

Κεφάλαιο 3 :

Μοντέλα Θεωρίας Αναμονής

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

Καθηγητής

Ορισμός συστημάτων αναμονής

- **Συστήματα αναμονής (Queueing Systems):**
Συστήματα στα οποία οι αφίξεις «πελατών» δημιουργούν απαιτήσεις εξυπηρέτησης από πόρους πεπερασμένης δυνατότητας εξυπηρέτησης.
- Σχηματίζονται «ουρές», όταν δημιουργούνται απαιτήσεις σύγχρονης χρησιμοποίησης πόρων.

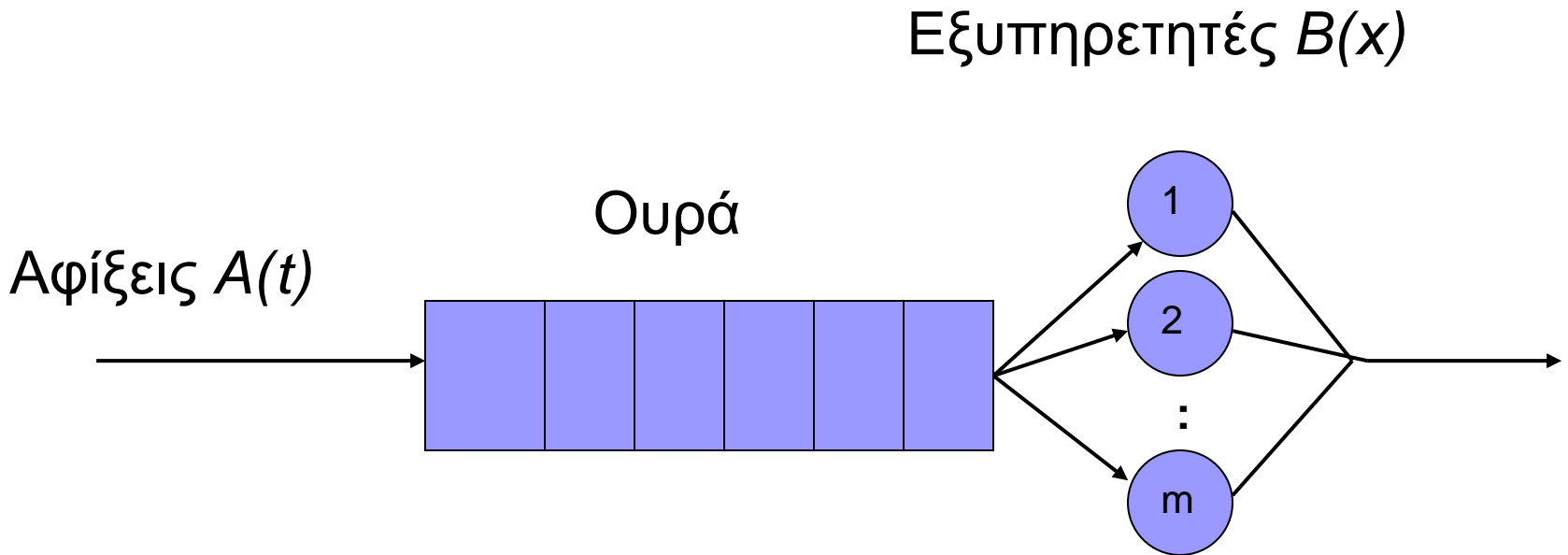
Ορισμός συστημάτων αναμονής (2)

- Οι ουρές επηρεάζονται από τη μέση τιμή και τη στατιστική διακύμανση του ρυθμού αφίξεων.
 - Ανεξέλεγκτες ουρές όταν: μέση τιμή ρυθμού αφίξεων > μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης
 - Σχηματισμός ουρών λόγω στατιστικών διακυμάνσεων αφίξεων
- **Θεωρία αναμονής (Queueing Theory):** ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων, η απόδοση των οποίων επηρεάζεται από φαινόμενα αναμονής.

Φορτίο εργασίας συστημάτων αναμονής (Μη-εκτελέσιμο)

- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)*
 $A(t) = \text{Prob}[\text{χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων} \leq t]$
- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη (Χ.Ε.)*
 $B(x) = \text{Prob}[\text{χρόνος εξυπηρέτησης} \leq x]$
- Συνήθως υποθέτουμε ότι οι παραπάνω **Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΔ)** συγκροτούνται από ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες **Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)**

Ένα Σύστημα Αναμονής



Άλλα μεγέθη περιγραφής του συστήματος

- Αριθμός εξυπηρετητών (servers) στο σύστημα m .
- Χωρητικότητα του συστήματος σε πελάτες K
(default: $K = \infty$)
- Πληθυσμός υποψηφίων πελατών M (default: $M = \infty$)
- Πολιτική εξυπηρέτησης, δηλαδή ο τρόπος επιλογής πελατών από την ουρά για τον (τους) εξυπηρετητές.
(default: FCFS ή FIFO)
- Κλάσεις πελατών (default: 1)
- Ομάδες προτεραιότητας πελατών (default: 1)
- Διαθεσιμότητα εξυπηρετητή (default: 100%)

Μετρικές απόδοσης

- *Χρόνος απόκρισης – response time* (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για ένα πελάτη.
- *Χρόνος αναμονής* για ένα πελάτη.
- *Αριθμός πελατών* στο σύστημα.
- *Χρησιμοποίηση (Utilization)* του συστήματος.

Συμβολισμός συστημάτων αναμονής

■ $A/B/m$

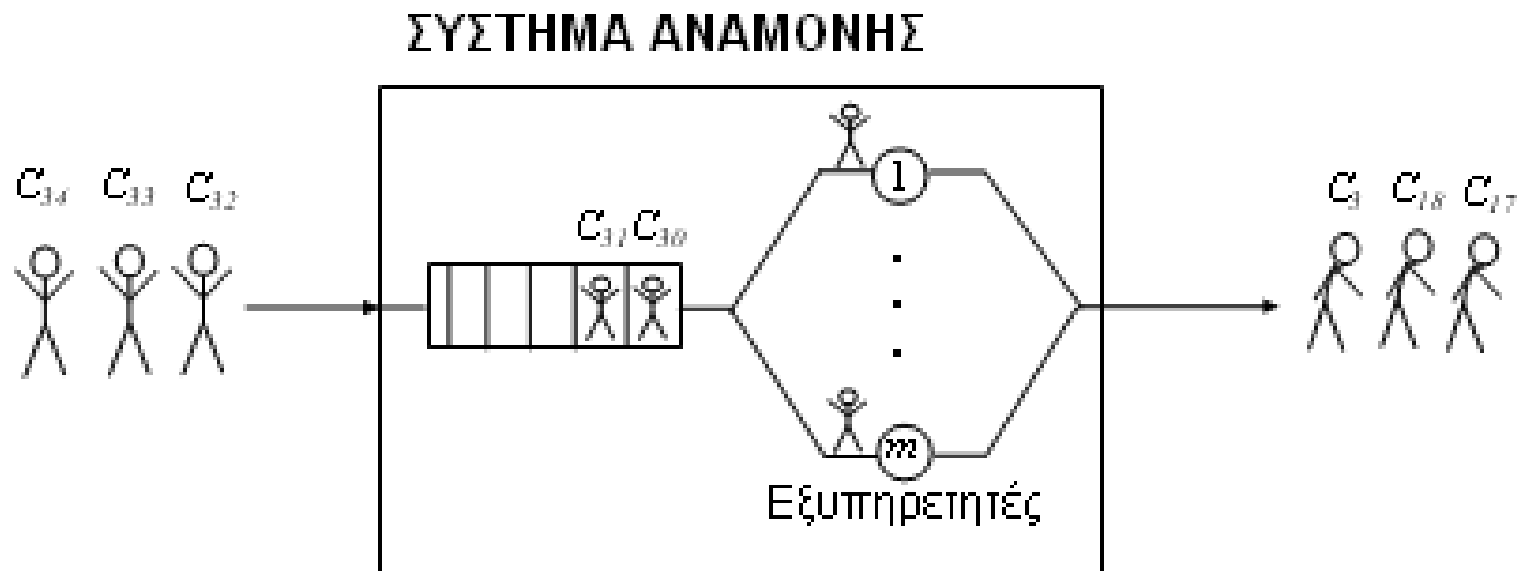
- A, B : Συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας $X.A$ και $X.E$ αντίστοιχα. Εκφράζονται ως
 - M (για την εκθετική κατανομή).
 - D (για τη ντετερμινιστική [σταθερή] κατανομή).
 - Er (για την κατανομή Erlang r -βαθμίδων).
 - G (για ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)
- m : αριθμός εξυπηρετητών

■ $A/B/m/K/M$

- K : η χωρητικότητα του συστήματος
- M : το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών
όταν αυτά είναι διαφορετικά από ∞

■ Παράδειγμα: $D/M/2//200$

Αναπαράσταση συστήματος αναμονής



- $A(t), B(x)$: αυθαίρετα
- m εξυπηρετητές
- Αριθμούμε τους πελάτες με το δείκτη n και ορίζουμε C_n τον n -οστό πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών

- **Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:**

$\tau_n \equiv$ χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n

$t_n \equiv$ χρόνος μεταξύ των αφίξεων των C_{n-1}, C_n

$$= \tau_n - \tau_{n-1} \text{ για } n \geq 2 \quad (t_1 = \tau_1)$$

$\text{Prob}[t_n \leq t] = A(t)$, δηλαδή το $A(t)$ είναι ανεξάρτητο του n

\bar{t} μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

Ρυθμός αφίξεων (arrival rate) των πελατών: $\lambda = \frac{1}{\bar{t}}$

- **Χρόνοι εξυπηρέτησης:**

$x_n \equiv$ χρόνος εξυπηρέτησης του C_n

$\text{Prob}[x_n \leq x] = B(x)$

\bar{x} : μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate) των πελατών : $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (2)

- **Χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:**

$w_n \equiv$ χρόνος αναμονής (στην ουρά) του C_n .

