Ασκήσεις – Μέρος Β

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών συστημάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

Καθηγητής

Άσκηση 1: Κλειστά δίκτυα συστημάτων αναμονής

Δίνεται το παρακάτω κλειστό δίκτυο τριών Συστημάτων Αναμονής *ΣΑ1, ΣΑ2, ΣΑ3*, στο οποίο υπάρχουν ***N* = 2 εργασίες**. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές, ενώ όλες οι ουρές έχουν πρακτικά άπειρο μήκος.

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Buzen, απαντήστε στα παρακάτω:

(a) Παρουσιάστε τη λύση του δικτύου P_{n_1,n_2,n_3} στη μόνιμη κατάσταση.

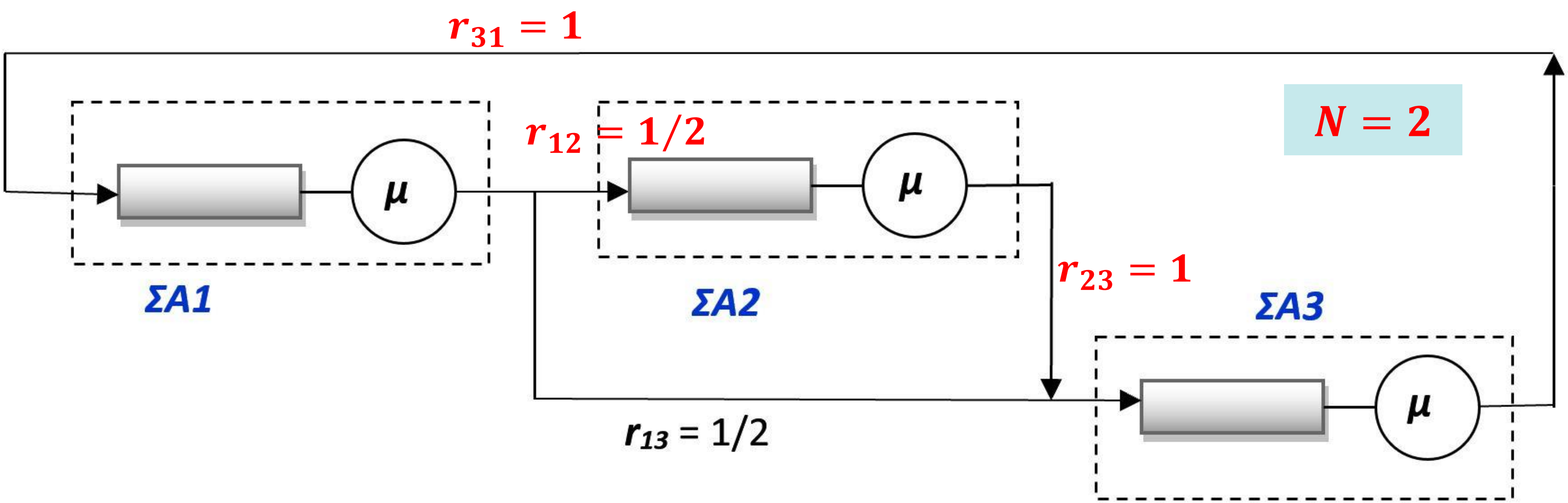
(b) Ποιο από τα τρία ΣΑ είναι σημείο συμφόρησης (bottleneck) του δικτύου και γιατί;

(c) Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκονται όλες οι εργασίες στο *ΣΑ1* και ποια η πιθανότητα να είναι όλες στο *ΣΑ2*;

(d) Ποια είναι η πιθανότητα το *ΣΑ3* να έχει 1 εργασία;

(e) Απαντήστε στα παραπάνω ερωτήματα (a), (b), (c), (d) αν υπάρχει μόνο μια εργασία στο δίκτυο (***N* = 1 εργασία**). Πως αξιοποιείτε τη διαδικασία επίλυσης που χρησιμοποιήσατε για *N* = 2;

(f) Απαντήστε στο ερώτημα (e) χρησιμοποιώντας μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου*, και όχι τον αλγόριθμο του Buzen. Επιβεβαιώστε ότι συμφωνούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (e) και (f).



