Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων
Ακαδημαϊκό έτος 2016-17
Λύσεις για την Προαιρετική Εργασία

Φεβρουάριος 2017

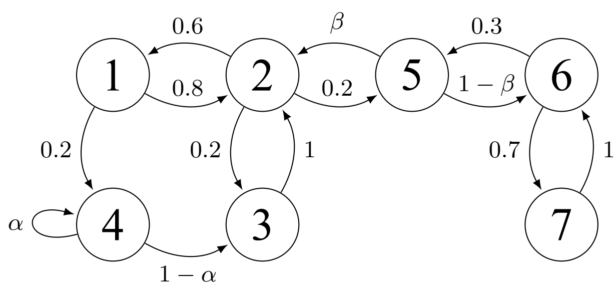
Πρόβλημα 1

Δίνεται το παρακάτω μητρώο με τις πιθανότητες μετάβασης μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα 1.α - Να ταξινομήσετε τις καταστάσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β. Ξεκινώντας από μία κατάσταση και κάνοντας έναν τυχαίο περίπατο, τι τιμές πρέπει να πάρουν οι παράμετροι ώστε να υπάρχει μοναδική οριακή κατανομή, ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης;

Αρχικά παρουσιάζουμε ένα διάγραμμα για τη συγκεκριμένη αλυσίδα. Έχουμε μία ομογενή Μαρκοβιανή Αλυσίδα, διακριτού χρόνου με διακριτό σύνολο καταστάσεων.



Η πρώτη παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε είναι πως κάθε στοιχείο του μητρώου **P** αντιστοιχεί σε πιθανότητα, οπότε ισχύει ότι $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Για την ταξινόμηση των καταστάσεων μελετάμε τις εξής περιπτώσεις:

i. $\alpha = 1, \beta = 0$. Έχουμε την εξής διαμέριση, $T = \{1, 2, 3\}$ (μεταβατικές), $C_1 = \{4\}$ (απορροφητική), $C_2 = \{5, 6, 7\}$ (επαναληπτικές). *Σημειώνουμε πως η υπο-αλυσίδα C_2 έχει περιοδικές καταστάσεις, με περίοδο* 2.

ii. $\alpha = 1, \beta > 0$. Όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές εκτός της $\{4\}$ που είναι απορροφητική.

iii. $\alpha \in [0,1), \beta = 0$. Εδώ έχουμε $T = \{1,2,3,4\}$ (μεταβατικές) και $C = \{5,6,7\}$. Το σύνολο C έχει επαναληπτικές αλλά περιοδικές καταστάσεις.

iv. $\alpha = 0, \beta = 1$. Πλέον μεταβατικές είναι οι $T = \{6,7\}$ και $C = \{1,2,3,4,5\}$, πάλι μια κλάση βέβαια επαναληπτικών αλλά περιοδικών καταστάσεων.

v. $\alpha = 0, \beta \in (0,1)$. Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν και η αλυσίδα είναι αμείωτη. Όμως υπάρχει περίοδος στην επαναληπτικότητα. Άρα οι καταστάσεις είναι περιοδικές και βέβαια επαναληπτικές.

vi. $\alpha \in (0,1)$ και $\beta \in (0,1)$. Η αλυσίδα είναι πάλι αμείωτη. Επίσης, η ύπαρξη του self-loop στην κατάσταση 4 την καθιστά απεριοδική, όπως και τις υπόλοιπες. Συνεπώς οι καταστάσεις είναι όλες εργοδικές.

Αφού κάναμε την προηγούμενη ανάλυση, μπορούμε τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα της ύπαρξης μοναδικής οριακής κατανομής. Αυτό λοιπόν συμβαίνει στις περιπτώσεις (ii) και (vi). Στη (ii), ο τυχαίος περίπατος μακροπρόθεσμα θα καταλήξει με πιθανότητα 1 στην απορροφητική κατάσταση. Από την άλλη, στη τελευταία περίπτωση, το Εργοδικό Θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικής οριακής κατανομής η οποία συμπίπτει με τη στάσιμη. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις είτε η αλυσίδα είναι μειώσιμη, είτε δεν υπάρχει οριακή κατανομή λόγω περιοδικότητας, είτε υπάρχει αλλά εξαρτάται της αρχικής κατάστασης.

