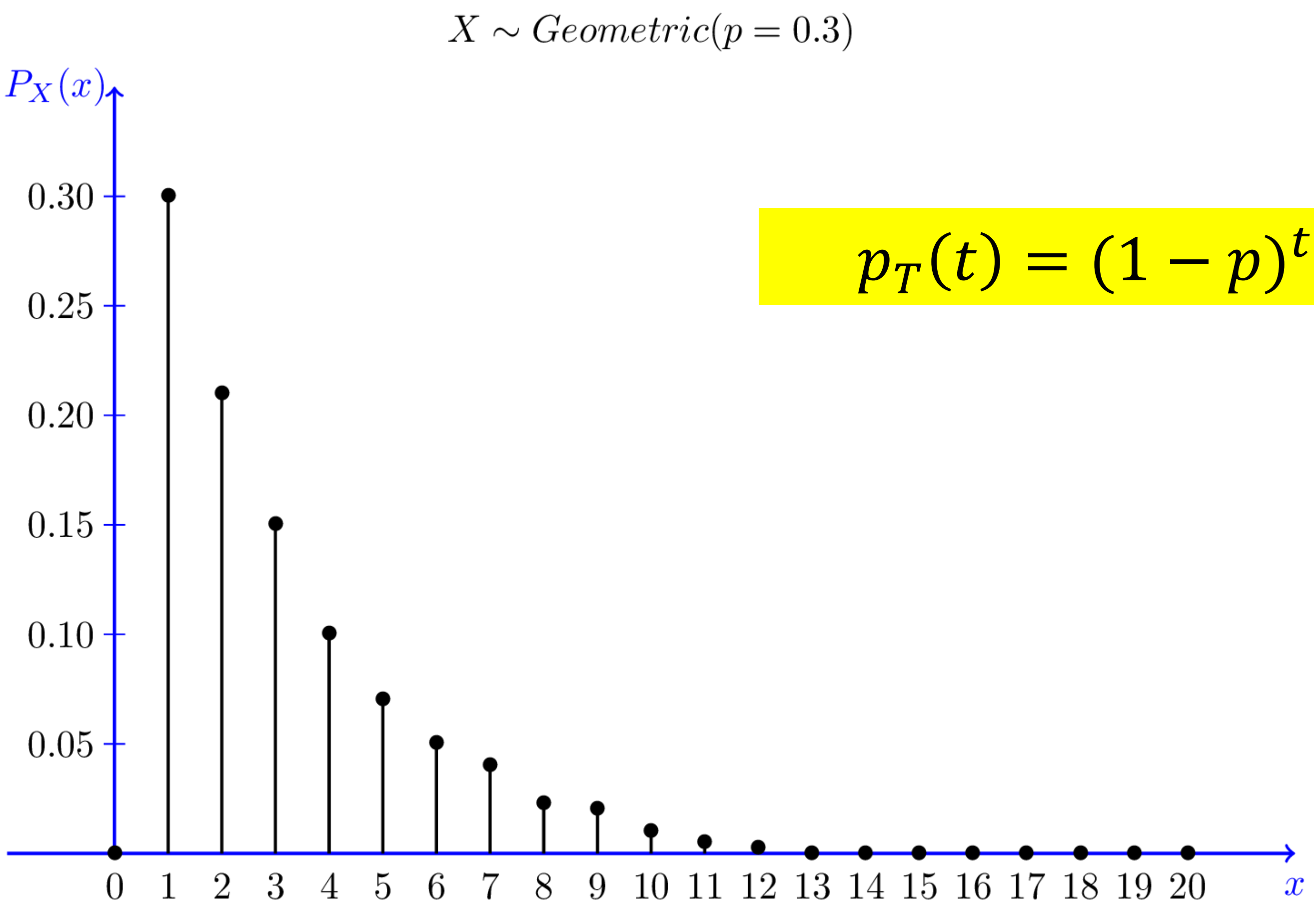
$$\Pr\{t \text{ slots μέχρι την επόμενη άφιξη}\} = p_T(t) =$$

$$= \boxed{(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}\cdot \boldsymbol{p}}$$ **Γεωμετρική** $\mathbf{NB}(\mathbf{1}, \boldsymbol{p})$

$$\mathrm{E[T]} = \mathbf{1/p}$$

$$Var(T) = (\mathbf{1}-\boldsymbol{p})/\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}$$

