Ανάλυση της Απόδοσης Πληροφοριακών Συστημάτων

Άσκηση Διαδικασίας Bernoulli

Γιάννης Γαροφαλάκης

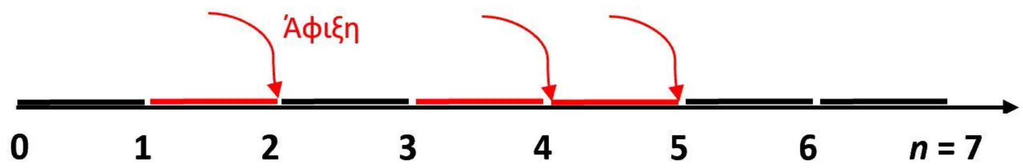
Άσκηση (1)

Ένα υπολογιστικό σύστημα εκτελεί εργασίες δύο χρηστών. Ο χρόνος χωρίζεται σε slots, κατά τη διάρκεια καθενός από τα οποία το σύστημα είναι *idle* με πιθανότητα $p_I = 1/6$, και *busy* με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια ενός busy slot, το σύστημα εκτελεί μία εργασία η οποία με πιθανότητα $2/5$ προέρχεται από τον πρώτο χρήστη ενώ με πιθανότητα $3/5$ από το δεύτερο. Θεωρούμε πως τα γεγονότα που αφορούν διαφορετικά slot είναι ανεξάρτητα.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα η πρώτη εργασία του χρήστη 1 να εκτελεστεί στο 4ο slot.

β) Δεδομένου πως ακριβώς 5 από τα πρώτα 10 slot είναι idle, να βρεθεί η πιθανότητα το 6ο idle slot να είναι το slot 12.

Απαντήσεις (1)



- "Συνολική" Bernoulli διαδικασία με πιθανότητα επιτυχίας: $\boldsymbol{p_B = 5/6}$
- "Διαχωρισμός" της διαδικασίας:

Χρήστης 1: Bernoulli με $\boldsymbol{p_{X1}} = 2/5 \cdot p_B = 2/5 \cdot 5/6 = \mathbf{1/3}$

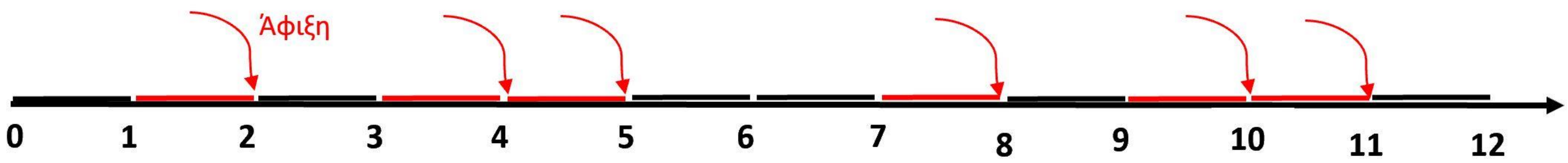
Χρήστης 2: Bernoulli με $\boldsymbol{p_{X2}} = 3/5 \cdot p_B = 3/5 \cdot 5/6 = \mathbf{1/2}$

(α) Γεωμετρική κατανομή: $p_T(t) = (1-p)^{t-1} \cdot p$

$$\Pi_{(\alpha)} = (1 - p_{X1})^3 \cdot p_{X1} = \left({}^2/_3\right)^3 \cdot {}^1/_3 = {}^8/_{81} = \mathbf{0.0987}$$

Απαντήσεις (2)

(β)



$$\Pi_{(\beta)} = \Pr\{5 \text{ busy slots από } 10\} \cdot p_B \cdot (1 - p_B) =$$

(Binomial)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{10}{5} \cdot p_B^5 \cdot (1 - p_B)^5 \cdot p_B \cdot (1 - p_B) =$$

$$= \binom{10}{5} \cdot (5/6)^6 \cdot (1/6)^6 = \mathbf{0.0018}$$

Εναλλακτικά:

$$\Pi_{(\beta)} = \Pr\{\text{η 6η άφιξη γίνεται στο 11ο slot}\} \cdot (1 - p_B) =$$

(Negative Binomial)

$$p_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

$$= \binom{10}{5} \cdot (5/6)^6 \cdot (1 - 5/6)^5 \cdot 1/6 = \mathbf{0.0018}$$

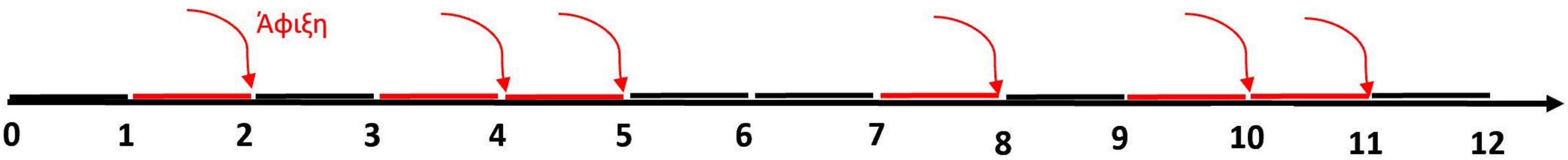
Άσκηση (2)

γ) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός slot μέχρι και την 5η εργασία του χρήστη 1, καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός από *busy slots* μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.

δ) Να βρεθεί η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των εργασιών του χρήστη 2 μέχρι και τη στιγμή εκτέλεσης της 5ης εργασίας του χρήστη 1.

Απαντήσεις (3)

(γ)



- Είναι η μέση τιμή της Negative Binomial, για $k = 5$ και $p = p_{X1} = 1/3$

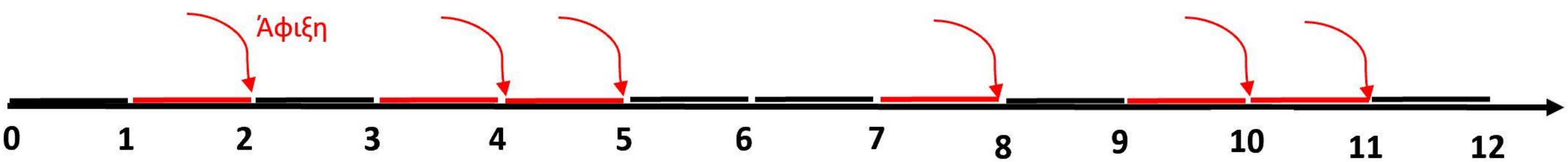
$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_k}] = k/p = 5/(1/3) = \mathbf{15} \text{ slots}$$

- Ουσιαστικά ζητείται πόσα από τα 15 slots είναι busy στη "συνολική" διαδικασία. Μέση τιμή της Binomial, για $n = 15$ και $p = p_B = 5/6$

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{N}] = n \cdot p = 15 \cdot (5/6) = \mathbf{12.5} \text{ busy slots}$$

Απαντήσεις (4)

(δ)



- Binomial, για $n = 15$ και $p = p_{X2} = 1/2$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\boldsymbol{p_N(k)} = \binom{15}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{15-k} = \binom{15}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \boxed{\binom{15}{k}\frac{1}{2^{15}}} \quad , \quad k \leq 15$$

- $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{N}] = n \cdot p = 15 \cdot (1/2) = \mathbf{7.5}$
- $\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{N}) = n \cdot p \cdot (1-p) = 15 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = \mathbf{3.75}$