Ερώτημα 1.β - Υποθέτουμε πως ο τυχαίος περιηγητής ξεκινάει από την κατάσταση 2. Βρείτε τις οριακές πιθανότητες όταν $\beta = 0$ και $\alpha = 1$. Επιπλέον, υπολογίστε τον μέσο αριθμό βημάτων μέχρι να γίνει απορρόφηση σε κάποια κλάση ισοδυναμίας.

Για τη συγκεκριμένη παραμετροποίηση είδαμε πως η αλυσίδα είναι μειώσιμη. Αυτό σημαίνει πως, ξεκινώντας από κάποια από τις μεταβατικές καταστάσεις $T = \{1,2,3\}$, σε βάθος χρόνου, μπορεί να καταλήξει στην κλάση $C_1 = \{4\}$ ή στην $C_2 = \{5,6,7\}$. Έστω a_i οι πιθανότητες απορρόφησης στην κλάση C_1 δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i, για $i = 1,2,3$, δηλαδή

$$a_i = \Pr(X_n = 4, n \to \infty | X_0 = i).$$

Ισχύει ότι $\Pr(X_n \in C_2, n \to \infty | X_0 = i) = 1 - a_i$. Αυτές οι πιθανότητες δεν είναι οι γνωστές πιθανότητες μετάβασης και δε μπορούν να υπολογιστούν μέσω του "γνωστού" συστήματος με το μητρώο $\mathbf{P}$. Όμως ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$a_i = \sum_{k \in T} p_{ik} a_k + p_{i4}$$

η οποία "περιγράφει" πως μπορεί να γίνει η απορρόφηση στην κατάσταση 4 δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i. Παίρνουμε έτσι τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.8a_2 + 0.2 \\ a_2 &= 0.6a_1 + 0.2a_3 + 0.3a_5 \\ a_3 &= a_2. \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $a_1 = 0.5$ και $a_2 = a_3 = 0.375$. Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $a_5 = 0$ αφού, λόγω του ότι $\beta = 0$, από την κατάσταση 5 μεταφέρεται μόνο προς τις $6,7$. Συνεπώς, ο τυχαίος περιηγητής ξεκινώντας από την κατάσταση 2, οριακά θα καταλήξει στην 4 με πιθανότητα 0.375 και σε κάποια από τις $5,6,7$ με πιθανότητα 0.625. Τέλος, στην υπο-αλυσίδα C_2 οι καταστάσεις είναι βέβαια επαναληπτικές αλλά και περιοδικές. Αυτό σημαίνει πως εκεί δεν υπάρχει οριακή κατανομή και άρα, δεν υπάρχουν οι πιθανότητες $\Pr(X_n = i, n \to \infty | X_0 = 2)$ για $i = 5,6,7$.

Ένας άλλος τρόπος είναι μέσω των πιθανοτήτων μετάβασης. Ουσιαστικά ισχύει πως

$$a_2 = \lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)}.$$

Αυτός ο όρος μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας διαδοχικά τα μητρώα $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \mathbf{P}^4, ...$ μέχρι να υπάρξει σύγκλιση και παίρνοντας το αντίστοιχο στοιχείο.

Προσοχή! Όπως είπαμε, η αλυσίδα C_2 είναι περιοδική. Αν κάποιος λοιπόν υπολογίσει κάποιες μεγάλες διαδοχικές δυνάμεις του μητρώου $\mathbf{P}$, πχ $\mathbf{P}^{500}, \mathbf{P}^{501}, \mathbf{P}^{502}$ κλπ, θα δει πως το υπο-μητρώο που αναφέρεται στις καταστάσεις $\{5, 6, 7\}$ αλλάζει διαρκώς μεταξύ 2 μητρώων χωρίς να συγκλίνει. Αυτό επαληθεύει το γεγονός ότι δεν υπάρχει μοναδική οριακή κατανομή.