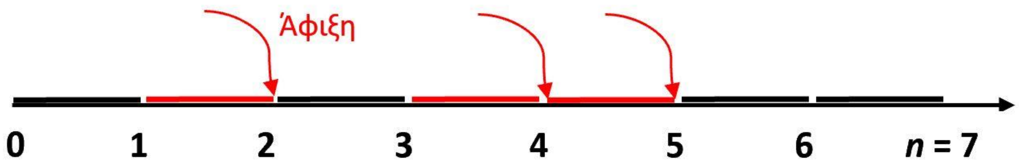
pmf της Γεωμετρικής $\mathrm{NB}(1, p)$



$$p_T(t) = (1-p)^{t-1} \cdot p$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (3)

- Η τ.μ. Y_k που μετρά το χρόνο $\boldsymbol{t}$ μέχρι την *k*-οστή άφιξη:



Δηλαδή: $k-1$ αφίξεις σε $t-1$ slots (binomial), και μετά, 1 άφιξη.

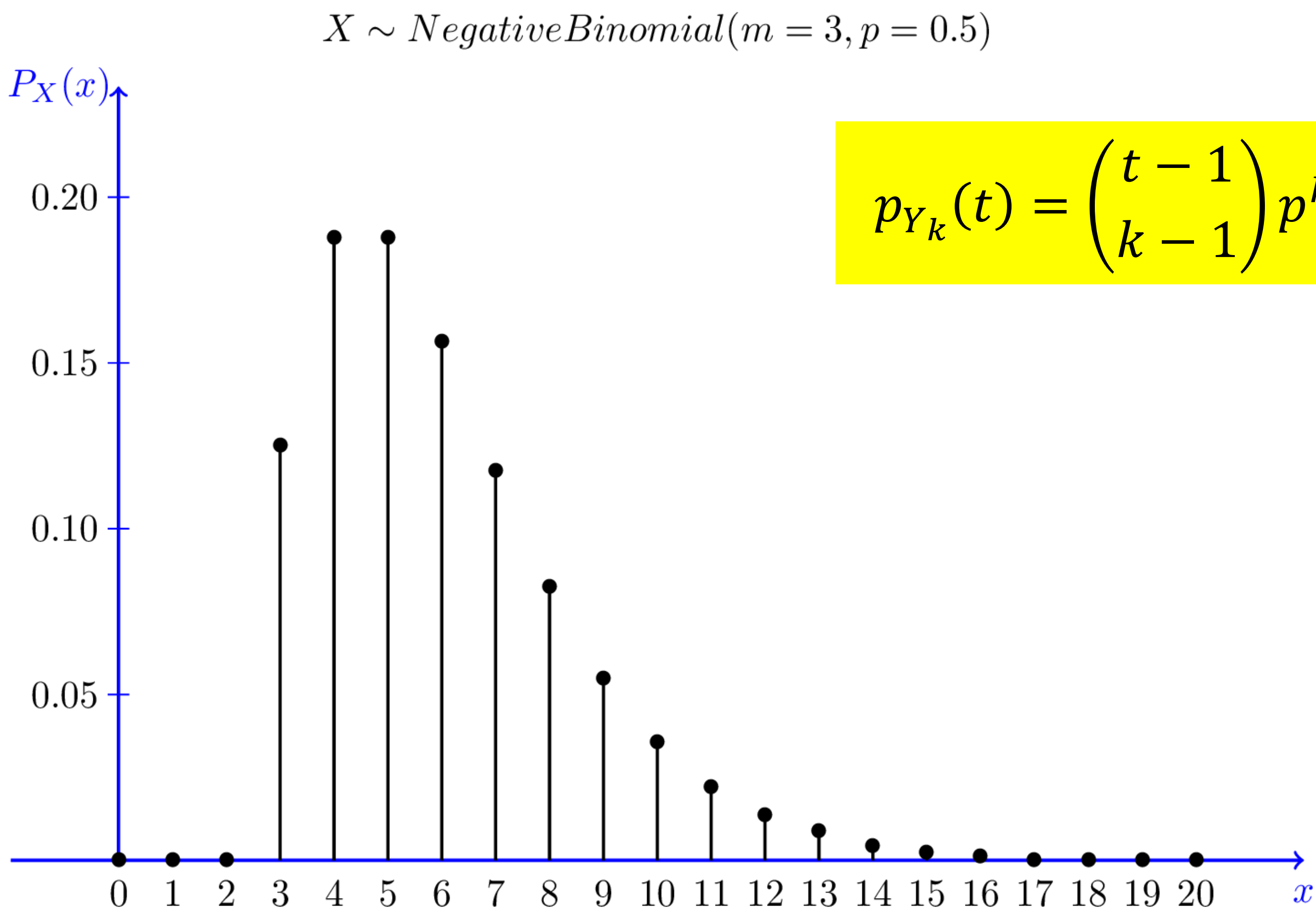
$$\Pr\{\text{Η } k\text{-οστή άφιξη γίνεται στο } t \text{ slot}\} = p_{Y_k}(t) =$$