$r_{31} = 1$
$r_{12} = 1/2$
$N = 2$
μ
μ
μ
ΣA1
ΣA2
$r_{23} = 1$
ΣA3
$r_{13} = 1/2$

Απαντήσεις (1)

a) Η λύση δίνεται από τον γενικό τύπο:

$$p_{\bar{n}} = p_{n_1, n_2, \ldots, n_M} = \frac{1}{G(N)} \rho_1^{\ n_1} \rho_2^{\ n_2} \ldots \rho_M^{\ n_M}$$

Δηλαδή $$\boldsymbol{P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \ \rho_3^{n_3}}$$

όπου $n_1 + n_2 + n_3 = N = 2$ και ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι *σχετικές χρησιμοποιήσεις* των ΣΑ1, ΣΑ2, ΣΑ3 αντίστοιχα.

ΒΗΜΑ 1:

Υπολογισμός των ρ_1, ρ_2, ρ_3 από τις Εξισώσεις: $\mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^{M} \mu_j r_{ji} \rho_j$

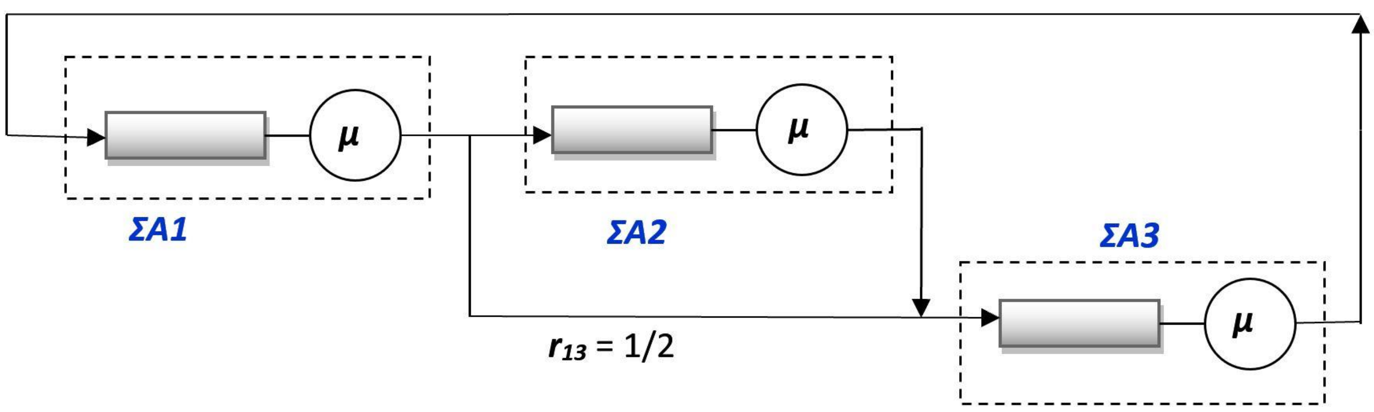
Θα θέσουμε κάποιο $\boldsymbol{\rho_i = 1}$ για να βρούμε τα υπόλοιπα σε σχέση με αυτό.

Απαντήσεις (2)

Δηλαδή, θα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned}\right\}$$

Θέτοντας $\boldsymbol{\rho_1 = 1 = \rho_3}$ παίρνουμε $\boldsymbol{\rho_2 = 1/2}$.