Θα βρούμε τώρα τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων μέχρι να γίνει απορρόφηση. Δε μας ενδιαφέρει που γίνεται η απορρόφηση οπότε υποθέτουμε πως οι καταστάσεις του συστήματος είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4'\}$ με τις $4, 5, 6, 7$ να "συγχωνεύονται" όλες στην $4'$. Αυτό διότι χρειάζεται να μετρήσουμε τα βήματα που γίνονται μόνο μεταξύ των καταστάσεων $1, 2, 3$ αφού, αν φύγει από αυτές έχουμε απορρόφηση. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι λοιπόν όπως στο επόμενο μητρώο

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έστω μ_i ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι να γίνει απορρόφηση, δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση i, για $i = 1, 2, 3$. Με ανάλυση πρώτου βήματος προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + 0.8\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + 0.6\mu_1 + 0.2\mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + \mu_2 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι $\mu_1 = 5.5000, \mu_2 = 5.6250, \mu_3 = 6.6250$. Επομένως, ξεκινώντας από την κατάσταση 2, ο τυχαίος περιηγητής θα κάνει κατά μέσο όρο 5.6250 βήματα ανάμεσα στις καταστάσεις $1, 2, 3$, μέχρι να καταλήξει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας.

Για έναν δεύτερο τρόπο: Μπορούμε να υπολογίσουμε το 3×3 μητρώο $\hat{\mathbf{Q}}$ που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης για τις καταστάσεις $1, 2, 3$, χωρίς να λάβουμε υπόψιν τις καταστάσεις $4, 5, 6, 7$. Ο ζητούμενος αριθμός, οι επισκέψεις στις μεταβατικές καταστάσεις μέχρι να γίνει απορρόφηση, προκύπτει από το μητρώο $(\mathbf{I}_{3\times3} - \hat{\mathbf{Q}})^{-1}$ (βλέπε "Fundamental Matrix" στη βιβλιογραφία) και πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_{3\times3} - \hat{\mathbf{Q}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα 1.γ - Θέτουμε $\alpha = 0.5$ και $\beta = 0.7$. Τι θα συμβεί μακροπρόθεσμα; Εξηγείστε αναλυτικά κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς. Ορίστε το πρόβλημα μαθηματικά και βρείτε τη λύση μέσω ενός περιβάλλοντος υπολογισμών.

Με την παραμετροποίηση $\alpha = 0.5$ και $\beta = 0.7$, βρισκόμαστε στην έκτη περίπτωση από την ανάλυση του ερωτήματος (α). Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν και είναι απεριοδικές. Άρα η αλυσίδα είναι εργοδική. Έτσι, μακροπρόθεσμα, ο τυχαίος περίπατος θα μπει σε μια στάσιμη κατανομή, η οποία είναι μοναδική και ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης. Δηλαδή, για κάθε j, ισχύει πως

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = i|X_0 = j) = \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = i) = \pi_i \ , \ i = 1,\ 2, \dots ,7.$$

Οι οριακές πιθανότητες π_i, θέτοντας $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_7]^\top$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^\top \cdot \mathbf{P} &= \boldsymbol{\pi}^\top \\ \sum_{i=1}^{6} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να λυθεί στο χαρτί αλλά θα είναι κοπιαστικό. Από την άλλη, σε κάποιο περιβάλλον υπολογισμών εύκολα μπορούμε να βρούμε πως η λύση είναι

$$\boldsymbol{\pi} = [0.2047, 0.3411, 0.1092, 0.0819, 0.0975, 0.0975, 0.0682]^\top.$$

Ένας ενδεικτικός τρόπος να γίνει αυτό σε MATLAB είναι ο παρακάτω. *Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;*

```
P=[ [0, 0.8 , 0 , ....]; ... ];
A=[P-eye(7),ones(7,1)]; b=[0,0,0,0,0,0,0,1];
x=b/A;
```

Ερώτημα 1.δ - Σε αυτό το ερώτημα καλείστε να προσεγγίσετε την οριακή κατανομή μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας μέσω προσομοίωσης τυχαίων περιπάτων. Θα χρειαστεί να βρείτε κατάλληλο εκτιμητή τον οποίο και θα μελετήσετε. Εξηγείστε αναλυτικά τη διαδικασία που ακολουθήσατε και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγετε.