$$= \binom{\boldsymbol{t-1}}{\boldsymbol{k-1}}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k-1}}(\boldsymbol{1-p})^{(\boldsymbol{t-1})-(\boldsymbol{k-1})} \cdot \boldsymbol{p} =$$

$$= \boxed{\binom{\boldsymbol{t-1}}{\boldsymbol{k-1}}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{1-p})^{\boldsymbol{t-k}}}$$ **Negative Binomial**

$$\mathrm{E}[Y_k] = \mathbf{k/p} \qquad Var(Y_k) = \boldsymbol{k(1-p)/p^2}$$

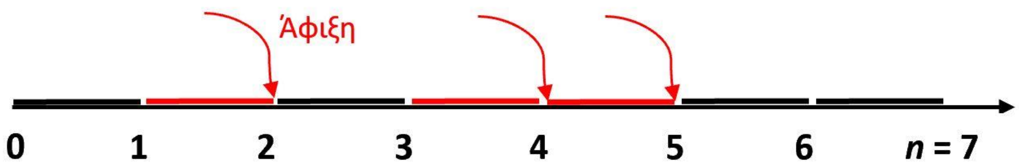
pmf της Negative Binomial



$$p_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

Σχετικές Τυχαίες Μεταβλητές (4)

- Η τ.μ. B που μετρά τον αριθμό των διαδοχικών slots στα οποία είχαμε αφίξεις (busy slots):



$$\Pr\{k \text{ διαδοχικά busy slots}\} = p_B(k) =$$
$$= \boldsymbol{p^k(1-p)}$$ **Γεωμετρική**

$$\mathrm{E[B]} = \mathbf{1/(1-p)}$$

$$Var(\mathrm{B}) = \boldsymbol{p/(1-p)^2}$$

Διαχωρισμός και Συνένωση Διαδικασιών Bernoulli

Διαχωρισμός

Οι διαδικασίες που προκύπτουν από το διαχωρισμό μίας διαδικασίας Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.

$$\begin{tikzcd} BP(p) \arrow[r, "1-q"] \arrow[dr, "q"'] & BP((1-q)p) \\ & BP(pq) \end{tikzcd}$$

Συνένωση

Η διαδικασία που προκύπτει από τη συνένωση δύο διαδικασιών Bernoulli είναι επίσης Bernoulli.

$$\begin{tikzcd} X_n \quad BP(p) \arrow[r] & BP(p+q-pq) \\ Y_n \quad BP(q) \arrow[ur] & Z_n \end{tikzcd}$$

Συνένωση Διαδικασιών Bernoulli

- Θα έχουμε άφιξη της Z_n στο slot n, αν μία από τις X_n, Y_n ή και οι δύο ταυτόχρονα, έχουν άφιξη στο slot n.
- Δηλαδή: $Z_n = \max\{X_n, Y_n\}$

  και

  $$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z_n} = \boldsymbol{1}] = 1 - P[X_n = 0, Y_n = 0] =$$
  $$= 1 - (1-p)(1-q) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{pq}$$

Άσκηση (1)

Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα $p_I = 1/6$, και *busy* με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα $2/5$ προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα $3/5$ από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στο 4ο slot.

β) Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.

Άσκηση (2)

γ) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1, καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός από *busy slots* μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.

δ) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.