Απαντήσεις (3)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί / Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1{,}5$	$G(1) = g_3(1) = 2{,}5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1{,}75$	$\mathbf{G(2) = g_3(2) = 4{,}25}$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{4,25}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}} \quad (1)$$

Απαντήσεις (4)

b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ΣΑ1 και ΣΑ3 είναι bottlenecks, αφού:

$$\boldsymbol{\rho_1 = 1 = \rho_3 >} \rho_2 = 1/2$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \dfrac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{U_1 = U_3} = 1 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = \frac{2{,}5}{4{,}25} = \boldsymbol{0{,}588} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{U_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2{,}5}{4{,}25} = \boldsymbol{0{,}294}$$

που επιβεβαιώνουν ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1,n_2,n_3} = \dfrac{1}{4{,}25}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_2}$

$$\boldsymbol{P_{2,0,0}} = \frac{1}{4{,}25}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \boldsymbol{0{,}235} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{P_{0,2,0}} = \frac{1}{4{,}25}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{0{,}0588}$$

Απαντήσεις (5)

$$P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{4{,}25}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$\boldsymbol{P_{1,0,1} + P_{0,1,1} = \frac{1}{4{,}25}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \frac{1}{4{,}25}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 0{,}353}$$

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $\boldsymbol{N = 1}$:

Σταθμοί / Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1{,}5$	$\boldsymbol{G(1) = g_3(1) = 2{,}5}$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1{,}75$	$\boldsymbol{G(2) = g_3(2) = 4{,}25}$

Συνεπώς: $\boldsymbol{G(1) = 2{,}5}$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\boldsymbol{\rho_1 = 1 = \rho_3}$ και $\boldsymbol{\rho_2 = 1/2}$

Απαντήσεις (6)

e) (a) Η λύση: $\boldsymbol{P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}}$ με $\boldsymbol{n_1 + n_2 + n_3 = 1}$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$\boldsymbol{U_1 = U_3} = 1 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = \frac{1}{2,5} = \boldsymbol{0,4}$ και $\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2,5} = \boldsymbol{0,2}$

Φυσικά είναι μικρότερες από την περίπτωση με $N = 2$ όπου είχαμε $U_1 = U_3 = 0{,}588$ και $U_1 = 0{,}294$ (γιατί;)

(c) $\boldsymbol{P_{1,0,0}} = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \boldsymbol{0,4}$ και $\boldsymbol{P_{0,1,0}} = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \boldsymbol{0,2}$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η: $\boldsymbol{P_{0,0,1}} = \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \boldsymbol{0,4}$

$$P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{4,25}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$$

Αν θέλαμε επιπλέον:

- **Μέσο αριθμό εργασιών σε ένα σταθμό (για $N = 2$):**

$$\boldsymbol{E[n_1]} = 1 \cdot \left(P_{1,1,0} + P_{1,0,1}\right) + 2 \cdot P_{2,0,0} = \frac{1}{4,25}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{4,25}\left(\frac{1}{2}\right)^0 +$$

$$+2 \cdot \frac{1}{4,25}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3,5}{4,25} \Longrightarrow \boldsymbol{E[n_1] = 0,8235} \text{ εργασίες}$$

- **Throughput ενός σταθμού (για $N = 2$):**

$\boldsymbol{\lambda_1} = \mu_1 \cdot U_1 = \mu \cdot 0,588$.Πλέον μας χρειάζεται η τιμή του μ.

Π.χ. για $\boldsymbol{\mu = 1}$ εργ/sec: $\lambda_1 = 1 \cdot 0,588 \Longrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 0,588}$ εργ/sec

- **Response Time σε έναν σταθμό (για $N = 2$):**

N. Little: $E[n_1] = \lambda_1 \cdot T_1 \Longrightarrow T_1 = E[n_1]/\lambda_1 = 0,8235/0,588 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boldsymbol{T_1 = 1,4}$ sec