Στο ερώτημα αυτό πρέπει να προσεγγίσουμε την οριακή κατανομή μιας εργοδικής Αλυσίδας Markov εκτελώντας έναν μεγάλο αριθμό από ανεξάρτητους τυχαίους περιπάτους. Το πείραμα τύχης που πρέπει να επαναλάβουμε είναι το εξής:

Ξεκινάμε από μία κατάσταση. Κάνουμε διαδοχικά βήματα μεταξύ των καταστάσεων, σύμφωνα με τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης, και σημειώνουμε τις επισκέψεις μας. Η σχετική συχνότητα με των επισκέψεων σε μία κατάσταση προσεγγίζει την αντίστοιχη οριακή πιθανότητα.

Το τελευταίο εξασφαλίζεται από το Εργοδικό Θεώρημα. Επίσης, πάλι λόγω της εργοδικότητας, δεν έχει σημασία από που ξεκινάμε. Έστω λοιπόν πως κάνουμε M τυχαίους περιπάτους, τον κάθε ένα με N βήματα. Χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό: $\mathbf{1}\{X_t^{(w)} = k\} = 1$ ο w-στός περίπατος στο βήμα t βρέθηκε στην κατάσταση k, αλλιώς $\mathbf{1}\{X_t^{(w)} = k\} = 0$. Έτσι λοιπόν, ο εκτιμητής

$$T_k = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{w=1}^{M} \sum_{s=1}^{N} \mathbf{1}\{X_s^{(w)} = k\},$$

για ικανοποιητικά μεγάλα M, N προσεγγίζει την πιθανότητα $\pi_k = \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = k)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από πειράματα με τον συγκεκριμένο εκτιμητή. Σε όλες τι περιπτώσεις έχουμε ξεκινήσει από την κατάσταση 1. "# Walks" και "# Steps" είναι το πλήθος και το μέγεθος αντίστοιχα των περιπάτων που υλοποιήσαμε. Στο τέλος του πίνακα παραθέτουμε και την αληθινή κατανομή, όπως αυτή υπολογίστηκε από τη λύση του σχετικού συστήματος για το ερώτημα (δ). Σχεδόν σε κάθε τιμή έχει γίνει στρογγυλοποίηση σε 4 δεκαδικά ψηφία.

# Steps	# Walks	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7
10	100	0.2410	0.3710	0.1170	0.0940	0.1000	0.0510	0.0260
100	100	0.2163	0.3459	0.1136	0.0888	0.0959	0.0843	0.0552
1000	100	0.2083	0.3448	0.1098	0.0817	0.0977	0.0933	0.0644
10000	100	0.2046	0.3411	0.1093	0.0820	0.0972	0.0975	0.0684
100	1000	0.2083	0.3421	0.1114	0.0833	0.0969	0.0931	0.0650
1000	1000	0.2061	0.3424	0.1096	0.0820	0.0972	0.0958	0.0669
10000	1000	0.2048	0.3411	0.1093	0.0821	0.0973	0.0973	0.0681
100000	1000	0.2047	0.3411	0.1091	0.0819	0.0975	0.0975	0.0682
Αληθινή	**Κατανομή**	**0.2047**	**0.3411**	**0.1092**	**0.081**9	**0.0975**	**0.0975**	**0.0682**

Για έναν δεύτερο τρόπο: Εναλλακτική προσέγγιση, αλλά λιγότερο αποδοτική, είναι να σταθεροποιήσει κανείς τα βήματα και να μετρήσει μόνο την τελευταία κατάσταση, για όλες τις επαναλήψεις-περιπάτους. Αυτός ο τρόπος ακολουθήθηκε από κάποιους φοιτητές και, φυσικά, ήταν εξίσου σωστός. Για παράδειγμα, παραθέτουμε το script σε `MATLAB` που έφτιαξε ο φοιτητής Κοσμάς Μάριος.