$W = \bar{w}$ μέσος χρόνος αναμονής

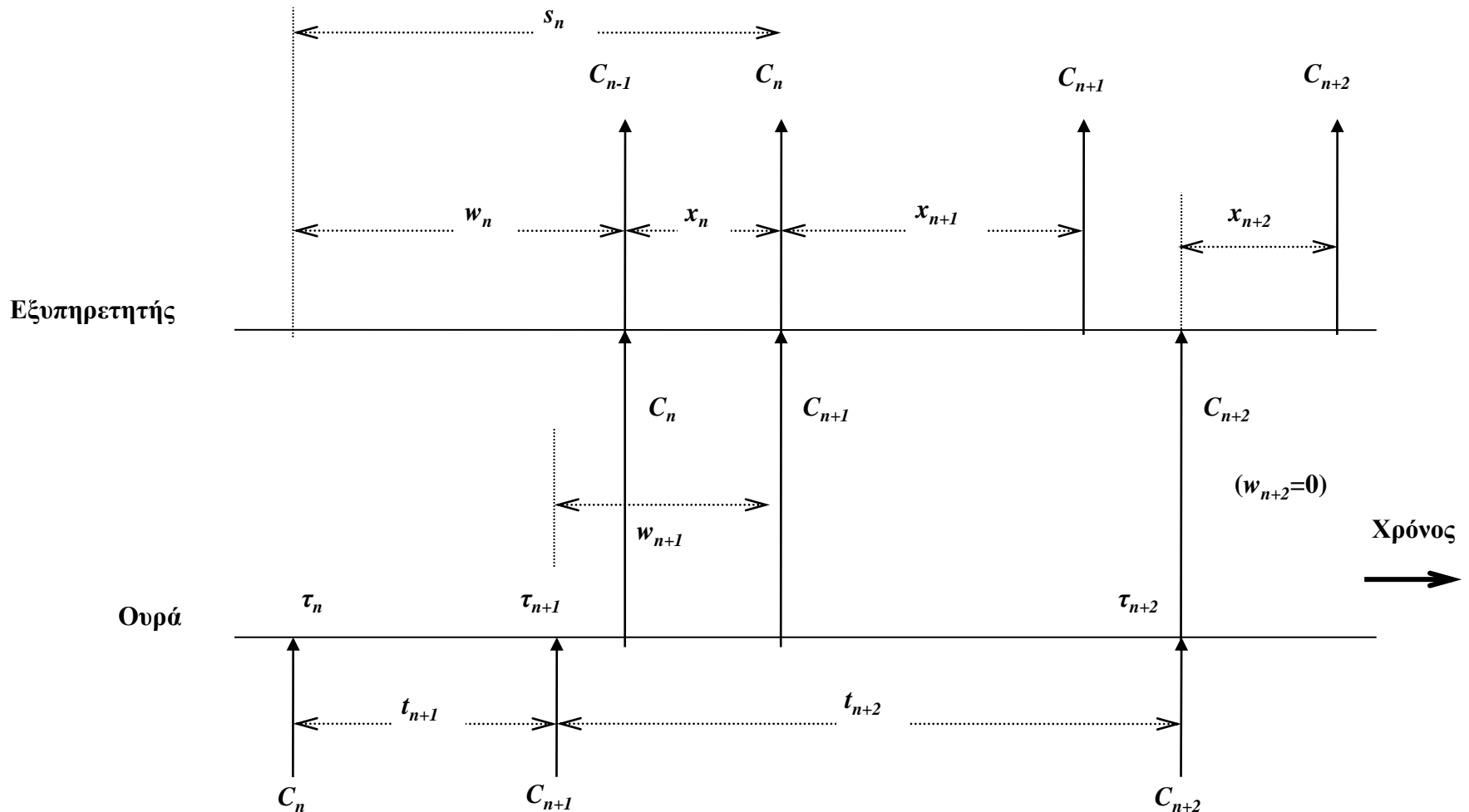
- **Συνολικός χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (χρόνος απόκρισης):**

$s_n \equiv$ χρόνος συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) του C_n

$$= w_n + x_n$$

$T = W + \bar{x}$ μέσος χρόνος συστήματος ($T \equiv \bar{s}$)

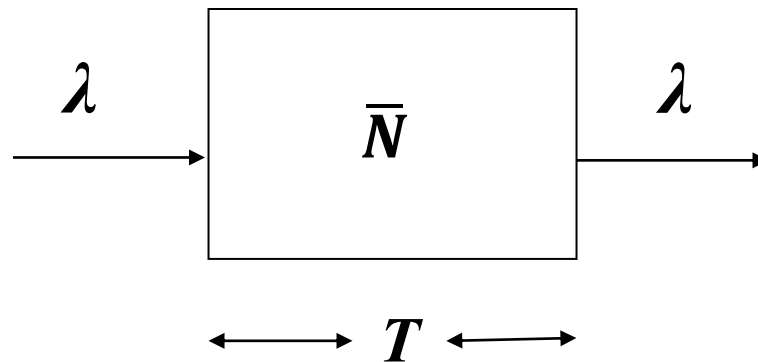
Χρονικό Διάγραμμα Συστήματος Αναμονής (1 εξυπηρετητής – FCFS)



Νόμος του Little

- Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ' αυτό.

$$\bar{N} = \lambda \cdot T$$

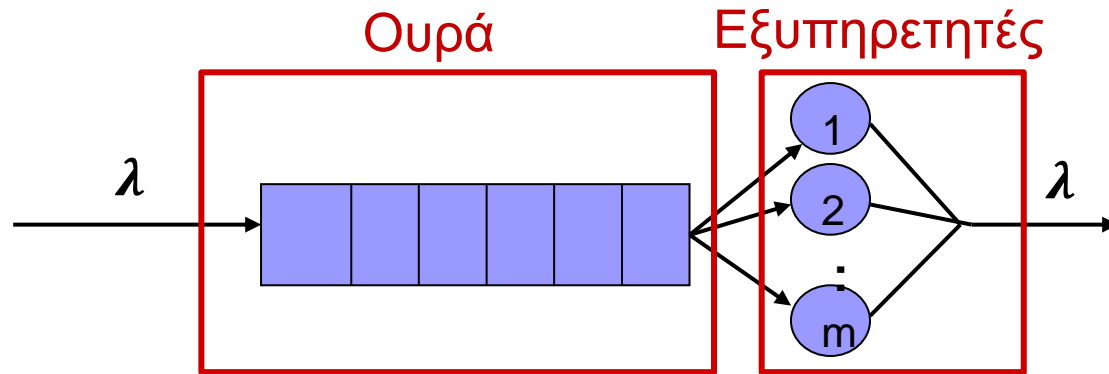


Νόμος του Little (2)

- *Διαισθητική αιτιολόγηση:* ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα βρει μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών \bar{N} που θα υπάρχει όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν $\lambda \cdot T$ πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

- Ο Νόμος δίνει μια χρήσιμη σχέση μεταξύ ορισμένων βασικών μεγεθών ενός συστήματος αναμονής, αλλά δεν αποτελεί «λύση» στο γενικό μας πρόβλημα: Ουσιαστικά συνδέει ένα γνωστό μέγεθος εισόδου (λ), με δύο άγνωστα μεγέθη (\bar{N} , T) τα οποία είναι μετρικές απόδοσης που θέλουμε να βρούμε.

Νόμος του Little (3)



- Για όρια του συστήματος μόνο στην ουρά

$$\bar{N}_q = \lambda \cdot W$$

- Για όρια συστήματος μόνο στον(-ους) εξυπηρετητή(-ές)

$$\bar{N}_s = \lambda \cdot \bar{x}$$

Χρησιμοποίηση (Utilization)

- Ο συντελεστής απασχόλησης ή χρησιμοποίηση ρ , ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται «δουλειά» στο σύστημα, προς το **μέγιστο** ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μπορεί να εκτελέσει αυτή τη «δουλειά». Δηλαδή για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = (\text{μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών}) \times (\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}) / 1$$

$$\rightarrow \rho = \lambda \cdot \bar{x}$$

- Στην περίπτωση m (ίδιων) εξυπηρετητών:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$$

- $\rho = \{\text{Μέση τιμή του ποσοστού εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι}\}$. Διότι:

$$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m} = \frac{\bar{N}_s}{m} \quad (N. Little)$$

Δηλαδή, για 1 εξυπηρετητή:

$$\rho = \bar{N}_s$$

Σταθερό σύστημα αναμονής

- **Σταθερό** σύστημα αναμονής, είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου (άπειρου) μήκους.
- Σε ένα σταθερό σύστημα ισχύει $0 \leq \rho < 1$

G/G/1

- Έστω τ ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος περιμένουμε ο **αριθμός των αφίξεων A** να είναι πολύ κοντά στην τιμή $\lambda \cdot \tau$. Επίσης, έστω p_0 η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος τ , ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος για $\tau - \tau \cdot p_0$ sec και άρα ο **αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται B** στο χρονικό διάστημα τ , είναι περίπου $\frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$
- **$A = B$** : $\lambda \cdot \tau \cong \frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\bar{x}}$ οπότε για $\tau \rightarrow \infty$, έχουμε: $\lambda \bar{x} = 1 - p_0$
- Οπότε **$\rho = 1 - p_0$**
όπου p_0 η **πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος** σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα

Στοχαστικές διαδικασίες

- **Στοχαστική Διαδικασία (Σ.Δ.):** ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.), $X(t)$, όπου οι Τ.Μ. έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο t .
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
 - **ο χώρος καταστάσεων** (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
 - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές \rightarrow Σ.Δ. **διακριτών-καταστάσεων** (αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων $\leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$
 - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα \rightarrow Σ.Δ. **συνεχών-καταστάσεων**
 - **η χρονική παράμετρος** (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
 - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [X_n – Στοχαστική Ακολουθία]
 - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [$X(t)$]
 - **η στατιστική σχέση μεταξύ των Τ.Μ.**

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις TM

$\vec{X} = [X(t_1), X(t_2), \dots]$, δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}; \vec{t}) \equiv P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

για όλα τα $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ και n .

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

1. Στάσιμες ΣΔ

Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό τ , πρέπει: $F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t} + \tau) = F_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t})$ όπου $\vec{t} + \tau = (t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$.

2. Ανεξάρτητες ΣΔ

Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}; \vec{t}) \equiv f_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{x_1}(x_1; t_1) \dots f_{x_n}(x_n; t_n)$$

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov $\{X(t)\}$, η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή $X(t_{n+1})$ θα είναι ίση με \mathbf{x}_{n+1} , εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή $X(t_n) = \mathbf{x}_n$ και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

Ιδιότητα Markov (για αλυσίδα Markov):

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1] = \\ = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n] \end{aligned}$$

όπου $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, ενώ τα x_i περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Θα αποδείξουμε αργότερα ότι ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

Εκθετική Κατανομή (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη - **Γεωμετρική Κατανομή** (διαδικασία διακριτού χρόνου).

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (4)

4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Δηλαδή αν $X(t_n) = i$, τότε $X(t_{n+1}) = i - 1$ ή $X(t_{n+1}) = i + 1$ μόνο.