- **Response Time συνολικό (για $N = 2$):**

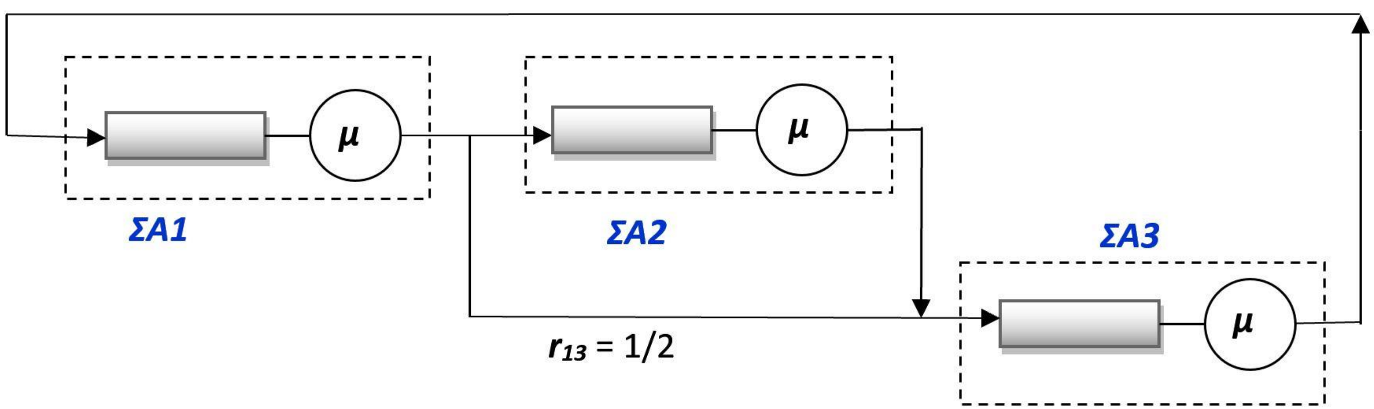
N. Little στο δίκτυο: $N = \lambda_1 \cdot T \Longrightarrow T = 2/0,588 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{T = 3,4}$ sec

Εναλλακτικά: $T = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 + T_3) + \frac{1}{2}T_3 = \cdots = 3,4$ sec

Εναλλακτικά: Διαφορετική επιλογή $\rho_i = 1$

$$\left.\begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned}\right\}$$

Θέτοντας $\boldsymbol{\rho_2 = 1}$ παίρνουμε $\boldsymbol{\rho_1 = \rho_3 = 2}$.



Εναλλακτικά (2)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί / Πελάτες	$\rho_1 = 2$	$\rho_2 = 1$	$\rho_3 = 2$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$\mathbf{G(2) = g_3(2) = 17}$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}} \qquad (1)$$

Εναλλακτικά (3)

b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι **bottlenecks**, αφού

$$\boldsymbol{\rho_1 = 2 = \rho_3 >} \rho_2 = 1$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \dfrac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{U_1 = U_3} = 2 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = 2 \cdot \frac{5}{17} = \boldsymbol{0,588} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{U_2} = 1 \cdot \frac{5}{17} = \boldsymbol{0,294}$$

ίδια αποτελέσματα φυσικά…

c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1,n_2,n_3} = \dfrac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}$

$$\boldsymbol{P_{2,0,0}} = \frac{1}{17} \cdot 2^2 \cdot 2^0 = \boldsymbol{0,235} \qquad \boldsymbol{P_{0,2,0}} = \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \boldsymbol{0,0588}$$

ίδια….

Εναλλακτικά (4)

$$P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$\boldsymbol{P_{1,0,1}} + \boldsymbol{P_{0,1,1}} = \frac{1}{17} \cdot 2^1 \cdot 2^1 + \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = \mathbf{0,353}$$ ίδια…

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $\boldsymbol{N = 1}$:

Σταθμοί / Πελάτες	$\boldsymbol{\rho_1 = 2}$	$\boldsymbol{\rho_2 = 1}$	$\boldsymbol{\rho_3 = 2}$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$\boldsymbol{G(2) = g_3(2) = 17}$

Συνεπώς: $\boldsymbol{G(1) = 5}$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\boldsymbol{\rho_1 = 2 = \rho_3}$ και $\boldsymbol{\rho_2 = 1}$

Εναλλακτικά (5)

e) (a) Η λύση: $\boldsymbol{P_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{5} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}}$ με $\boldsymbol{n_1 + n_2 + n_3 = 1}$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$\boldsymbol{U_1 = U_3} = 2 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \boldsymbol{0,4}$ και $\boldsymbol{U_2} = 1 \cdot \frac{1}{5} = \boldsymbol{0,2}$

ίδιες.