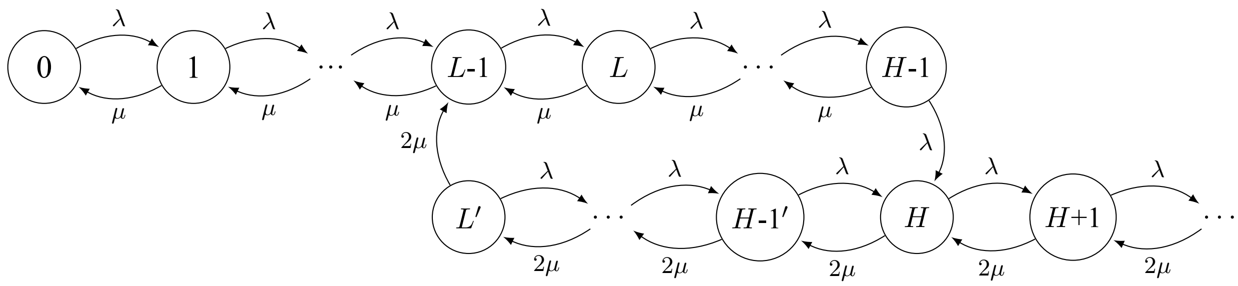
```
n=100000;%ari8mos epanalhpsewn peiramatos
states=[1 2 3 4 5 6 7]; count_visits=zeros(1,7);
start_state=2;
P=[0 0.8 0 0.2 0 0 0;....];

for i = 1:n
    temp = P(start_state,:);
    r = rand(); % dhmiourgia enos tuxaiou ari8mou sto diashma [0,1]
    sum = temp(1);
    for(j = 1:7)
        if(r <= sum)
            next_state = j;
            count_visits(j) = count_visits(j)+1; %metrisi  episkepsewn
            start_state = next_state;
            break;
        else
            sum = sum+temp(j+1);
        end
    end
end
count_visits = count_visits/n %telikes pi8anothtes-kanonikopoihsh
```

Πρόβλημα 2

Υποθέτουμε πως σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης πελατών ακολουθείται η παρακάτω στρατηγική. Όσο οι πελάτες στην ουρά είναι λιγότεροι από T_{high}, υπάρχει ένας εξυπηρετητής και το σύστημα λειτουργεί ως ένα συνηθισμένο $M/M/1$. Μόλις όμως ο αριθμός των πελατών ξεπεράσει το T_{high}, προστίθεται ένας δεύτερος εξυπηρετητής και το σύστημα λειτουργεί ως $M/M/2$. Αυτό συμβαίνει μέχρις ότου οι πελάτες γίνουν λιγότεροι από T_{low}, οπότε και ο δεύτερος εξυπηρετητής αποσύρεται. Οι παράμετροι λοιπόν είναι ο ρυθμός αφίξεων λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ και τα κατώφλια T_{high} και T_{low}.

Ερώτημα 2.α - Αναπαραστήστε την αλυσίδα με ένα διάγραμμα και διατυπώστε τις εξισώσεις ισορροπίας.

Πρόκειται για μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα συνεχούς χρόνου με άπειρο πλήθος καταστάσεων. Δεν συμπίπτει προφανώς με κάποια από όσες έχουν παρουσιαστεί στο μάθημα, παρ'όλ'αυτά μπορεί να γίνει μια βασική μελέτη. Ξεκινάμε παρουσιάζοντας ένα διάγραμμα. Ουσιαστικά έχουμε δύο "ενωμένες" αλυσίδες, μία που αναφέρεται σε έναν εξυπηρετητή και μια άλλη για δύο εξυπηρετητές. Για ευκολία στην αναπαράσταση θέτουμε $T_{high} = H$ και $T_{low} = L$.



Έχουμε υποθέσει πως δύο εξυπηρετητές δουλεύουν μέχρι οι πελάτες να γίνουν $L-1$. Εφόσον κάθε κατάσταση εξαρτάται από τον αριθμό πελατών και εξυπηρετητών, για την οριακή κατανομή θα συμβολίσουμε με $\pi_0, ..., \pi_{H-1}$ τις καταστάσεις που αντιστοιχούν σε έναν εξυπηρετητή και $\sigma_L, \ldots, \sigma_{H-1}, \sigma_H, \ldots$ αυτές που αντιστοιχούν σε δύο. Με βάση το διάγραμμα, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής:

$$
\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
(\lambda+\mu)\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\
&\vdots \\
(\lambda+\mu)\pi_{L-1} &= \lambda\pi_{L-2} + \mu\pi_{L+1} \\
(\lambda+\mu)\pi_L &= \lambda\pi_{L-1} + \mu\pi_{L+1} + 2\mu\sigma_L && (1) \\
(\lambda+\mu)\pi_{L+1} &= \lambda\pi_{L-1} + \mu\pi_{L+2} \\
&\vdots \\
(\lambda+\mu)\pi_{H-1} &= \lambda\pi_{H-2} && (2) \\
(\lambda+2\mu)\sigma_L &= 2\mu\sigma_{L+1} \\
(\lambda+2\mu)\sigma_{L+1} &= \lambda\sigma_L + 2\mu\sigma_{L+2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