5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα σε αυτές τις στιγμές λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

Στατιστική σχέση μεταξύ των TM (5)

6. Τυχαίοι περίπατοι

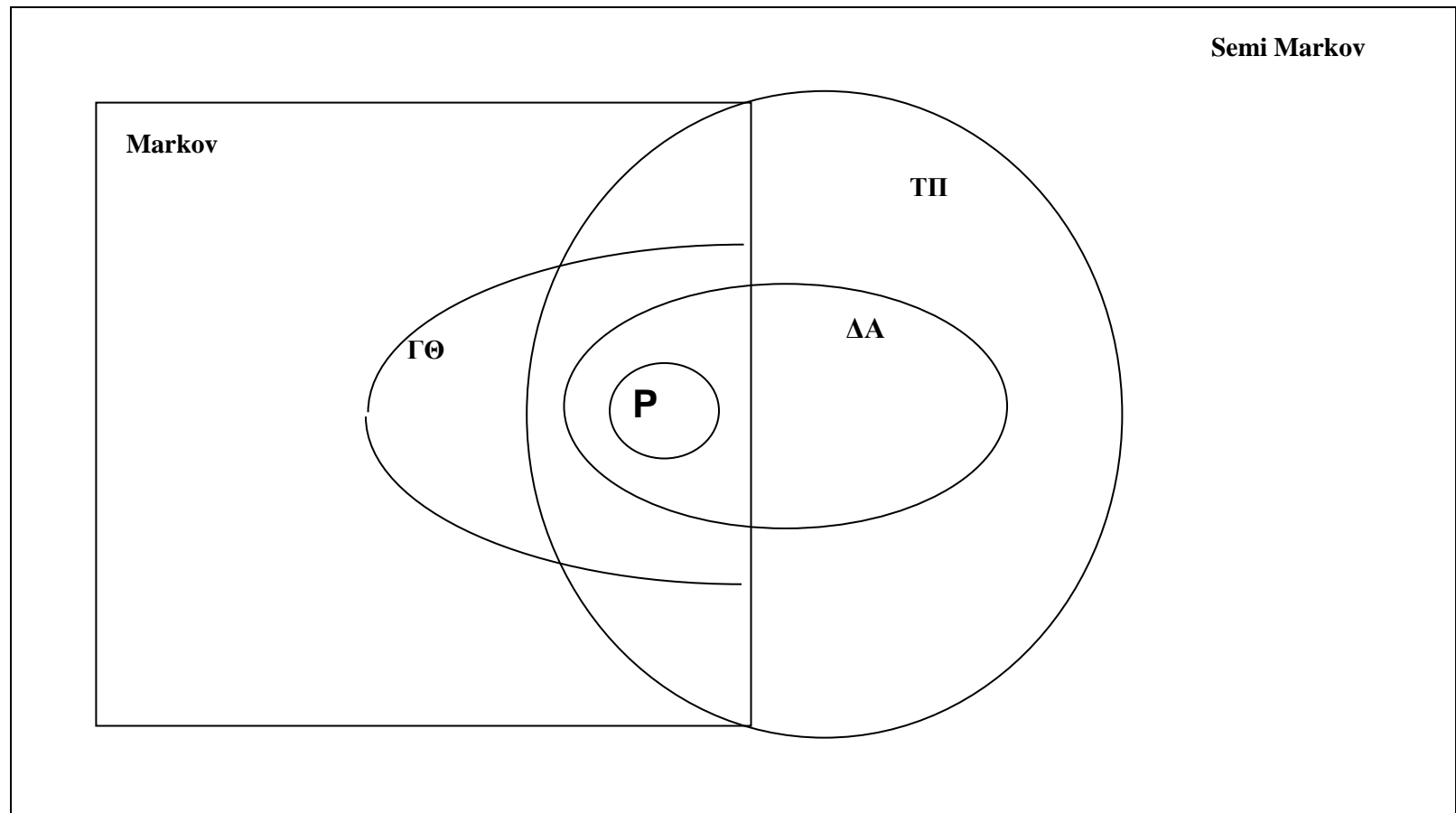
Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

Δηλαδή, μια ακολουθία TM $\{S_n\}$ είναι τυχαίος περίπατος αν:
 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ όπου $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$ και X_1, X_2, \dots είναι ακολουθία ανεξάρτητων TM με κοινή κατανομή.

7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- S_n είναι τώρα η TM που καθορίζει τη χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η n -οστή μεταβολή κατάστασης και $\{X_n\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων TM, όπου η X_n αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(n-1)$ -οστής και n -οστής μεταβολής κατάστασης. Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



P: Poisson

Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την κατάσταση E_i όπου είναι στο βήμα $(n-1)$, στην κατάσταση E_j κατά το βήμα n

$$P[X_n = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}]$$

Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι **πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος** είναι ανεξάρτητες του n , τότε έχουμε μια **ομογενή** αλυσίδα Markov. Ορίζουμε:

$$p_{ij} \equiv P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$$

- Πιθανότητες μετάβασης m -βημάτων:

$$p_{ij}^{(m)} \equiv P[X_{n+m} = j \mid X_n = i]$$

- Εύκολα βγαίνει: $p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$

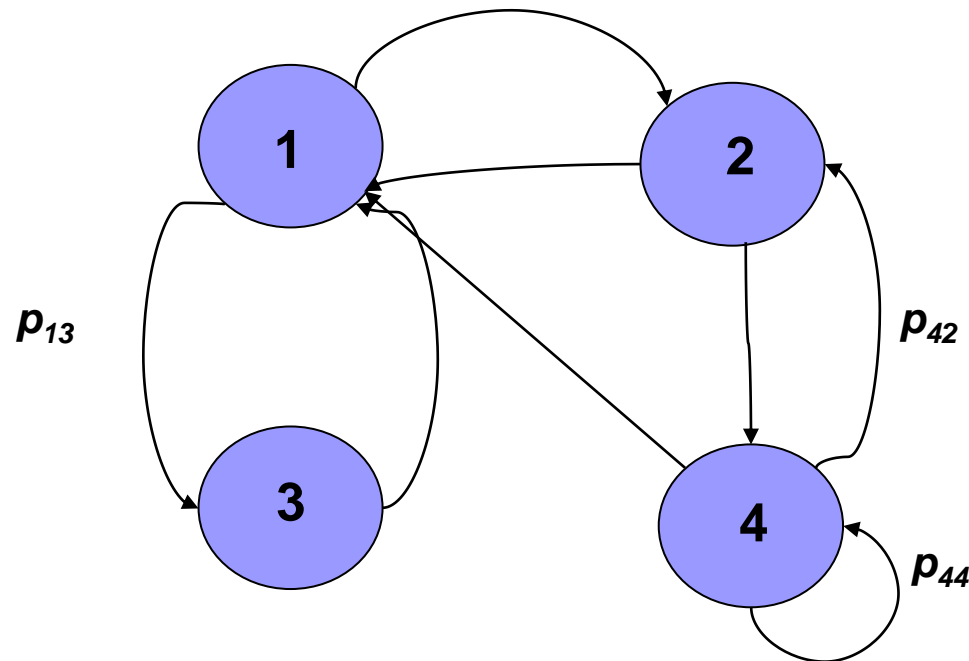
- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την E_i στην E_j μέσα σε m βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την E_i σε κάποια E_k μέσα σε $(m-1)$ βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος m_0 για κάθε ζευγάρι καταστάσεων E_i, E_j :

$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$

ΑΜΕΙΩΤΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

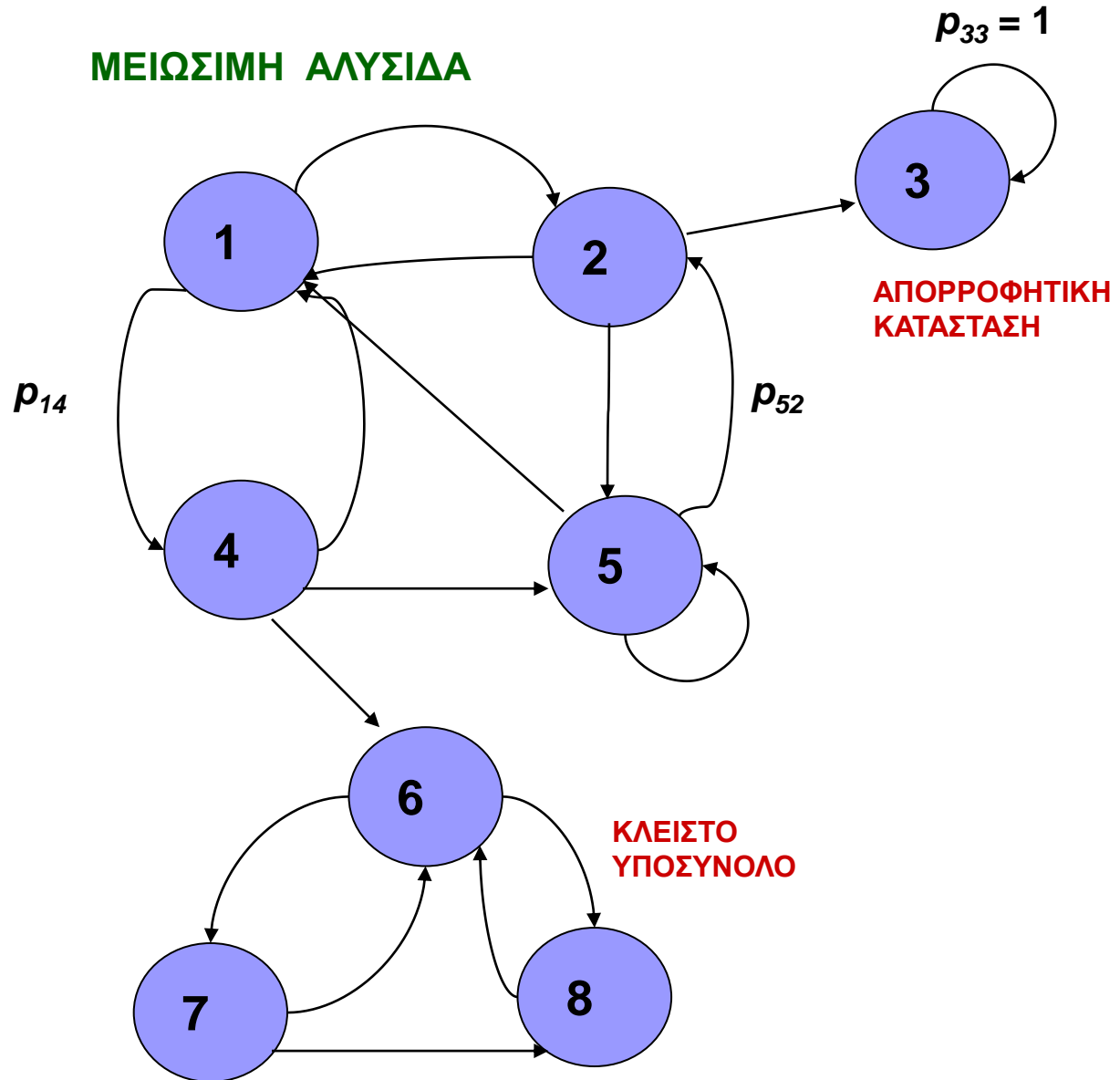


Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων $A1$ λέγεται **κλειστό** αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του $A1$ σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του $A1$.
- Αν το $A1$ αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω E_i , τότε αυτή καλείται **απορροφητική** κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η E_i απορροφητική, είναι $p_{ii} = 1$.
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα, η αλυσίδα λέγεται **μειώσιμη**.