(c) $\boldsymbol{P_{1,0,0}} = \frac{1}{5} \cdot 2^1 \cdot 2^0 = \boldsymbol{0,4}$ και $\boldsymbol{P_{0,1,0}} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \boldsymbol{0,2}$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα: $\boldsymbol{P_{0,0,1}} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = \boldsymbol{0,4}$

ίδια…

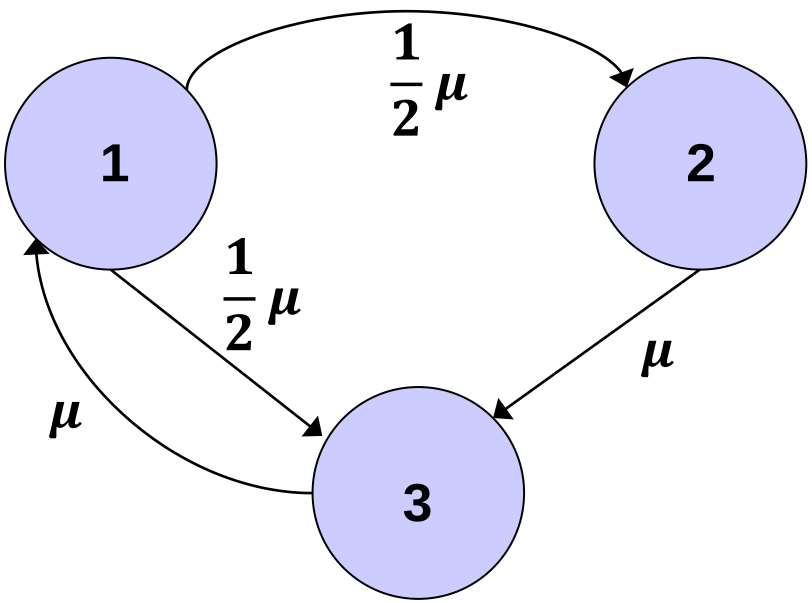
Απαντήσεις (7)

f) Θα έχουμε 3 καταστάσεις:

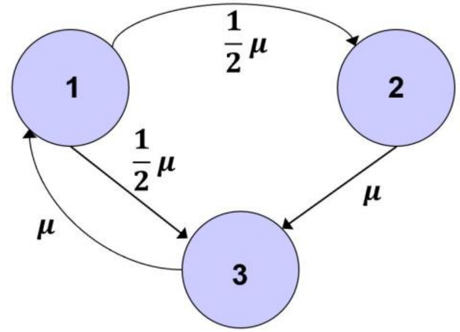
- **1** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0)$
- **2** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 0)$
- **3** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$

Δηλαδή η κατάσταση ***i*** αντιστοιχεί στην παρουσία του (μοναδικού) πελάτη στο ***ΣΑi*** για $i = 1, 2, 3$.

- Το *διάγραμμα καταστάσεων – ρυθμών μεταβάσεων* της αλυσίδας Markov συνεχούς χρόνου, είναι το εξής:



Απαντήσεις (8)



- Είναι μια *εργοδική* αλυσίδα.
- Υπάρχουν οι *πιθανότητας μόνιμης κατάστασης*.
- Εφαρμόζοντας το *Νόμο ισορροπίας της ροής πιθανότητας*:

Κατάσταση 1: $\boldsymbol{p_1 \cdot \mu = p_3 \cdot \mu}$ (2)

Κατάσταση 2: $\boldsymbol{p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2}\mu}$ (3)

Κατάσταση 3: $\boldsymbol{p_3 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2}\mu + p_2 \cdot \mu}$ (4)