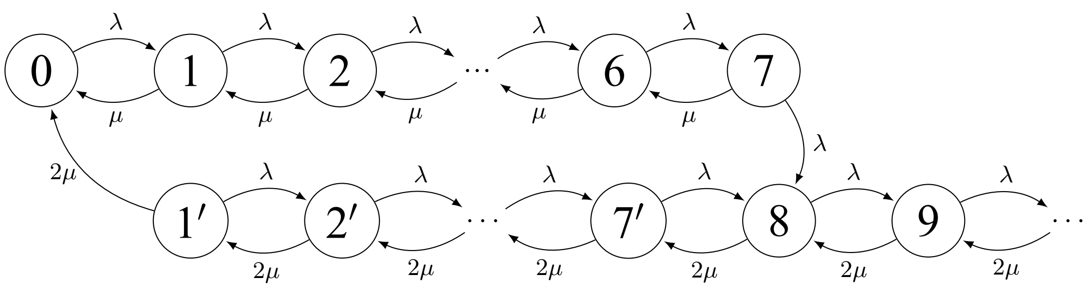
$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
(\lambda+2\mu)\sigma_{H-1} &= \lambda\sigma_{H-2} + 2\mu\sigma_H \\
(\lambda+2\mu)\sigma_{H} &= \lambda\sigma_{H-1} + 2\mu\sigma_{H+1} + \lambda\pi_{H-1} \qquad (3)\\
(\lambda+2\mu)\sigma_{H+1} &= \lambda\sigma_{H} + 2\mu\sigma_{H+2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

όπου σημειώσαμε τις εξισώσεις (1) και (2) καθώς αποτελούν τους “συνδετικούς κρίκους” των δύο υποαλυσίδων. Τέλος, η εξίσωση κανονικοποίησης είναι

$$\pi_0 + \ldots \pi_{H-1} + \sigma_L + \ldots \sigma_H + \cdots = 1.$$

Ερώτημα 2.β - Για $\lambda = 1.5$, $\mu = 1$, $T_{low} = 1$ και $T_{high} = 8$, βρείτε την αναλυτική λύση της οριακής κατανομής για τη συγκεκριμένη αλυσίδα

Πλέον, όταν ενεργοποιηθεί ο δεύτερος εξυπηρετητής, αυτός εργάζεται μέχρι να αδειάσει η ουρά. Η αλυσίδα λοιπόν αναπαρίσταται ως εξής:



Το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας πλέον γράφεται όπως παρακάτω

$$
\begin{aligned}
\lambda\tau_0 &= \mu\tau_1 + 2\mu\sigma_1 \qquad (4)\\
(\lambda+\mu)\tau_1 &= \lambda\tau_0 + \mu\tau_2 \qquad (5)\\
(\lambda+\mu)\tau_2 &= \lambda\tau_1 + \mu\tau_3 \\
&\vdots \\
(\lambda+\mu)\tau_6 &= \lambda\tau_5 + \mu\tau_7 \qquad (6)\\
(\lambda+\mu)\tau_7 &= \lambda\tau_6 \qquad (7)\\
(\lambda+2\mu)\sigma_1 &= 2\mu\sigma_2 \qquad (8)\\
(\lambda+2\mu)\sigma_2 &= \lambda\sigma_1 + 2\mu\sigma_3 \qquad (9)\\
&\vdots \\
(\lambda+2\mu)\sigma_7 &= \lambda\sigma_6 + 2\mu\sigma_8 \\
(\lambda+2\mu)\sigma_8 &= \lambda\sigma_7 + 2\mu\sigma_9 + \lambda\tau_7 \\
(\lambda+2\mu)\sigma_9 &= \lambda\sigma_8 + 2\mu\sigma_{10} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Αυτό που είναι σημαντικό για την επίλυση είναι να διαλέξουμε σωστά ποια-ποιες μεταβλητές θα έχουμε ως σημείο αναφοράς. Με λίγη προσοχή προκύπτει ότι αυτές θα είναι οι τ_7 και σ_1. Η διαδικασία είναι δυστυχώς επίπονη οπότε θα προσπαθήσουμε να την περιγράψουμε περιληπτικά.