Παράδειγμα

ΜΕΙΩΣΙΜΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



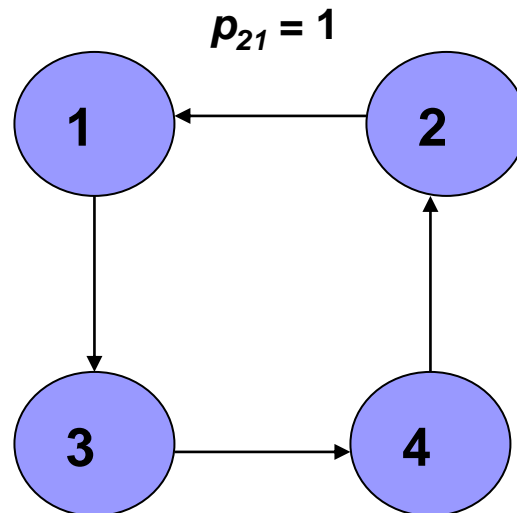
Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

- $f_j^{(n)} \equiv \text{Prob} [\text{Η πρώτη επιστροφή στην } E_j \text{ γίνεται μετά από } n \text{ βήματα από την αναχώρηση από την } E_j]$
- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = \text{Prob}[\text{Κάποτε να επιστρέψουμε στην } E_j]$
- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση E_j , f_j , είναι $f_j = 1$, η κατάσταση E_j λέγεται **επαναληπτική**.
- Αν $f_j < 1$, λέγεται **μεταβατική**.

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (4)

- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην E_j είναι $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$, (γ ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος) τότε η E_j λέγεται **περιοδική** με περίοδο γ . Αν $\gamma = 1$ τότε η E_j είναι **μη-περιοδική**.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ



Ορισμοί για αλυσίδες Markov (5)

- Για τις καταστάσεις με $f_j = 1$, ορίζουμε το **Μέσο Χρόνο Επανάληψης της** (επιστροφής στην) E_j :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην E_j , M_j , είναι $M_j = \infty$, η E_j λέγεται **μηδενικά επαναληπτική**, ενώ αν είναι $M_j < \infty$, η E_j λέγεται **βέβαια επαναληπτική**.

Θεώρημα 1

- Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε **όλες μεταβατικές**, είτε **όλες βέβαια επαναληπτικές** ή **όλες μηδενικά επαναληπτικές**. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο γ .

Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P[X_n = j]$: Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση E_j κατά το n -στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$: στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση E_j κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης: $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$

- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης $\{\pi_j^{(0)}\}$ έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα $\{\pi_j\}$ είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

Θεώρημα 2

Σε μια αμείωτη και μη-περιοδική ομογενή αλυσίδα Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχουν πάντα, και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι μηδενικά επαναληπτικές, οπότε $\pi_j = 0$ και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.
2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι βέβαια επαναληπτικές και τότε $\pi_j > 0$ για όλα τα j , στην οποία περίπτωση το σύνολο $\{\pi_j\}$ είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες π_j καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i$$

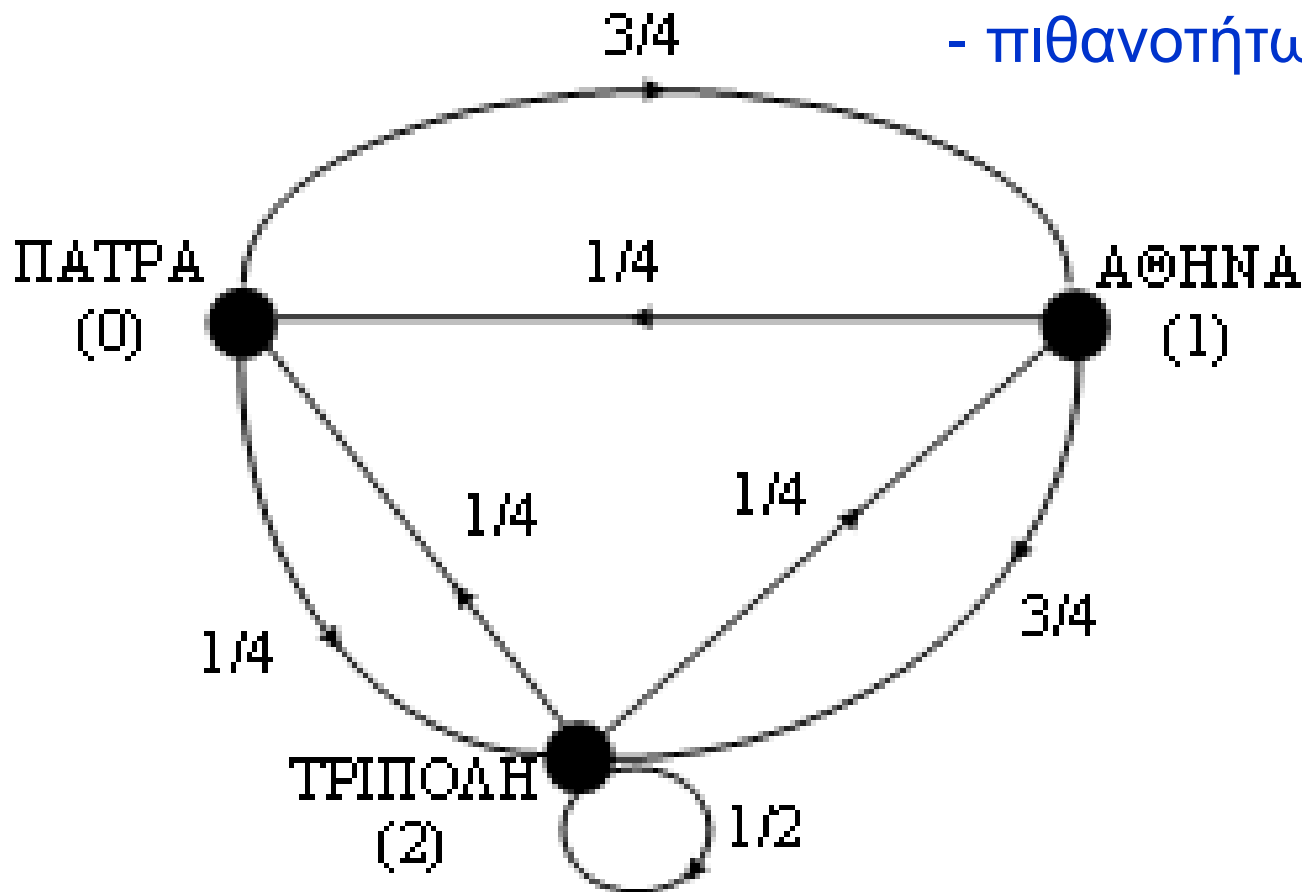
$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση E_j λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.
Δηλαδή αν $f_j = 1$, $M_j < \infty$ και $\gamma = 1$.
- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι **εργοδικές**, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια **εργοδική**.

Παράδειγμα

Διάγραμμα καταστάσεων -
- πιθανοτήτων μεταβάσεων



Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

- $\vec{\mathbf{P}} = [p_{ij}]$ πίνακας μεταβάσεων

- $\vec{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ διάνυσμα πιθανοτήτων

- Από το θεώρημα 2: $\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

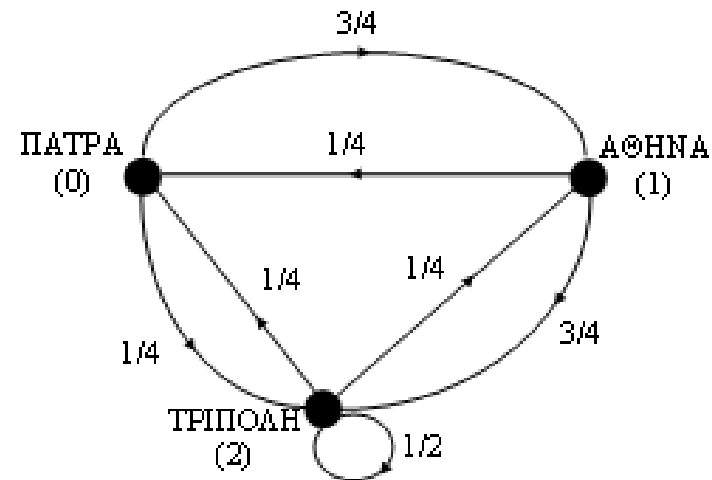
■ Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\pi_0 = 0 \cdot \pi_0 + \frac{1}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi_0 + \frac{3}{4} \cdot \pi_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$



Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τις:

$$\pi_0^{(n+1)} = 0 \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_1^{(n+1)} = \frac{3}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + 0 \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{4} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_2^{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \pi_0^{(n)} + \frac{3}{4} \cdot \pi_1^{(n)} + \frac{1}{2} \cdot \pi_2^{(n)}$$

$$\pi_0^{(n)} + \pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} = 1$$

για $n \rightarrow \infty$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (3)

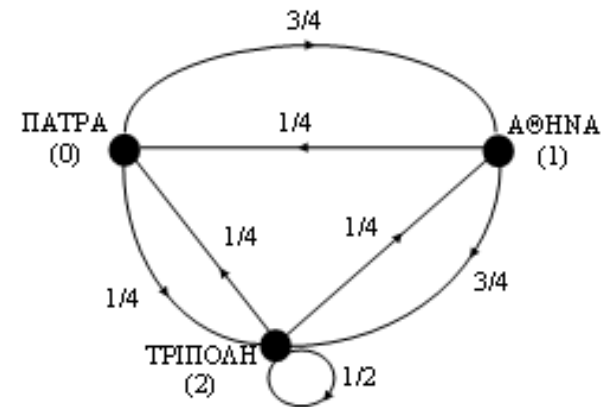
■ Αποτέλεσμα:

$$\pi_0 = 1/5 = 0.20$$

$$\pi_1 = 7/25 = 0.28$$

$$\pi_2 = 13/25 = 0.52$$

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης



Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

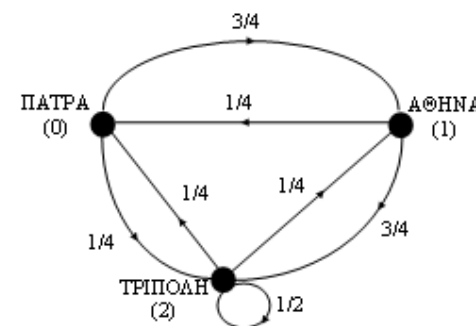
- Υπολογισμός πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)}$: η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση E_j τη χρονική στιγμή n .