και η προφανής σχέση: $\boldsymbol{p_1 + p_2 + p_3 = 1}$ (5)

a) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), (3), (5), παίρνουμε τη λύση:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p_1 = p_3 = 0,4} \\ \boldsymbol{p_2 = 0,2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Απαντήσεις (9)

- Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης που βρήκαμε παραπάνω, έχουν την εξής αντιστοίχιση με τα προηγούμενα:

$p_1 = P_{1,0,0} = 0,4 \qquad p_2 = P_{0,1,0} = 0,2 \qquad p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$

b) Προφανώς: $U_1 = p_1 = 0,4 \quad U_2 = p_2 = 0,2 \quad U_3 = p_3 = 0,4$
και **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks.**

c) $p_1 = P_{1,0,0} = 0,4 \qquad p_2 = P_{0,1,0} = 0,2$

d) $p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$

Άσκηση 2: Απλά συστήματα αναμονής

Σε έναν δικτυακό εκτυπωτή, οι αφίξεις εργασιών είναι Poisson, με μέσο ρυθμό 8 εργασίες/ώρα. Η διάρκεια μιας εκτύπωσης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, με μέση τιμή τα 2.5 λεπτά/εργασία. Θεωρούμε ότι μπορούν να περιμένουν στο buffer του εκτυπωτή, όσες εργασίες φθάσουν.

a) Ποιος είναι ο *μέσος χρόνος απόκρισης T* μιας εργασίας στον εκτυπωτή;

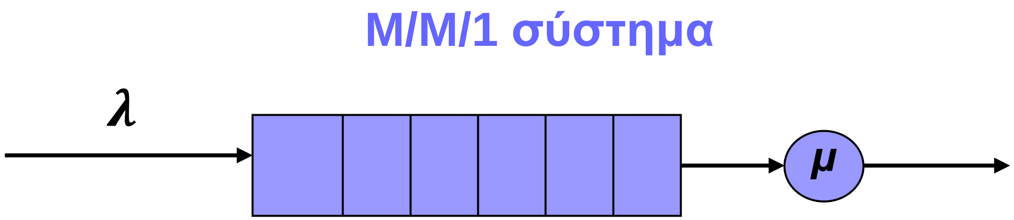
b) Ποιος είναι ο *μέσος αριθμός εργασιών* N_q *που περιμένουν* στο buffer του εκτυπωτή;

c) Θεωρήστε ότι ο χρόνος εκτύπωσης είναι σταθερός (και όχι εκθετικός), ίσος με 2.5 λεπτά/εργασία. Στην περίπτωση αυτή, ποιος είναι ο μέσος χρόνος απόκρισης *T* και ο μέσος αριθμός εργασιών N_q που περιμένουν στο buffer; Συγκρίνετε και σχολιάστε με τα αποτελέσματα των (a) και (b).

- *ΣΗΜΕΙΩΣΗ*: Στο σύστημα αναμονής M/D/1, ο *μέσος αριθμός πελατών <u>στο σύστημα</u>*, είναι:

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

Απαντήσεις (1)



a) Για τον εκτυπωτή αυτόν, που είναι M/M/1, θέλουμε το $\boldsymbol{T}$.

Δίνονται:

$$\boldsymbol{\lambda} = 8 \text{ εργασίες/h} = 8/60 \text{ εργ/min} = 0{,}1333 \text{ εργ/min.}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = 1/\mu = 2{,}5 \text{ min/εργ} \implies \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2{,}5} \text{ εργ/min} = 0{,}4 \text{ εργ/min.}$$

Οπότε:

$$\rho = \lambda/\mu = \frac{0{,}1333}{0{,}4} = 0{,}333 = 1/3$$

και $\boldsymbol{T} = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{2{,}5}{2/3} = \mathbf{3{,}75} \text{ min}$

Απαντήσεις (2)

b) $\boldsymbol{\overline{N}_q} = \overline{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6} = \mathbf{0,166}$ εργασίες (Μ.Ο.) στο buffer.

c) Τώρα το σύστημα είναι **M/D/1**. Οι παραπάνω τύποι για $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{\overline{N}_q}$ δεν ισχύουν πλέον, αλλά τα λ, μ, ρ παραμένουν ίδια.