Ξεκινάμε από την (7) και βρίσκουμε το τ_6 ως προς τ_7. Πηγαίνοντας προς τα πίσω, μέχρι την (5), βρίσκουμε ομοίως τα $\tau_5, \ldots, \tau_0$ ως προς τ_7. Έπειτα, η (4) μας βοηθάει να εκφράσουμε το σ_1 ως προς τ_7. Πλέον, ξεκινώντας από τη (8) μπορούμε να βρούμε και όλα τα υπόλοιπα $\sigma_k, k = 2, 3, \ldots$ ως προς σ_1 και κατ'επέκτασιν, τ_7.

Για ευκολία θέτουμε $\phi = \frac{\mu}{\lambda}$ και $\psi = \frac{\lambda}{2\mu}$. Έτσι ισχύει ότι $\phi, \psi \leq 1$ και ότι $2\phi\psi = 1$. Βρίσκουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
\tau_k &= \frac{1-\phi^{8-k}}{1-\phi}\tau_7 \text{ , για } k = 0, 1, \ldots 7 \\
\sigma_1 &= \psi\tau_7 \\
\sigma_k &= \frac{\psi - \psi^k}{1-\psi}\tau_7 \text{ , για } k = 2, 3 \ldots 8 \\
\sigma_k &= \frac{\psi^{k-7} - \psi^k}{1-\psi}\tau_7 \text{ , για } k = 9, 10 \ldots
\end{aligned}
$$

Τέλος, μπορούμε να βρούμε την τιμή του τ_7 από την εξίσωση κανονικοποίησης. Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι ισχύει επίσης πως $\sigma_k = \psi^{k-8}\sigma_8$ για $k \geq 8$. Για την επίλυση του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε μία ελαφρώς διαφορετική τεχνική. Θα αρχικοποιήσουμε το τ_7 σε μια αυθαίρετη τιμή και, αφού εκφράσουμε όλους τους υπόλοιπους αγνώστους ως προς αυτό, θα κάνουμε κανονικοποίηση. Επίσης, θα υπολογίσουμε κατευθείαν την κατανομή του αριθμού των πελατών, ανεξάρτητα του πλήθους των εξυπηρετητών, δηλαδή βρίσκουμε τις πιθανότητες

$$\pi_k = \tau_k + \sigma_k = \Pr(\text{“}k \text{ πελάτες στο σύστημα”})$$

Έμμεσα θέσαμε ότι $\tau_0 = 0$. Υποθέτοντας πως θα είναι απίθανο η ουρά να ξεπεράσει τα 100 άτομα (κάτι που είδαμε εμπειρικά στο (2.β)), το σύστημα μπορεί να λυθεί σε `Python` ενδεικτικά με τον παρακάτω τρόπο.

```python
import numpy as np
psi=1.5/2;   phi=1/1.5;
x=1000; # pi_7, the reference point
dist=[x*(1-phi**8)/(1-phi)] # start by \pi_0
for k in range(1,8): # compute \pi_1 ... \pi_8
    temp=x*(1-phi**(8-k))/(1-phi) + x*psi*(1-psi**(k-1))/(1-psi)
    dist.append(temp)
for k in range(8,100): # compute \pi_8 ...
    dist.append( dist[k-1]*psi )
dist=dist/np.sum(dist) # normalize
```

Σημειώνουμε πως έτσι μπορεί να υπολογιστεί η πραγματική οριακή κατανομή της αλυσίδας κι όχι κάποια προσέγγιση, όπως αρχικά είχε ζητηθεί. Δυστυχώς κανένας φοιτητής δεν έδωσε ικανοποιητική απάντηση σε αυτό το ζητούμενο. Κι επειδή το κομμάτι της προσομοίωσης είναι ουσιαστικά εκτός ύλης για την τελική εξέταση, δημοσιεύουμε προσωρινά τις λύσεις σε αυτή τη μορφή ώστε να υπάρχει χρόνος μελέτης για την επικείμενη εξέταση.