- $\vec{\pi}^{(n)} \equiv [\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα n

- Ισχύει ότι
$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}$$

$$\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(0)} \cdot (\mathbf{P})^n$$

Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (2)



- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η $\vec{\pi}^{(0)} = [1, 0, 0]$, δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	...	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	...	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	...	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	...	0.52

- Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.

Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

Prob [Το σύστημα να παραμείνει στην E_i για ακριβώς m επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην $E_i] = (1 - p_{ii}) p_{ii}^m$

Γεωμετρική κατανομή
(Ιδιότητα αμνησίας)

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (1)

Τα απλούστερα συστήματα: $M/M/m/K$

- *Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)*

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

- *Εκθετικά κατανομημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης (Χ.Ε.)*

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (2)

- *Ιδιότητα της αμνησίας*: «ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός».

- ΑΦΙΞΕΙΣ:

Αν έχει περάσει χρόνος t_0 από την τελευταία άφιξη (του C_{n-1})

$$Prob[t_n \leq t + t_0 \mid t_n > t_0] = Prob[t_n \leq t]$$

- ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ:

Αν έχει περάσει χρόνος x_0 εξυπηρέτησης του πελάτη C_n

$$Prob[x_n \leq x + x_0 \mid x_n > x_0] = Prob[x_n \leq x]$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (3)

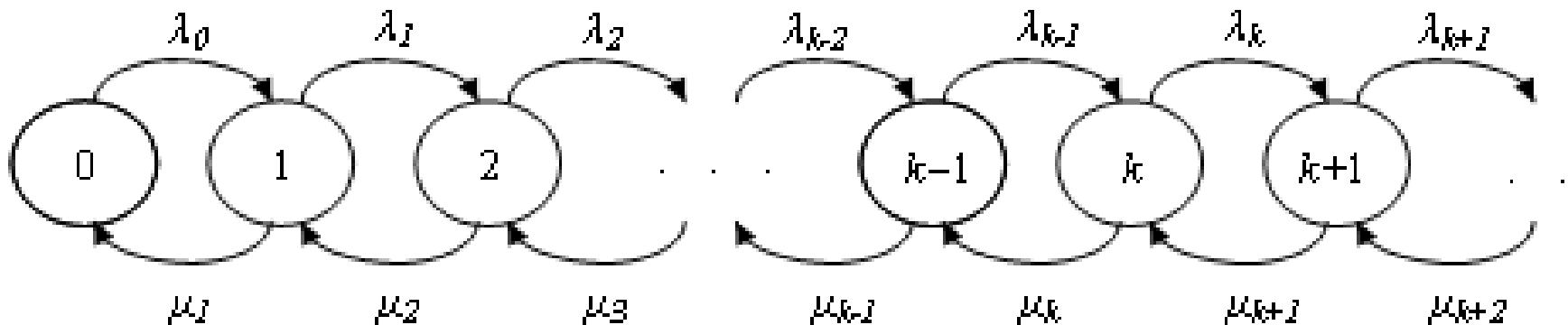
- $P_k(t) = Prob[k \text{ πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή } t]$
για $0 \leq k \leq K, t \geq 0$
- $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = Prob[k \text{ πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον}]$
- *Κατανομή μόνιμης κατάστασης.*
- Υπάρχει, αν το σύστημα είναι σταθερό ($0 \leq \rho < 1$)

Νόμος ισορροπίας της ροής πιθανότητας

Στη μόνιμη κατάσταση, ο «ρυθμός ροής πιθανότητας» μιας αλυσίδας Markov από κάθε κατάσταση, είναι ίσος με το «ρυθμό ροής πιθανότητας» προς την κατάσταση.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (1)

- Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j , τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις $j-1$ ή $j+1$.
- λ_k : ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα
- μ_k : ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα



Διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (2)

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **από** την κατάσταση k } =

$$p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας **προς** την κατάσταση k } =

$$p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$$

- Με βάση το νόμο ισορροπίας ροής

- Για $k \geq 1$ $p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k) = p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$ **(1)**

- Για $k = 0$ $p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$ **(2)**

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (3)

- Ισχύει πάντα ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \quad (3)$$

- Λύνοντας τις εξισώσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

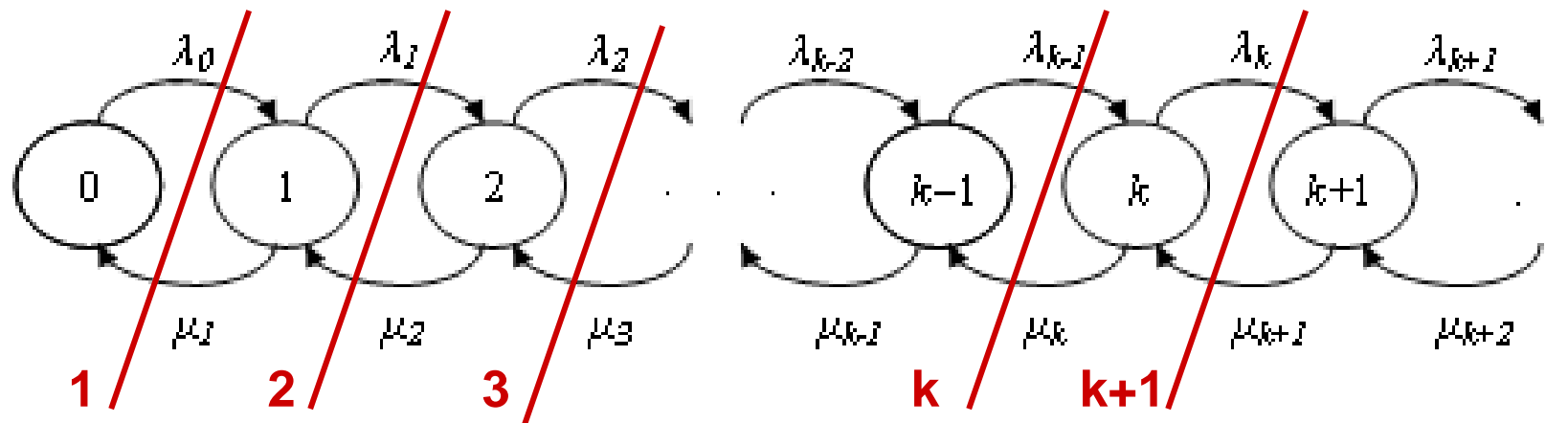
$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad (4)$$

- Η παραπάνω λύση υπάρχει (δηλαδή, υπάρχει μόνιμη κατάσταση), αν $p_0 > 0$, δηλαδή αν ο παρονομαστής της σχέσης (4) είναι μικρότερος από ∞ . Για να ισχύει το τελευταίο, θα πρέπει η ακολουθία λ_k / μ_k να συγκλίνει, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιο k_0 τέτοιο ώστε:
$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 \quad \text{για όλα τα } k \geq k_0$$

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (4)

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Ο Νόμος διατήρησης της ροής εφαρμόζεται και σε κάθε «σύνορο» της αλυσίδας Markov:



1: $\rho_0 \cdot \lambda_0 = \rho_1 \cdot \mu_1$

2: $\rho_1 \cdot \lambda_1 = \rho_2 \cdot \mu_2$

:

k: $\rho_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = \rho_k \cdot \mu_k$

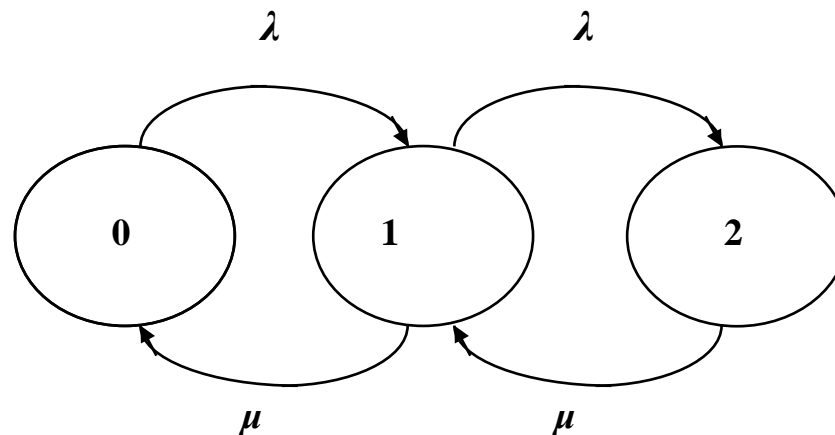
Ίδια Αποτελέσματα

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μας δίνεται μια αλυσίδα Markov γεννήσεων – θανάτων, η οποία έχει μόνο τρεις καταστάσεις $\{0, 1, 2\}$, ενώ ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \text{ για } k = 0, 1 \quad \text{και} \quad \mu_k = \mu \text{ για } k = 1, 2$$



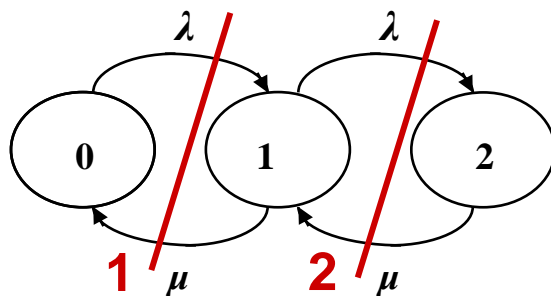
Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Για την κατάσταση 0: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 1: $p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 2: $p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda$

Από τις παραπάνω 3 σχέσεις, μόνο οι 2 είναι ανεξάρτητες.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:



1: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

2: $p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$

.....ανεξάρτητες.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Χρησιμοποιούμε την $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ με 2 από τις παραπάνω, και παίρνουμε την τελική λύση:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

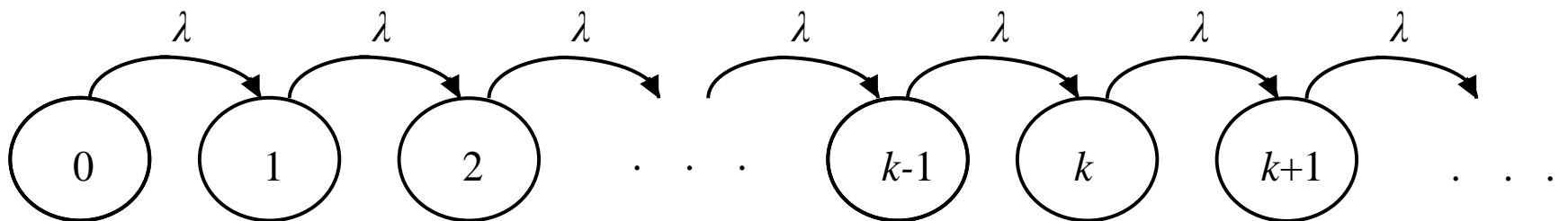
$$p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

$$p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

- Η αλυσίδα αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα **M/M/1/2**. Γιατί;
- Στο σύστημα αυτό επιτρέπεται $\lambda/\mu \geq 1$. Γιατί;

Διαδικασίες Poisson (1)

- Ειδική περίπτωση Γεννήσεων-Θανάτων (μόνο αφίξεις)
 - $\lambda_k = \lambda$ για όλα τα k
 - $\mu_k = 0$ για όλα τα k



Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων Διαδικασίας Poisson

Δεν είναι εργοδικό σύστημα. Όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές.