Το $\boldsymbol{T}'$ θα το πάρουμε από το

N. Little: $\overline{N}' = \lambda \cdot T' \implies T' = \overline{N}'/\lambda$ (1)

M/D/1: $\overline{N}' = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{3} + \frac{1/9}{4/3} = \frac{15}{36} = 0{,}4167$ εργασίες (2)

Οπότε, από την (1) με χρήση της (2):

$$T' = \overline{N}'/\lambda = 0{,}4167/0{,}133 \implies \boldsymbol{T' = 3,133} \text{ min}$$

και $\overline{N}_q{}' = \overline{N}' - \rho = 0{,}4167 - 0{,}3333 \implies \boldsymbol{\overline{N}_q{}' = 0,0834}$ εργασίες

Σχόλιο: Τα $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{\overline{N}_q}$ είναι σημαντικά μικρότερα στο M/D/1 από ότι στο M/M/1. Μάλιστα, $\boldsymbol{\overline{N}_q{}' = 1/2 \cdot \overline{N}_q}$ (!). Οφείλεται στη μικρότερη αβεβαιότητα/διακύμανση που έχει το M/D/1…

Άσκηση 3: Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

Ένα πρόγραμμα έχει τρεις τύπους εντολών: *Εντολές CPU* (τύπος 1), *Εντολές διαχείρισης δεδομένων* (τύπος 2) και *Εντολές αλληλεπίδρασης με το χρήστη* (τύπος 3). Μετά από ανάλυση του προγράμματος, διαπιστώνουμε ότι μία εντολή τύπου 1 ακολουθείται από μία ακόμα εντολή τύπου 1 με πιθανότητα 0.7, ενώ με πιθανότητα 0.2 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 2. Αντίστοιχα, μία εντολή τύπου 2 ακολουθείται από μία ακόμα εντολή τύπου 2 με πιθανότητα 0.1, ενώ με πιθανότητα 0.8 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 1. Τέλος, μία εντολή τύπου 3 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 1 με πιθανότητα 0.9 και με πιθανότητα 0.1 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 2.

a) Παρουσιάστε το *διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων* της αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου που είναι μοντέλο του συστήματος.

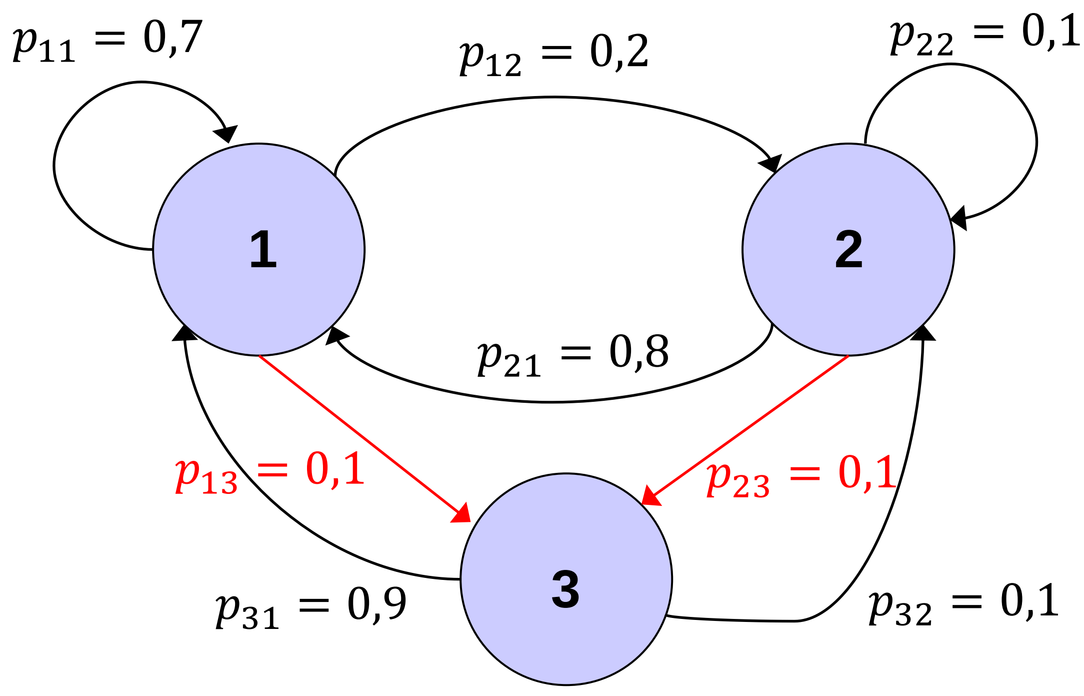
b) Ποιο είναι το ποσοστό των *εντολών CPU* και ποιο το ποσοστό των *εντολών αλληλεπίδρασης με το χρήστη* που παρατηρούνται κατά την εκτέλεση του προγράμματος;