Διαδικασίες Poisson (2)

- Έστω το σύστημα ξεκινά τη στιγμή $t = 0$, άδειο. Δηλαδή:

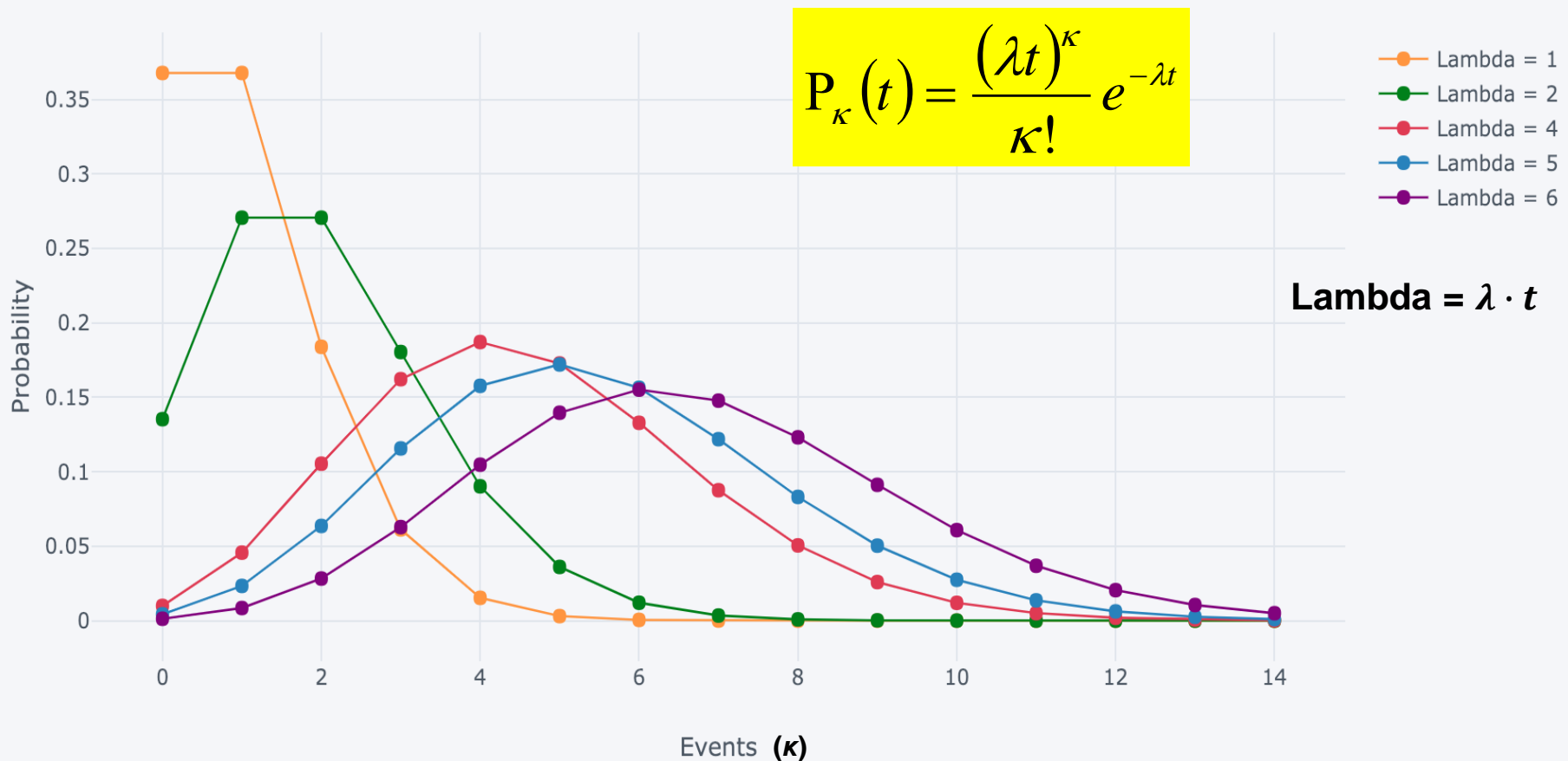
$$P_{\kappa}(0) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ 0, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

- Τη χρονική στιγμή t : $P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$ για $k \geq 0, t \geq 0$
Κατανομή Poisson

- Μέση Τιμή και Διακύμανση (αριθμού αφίξεων στο $[0, t]$), ίσα με λt . (αναμενόμενο).
- Δηλαδή, στο M/M/1, η διαδικασία μόνο των αφίξεων, είναι Poisson

Η κατανομή Poisson

Probability of Events in One Interval



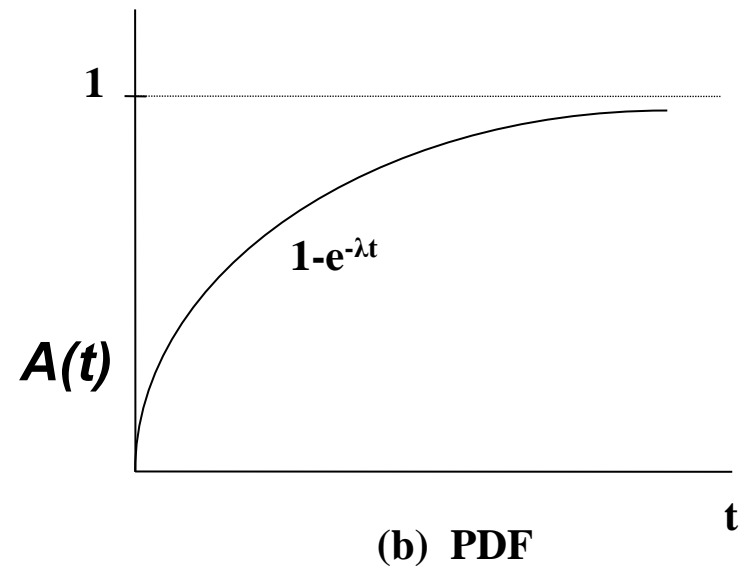
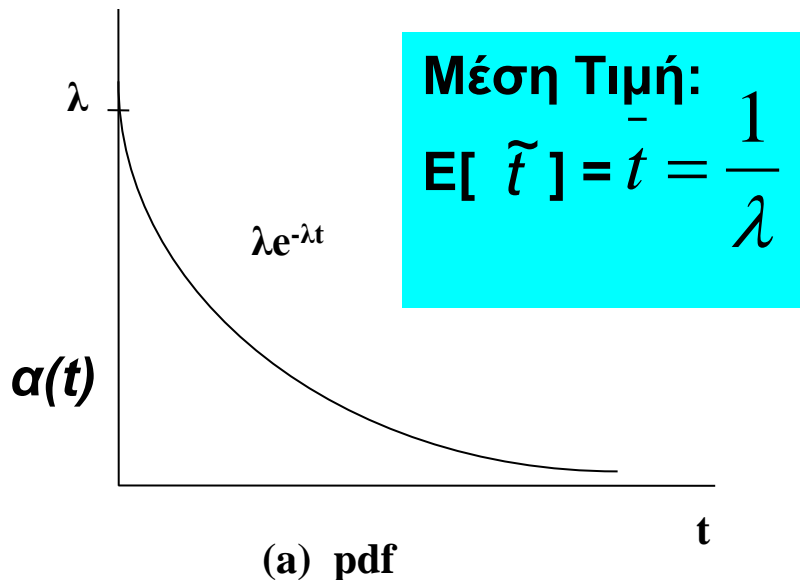
Poisson αφίξεις → Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ αφίξεων

$$P_{\kappa}(t) = \frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda t}$$

- \tilde{t} = TM για το χρόνο μεταξύ αφίξεων, με PDF $A(t)$ και pdf $\alpha(t)$

$$A(t) = 1 - P[\tilde{t} > t] = 1 - \overbrace{P_0(t)}^{\text{Poisson}} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{PDF Εκθετικής})$$

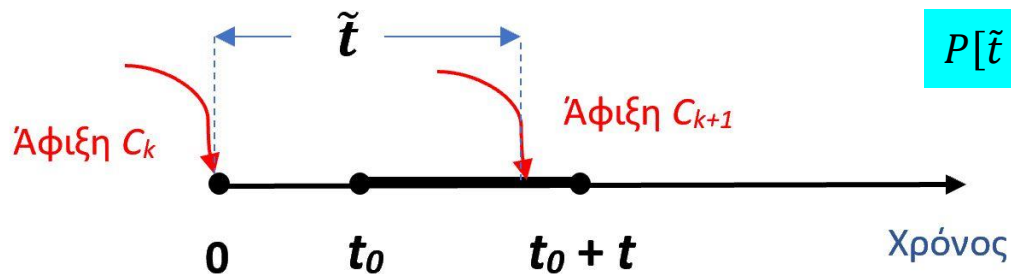
$$\text{Παράγωγος ως προς } t: \quad \alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{pdf Εκθετικής})$$



Η εκθετική κατανομή

Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής

Έστω ότι γίνεται μια άφιξη τη χρονική στιγμή 0 . Τώρα, έστω ότι πέρασαν t_0 δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των οποίων δεν έγινε άφιξη. Αν αυτή τη στιγμή t_0 ρωτήσουμε «ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να γίνει μέσα στα επόμενα t δευτερόλεπτα από τώρα», η απάντηση θα είναι:



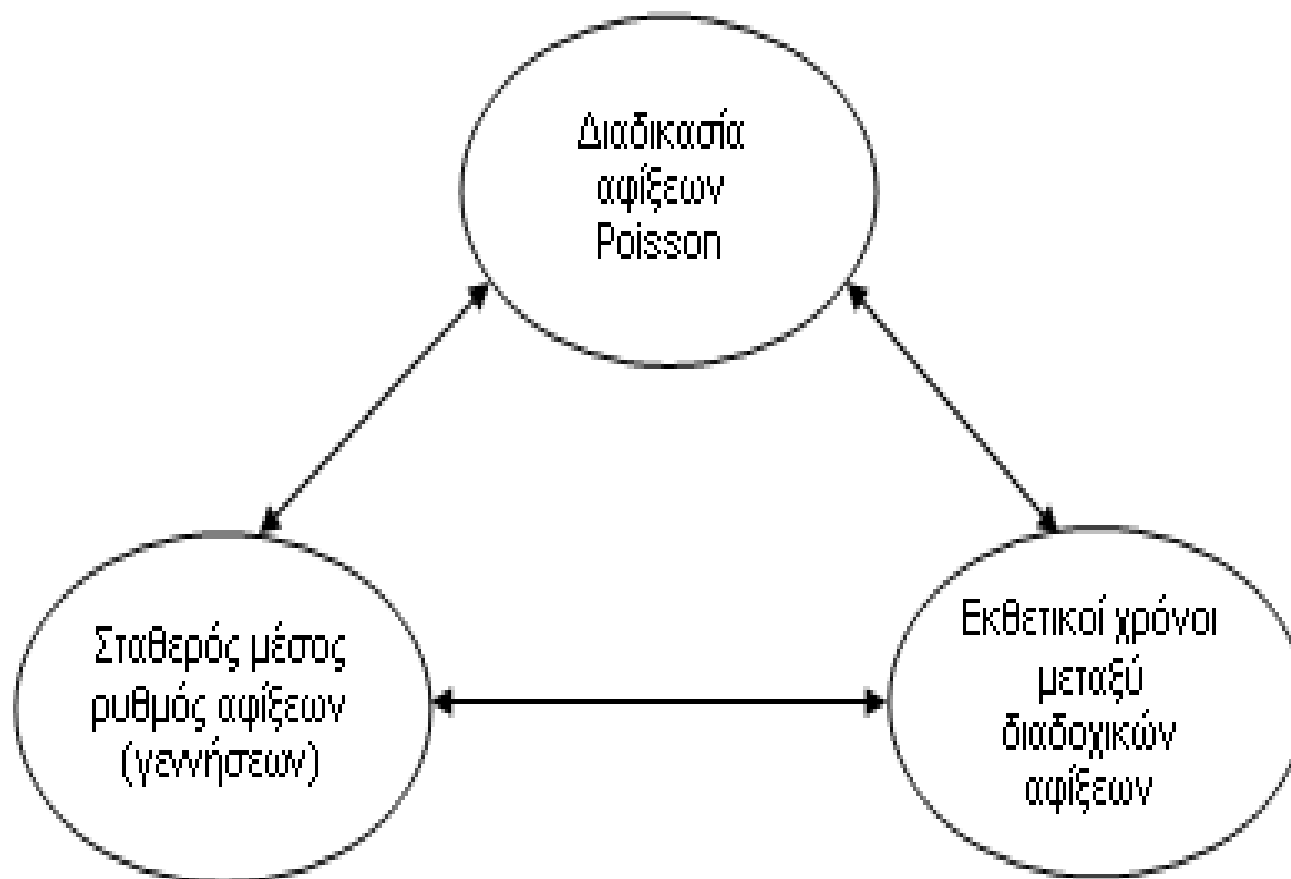
$$P[\tilde{t} \leq t] = A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{P[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]} = \frac{P[\tilde{t} \leq t + t_0] - P[\tilde{t} \leq t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]}$$

$$\iff P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} \iff$$

$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = 1 - e^{-\lambda t} \iff P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = P[\tilde{t} \leq t]$$

Σχέσεις



Το κλασικό Σύστημα Αναμονής

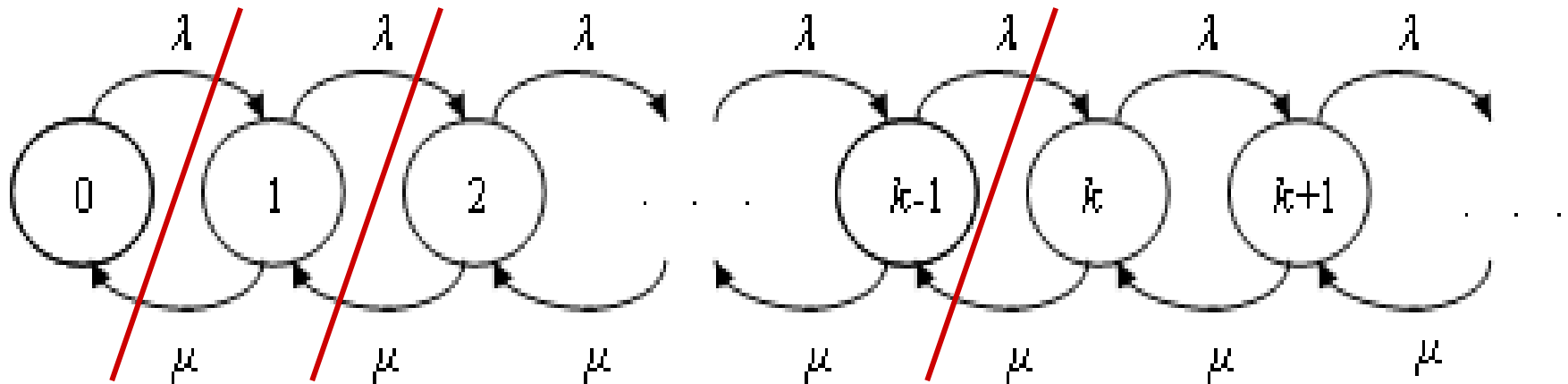
M/M/1

- *Εκθετική* κατανομή της διαδικασίας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- *Εκθετική* κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης
- Ένας εξυπηρετητής
- Άπειρο μήκος ουράς
- Αλυσίδα Markov Γεννήσεων – Θανάτων
- Με τη συνηθισμένη παραδοχή ότι οι *ρυθμοί* αφίξεων και εξυπηρέτησης δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός παρόντων πελατών), ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Το Σύστημα Αναμονής $M/M/1$ (συνέχεια)



Διάγραμμα καταστάσεων - ρυθμών μεταβάσεων για το σύστημα $M/M/1$.

Για τη λύση:

$$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$$

$$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$$

:

$$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$$

:

και $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Λύση συστήματος $M/M/1$

- Χρησιμοποίηση (G/G/1):

$$\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Συνθήκη σταθερότητας: $0 < \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

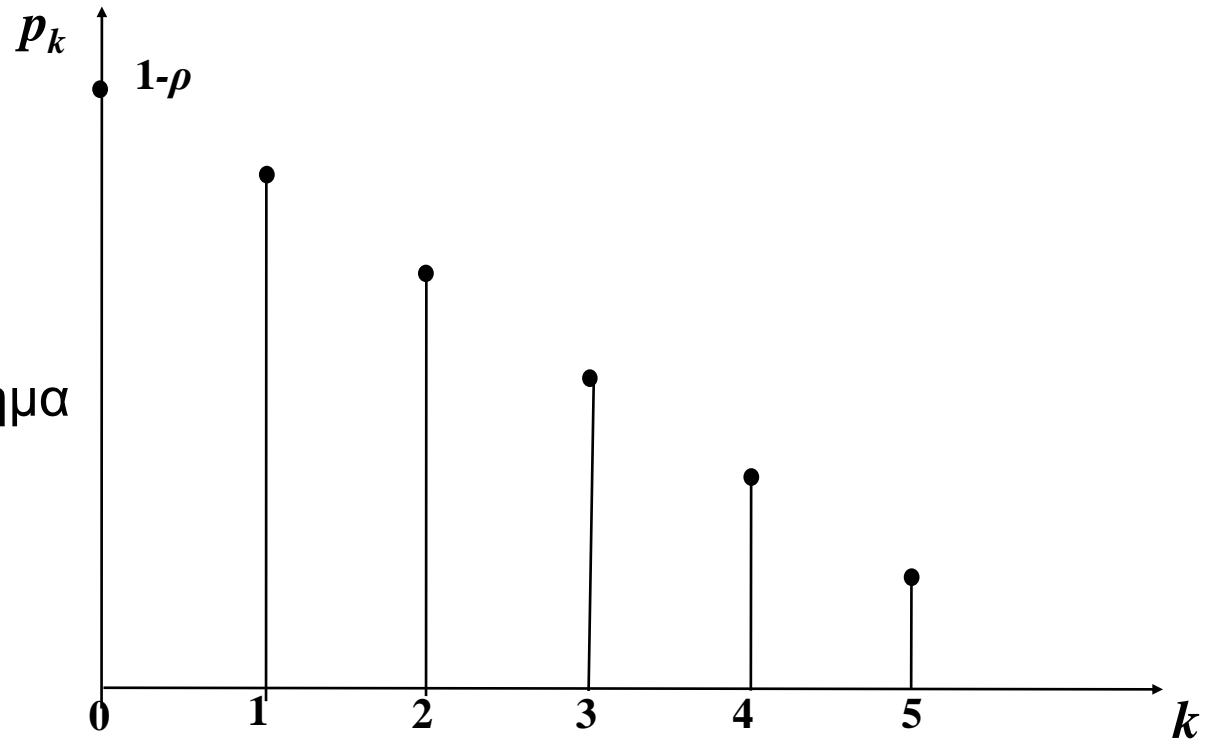
- Από τη γενική λύση των διαδικασιών Γ-Θ (ή την προσέγγιση της προηγούμενης διαφάνειας):

$$p_k = (1 - \rho) \cdot \rho^k \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Περιέχεται το: $p_0 = 1 - \rho$

Λύση συστήματος $M/M/1$ (συν)

- Τα p_k ακολουθούν τη Γεωμετρική Κατανομή
- Εξαρτώνται από τα λ και μ , μόνο μέσω του λόγου ΤΟΥΣ ρ

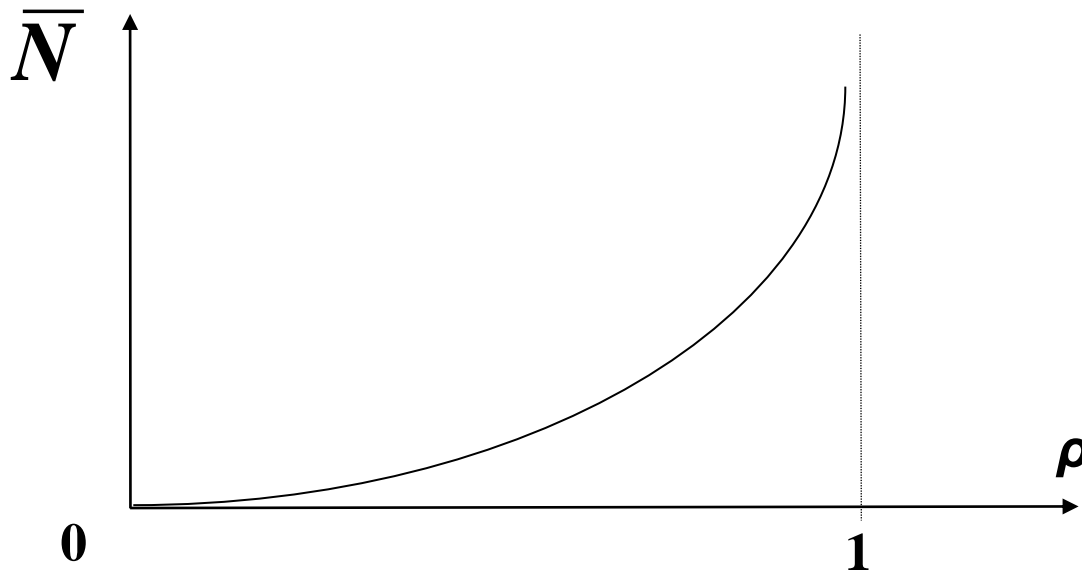


Τα p_k στο σύστημα $M/M/1$.

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

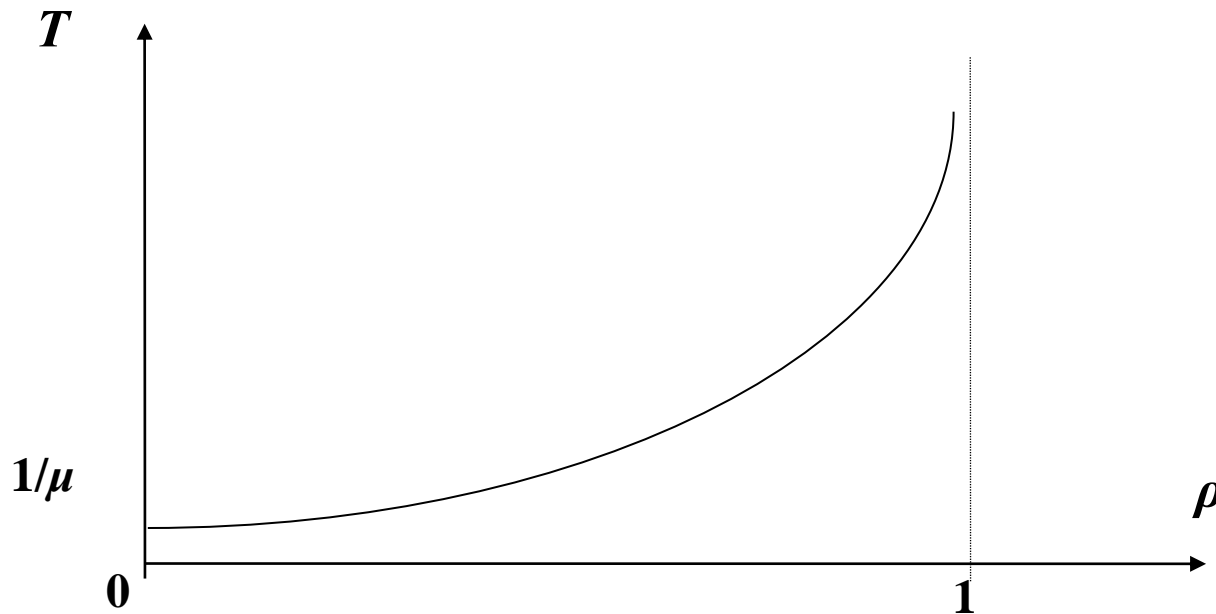


Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα
(*Response Time*)

Με χρήση του *Νόμου του Little*:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$



Μετρικές απόδοσης στο $M/M/1$ (συν.)

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu \cdot (1 - \rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- Πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον n πελάτες στο σύστημα

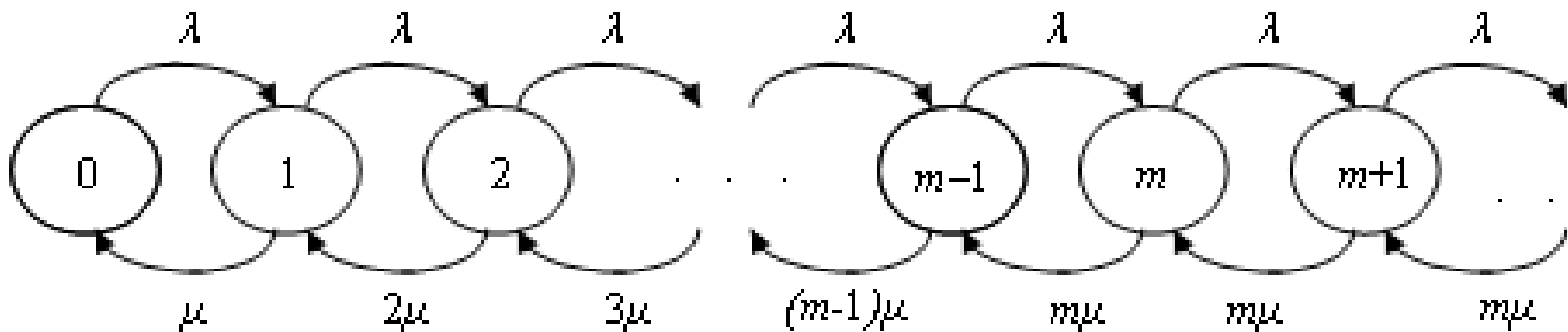
$$P_{(n)} = \text{Prob}[n \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$$

$$P_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = (1 - \rho) \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \rho^n \frac{1}{1 - \rho} = \rho^n$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/m$

- m ίδιοι εξυπηρετητές
- Ο καθένας με ρυθμό εξυπηρέτησης μ
- Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, ίδια με του $M/M/1$
- $\lambda_k = \lambda$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

- $$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ m\mu & \text{για } m \leq k \end{cases}$$



Το σύστημα αναμονής $M/M/m$ (συν)

■ Χρησιμοποίηση

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Συνθήκη Σταθερότητας

$$0 < \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

■ Λύση μόνιμης κατάστασης

$$P_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!} & \text{για } 1 \leq k \leq m \\ p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} & \text{για } k \geq m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$

- Πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά ένας πελάτης:

$\Pi = Prob[m \text{ ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα}]$

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} = p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m\rho + \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

Μετρικές απόδοσης στο $M/M/m$ (συν)

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (response time)

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\Pi}{m(1-\rho)} \right) \quad (\text{N. Little})$$

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\Pi}{m\mu(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - m\rho = \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

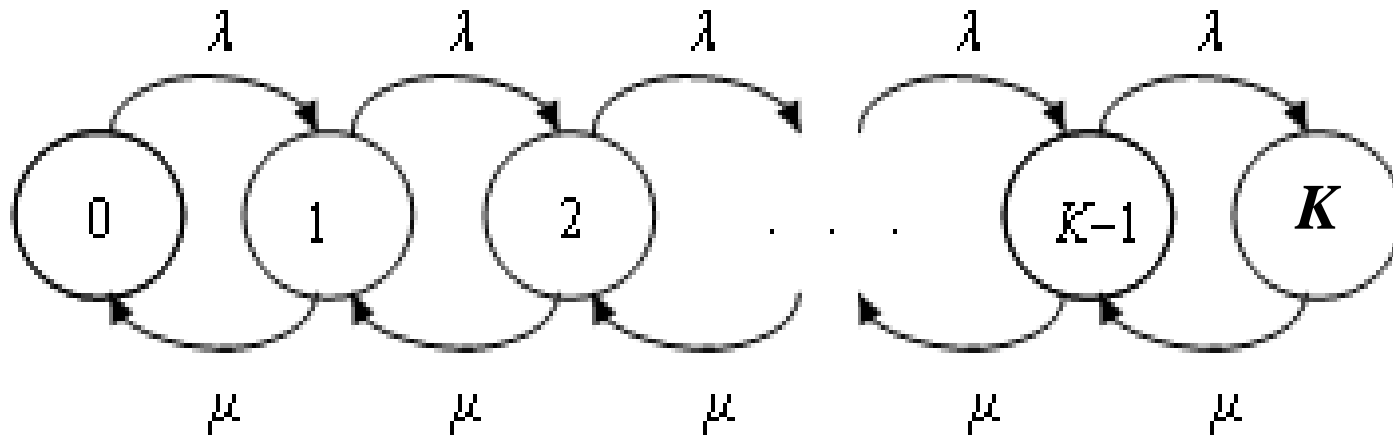
Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$

- Ίδια χαρακτηριστικά με το $M/M/1$, αλλά περιορισμένη χωρητικότητα σε πελάτες.
- Στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ K πελάτες (στην ουρά και στον εξυπηρετητή).
- Πελάτες που φθάνουν και βρίσκουν γεμάτο το σύστημα, χάνονται.
- Οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης του $M/M/1/K$:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{για } 0 \leq k < K \\ 0 & \text{για } k \geq K \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & \text{για } 1 \leq k \leq K \\ 0 & \text{για } k > K \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)



■ Λύση συστήματος

$$P_k = \begin{cases} \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{για } 0 \leq k \leq K \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

ΜΕΤΡΙΚΕΣ

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^K k p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \sum_{k=2}^K (k-1) p_k = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - (\lambda/\mu) \cdot \frac{1 + K(\lambda/\mu)^K}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Το σύστημα αναμονής $M/M/1/K$ (συν)

■ Παράδειγμα: Το μοντέλο μιας τηλεφωνικής συσκευής χωρίς κράτηση κλήσεων (παλιό αναλογικό σύστημα):

$M/M/1/1$

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 0 \\ \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu} & \text{για } k = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

p_0 : Πιθανότητα να μιλήσει, κάποιος που καλεί

p_1 : Πιθανότητα να βρει κατειλημμένη τη συσκευή, κάποιος που καλεί

λ : Μέσος ρυθμός με τον οποίο γίνονται κλήσεις στη συσκευή

$\bar{x} = 1/\mu$: Μέση χρονική διάρκεια μιας συνομιλίας