c) Κατά μέσο όρο, πόσες εντολές τύπου 1 ή/και 3 παρεμβάλλονται μεταξύ δύο διαδοχικών εντολών τύπου 2;

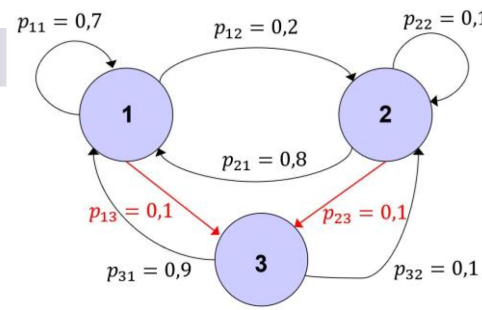
Απαντήσεις (1)

a) Θα έχουμε 3 καταστάσεις:
- Κατάσταση **1** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών CPU*
- Κατάσταση **2** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών διαχείρισης δεδομένων*
- Κατάσταση **3** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών αλληλεπίδρασης με το χρήστη*

- Το διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων είναι το εξής:



Απαντήσεις (2)



b) Εξισώσεις μόνιμης κατάστασης:

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1 = p_{11}\cdot\pi_1 + p_{21}\cdot\pi_2 + p_{31}\cdot\pi_3 &\Leftrightarrow \pi_1 = 0{,}7\cdot\pi_1 + 0{,}8\cdot\pi_2 + 0{,}9\cdot\pi_3 \\
\pi_2 = p_{12}\cdot\pi_1 + p_{22}\cdot\pi_2 + p_{32}\cdot\pi_3 &\Leftrightarrow \pi_2 = 0{,}2\cdot\pi_1 + 0{,}1\cdot\pi_2 + 0{,}1\cdot\pi_3 \\
\pi_3 = p_{13}\cdot\pi_1 + p_{23}\cdot\pi_2 &\Leftrightarrow \pi_3 = 0{,}1\cdot\pi_1 + 0{,}1\cdot\pi_2 \\
&\quad\;\; \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{aligned}\right\}(1)$$

Χρησιμοποιώντας την 4η και δύο από τις 1η, 2η, 3η των εξισώσεων (1), παίρνουμε τη λύση:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\pi_1} &= \mathbf{0,7355} \\ \boldsymbol{\pi_2} &= \mathbf{0,1736} \\ \boldsymbol{\pi_3} &= \mathbf{0,091}\end{aligned}}$$

c) Ισχύει:

$$M_2 = 1/\pi_2 = 1/0{,}1736 \;\Longrightarrow\; \boxed{\boldsymbol{M_2} = \mathbf{5,76}\ \text{εντολές}}$$