

Ασκήσεις – Μέρος Β

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών συστημάτων

Γιάννης Γαροφαλάκης

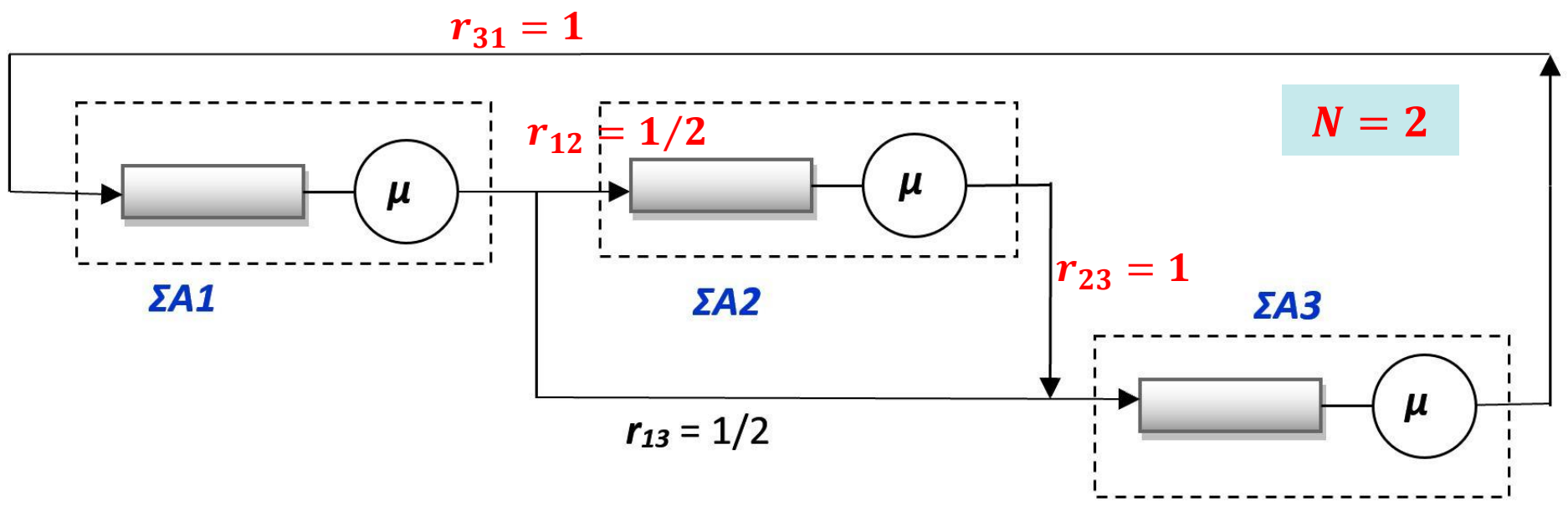
Καθηγητής

Άσκηση 1: Κλειστά δίκτυα συστημάτων αναμονής

Δίνεται το παρακάτω κλειστό δίκτυο τριών Συστημάτων Αναμονής $\Sigma A1$, $\Sigma A2$, $\Sigma A3$, στο οποίο υπάρχουν $N = 2$ εργασίες. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές, ενώ όλες οι ουρές έχουν πρακτικά άπειρο μήκος.

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Buzen, απαντήστε στα παρακάτω:

- Παρουσιάστε τη λύση του δικτύου P_{n_1, n_2, n_3} στη μόνιμη κατάσταση.
- Ποιο από τα τρία ΣA είναι σημείο συμφόρησης (bottleneck) του δικτύου και γιατί;
- Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκονται όλες οι εργασίες στο $\Sigma A1$ και ποια η πιθανότητα να είναι όλες στο $\Sigma A2$;
- Ποια είναι η πιθανότητα το $\Sigma A3$ να έχει 1 εργασία;
- Απαντήστε στα παραπάνω ερωτήματα (a), (b), (c), (d) αν υπάρχει μόνο μια εργασία στο δίκτυο ($N = 1$ εργασία). Πως αξιοποιείτε τη διαδικασία επίλυσης που χρησιμοποιήσατε για $N = 2$;
- Απαντήστε στο ερώτημα (e) χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, και όχι τον αλγόριθμο του Buzen. Επιβεβαιώστε ότι συμφωνούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (e) και (f).



Απαντήσεις (1)

a) Η λύση δίνεται από τον γενικό τύπο:

$$p_{\bar{n}} = p_{n_1, n_2, \dots, n_M} = \frac{1}{G(N)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_M^{n_M}$$

Δηλαδή
$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}$$

όπου $n_1 + n_2 + n_3 = N = 2$ και ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι σχετικές χρησιμοποιήσεις των ΣΑ1, ΣΑ2, ΣΑ3 αντίστοιχα.

ΒΗΜΑ 1:

Υπολογισμός των ρ_1, ρ_2, ρ_3 από τις Εξισώσεις:
$$\mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^M \mu_j r_{ji} \rho_j$$

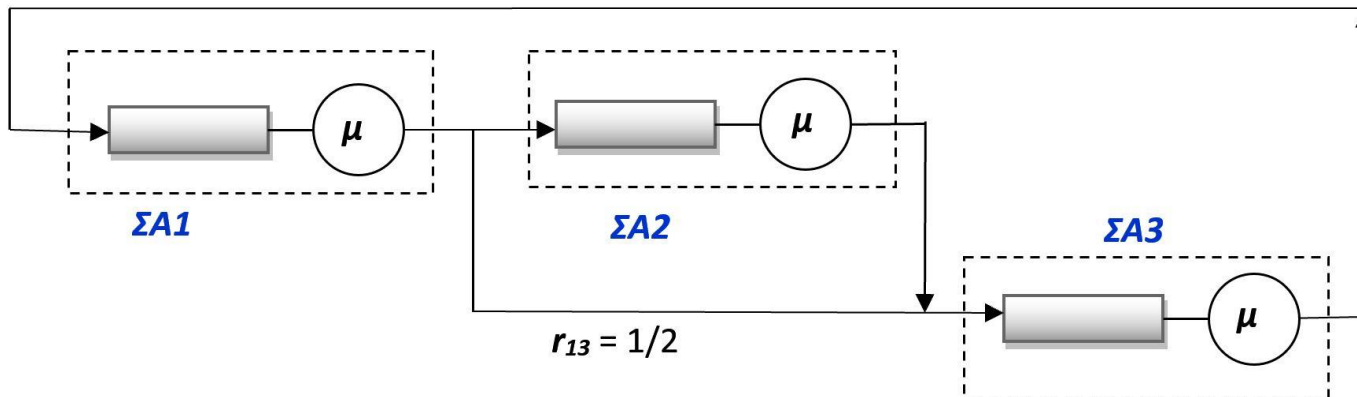
Θα θέσουμε κάποιο $\rho_i = 1$ για να βρούμε τα υπόλοιπα σε σχέση με αυτό.

Απαντήσεις (2)

Δηλαδή, θα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \right\}$$

Θέτοντας $\rho_1 = 1 = \rho_3$ παίρνουμε $\rho_2 = 1/2$.



Απαντήσεις (3)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1,5$	$G(1) = g_3(1) = 2,5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1,75$	$G(2) = g_3(2) = 4,25$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3} \Rightarrow$$

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (1)$$

Απαντήσεις (4)

- b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα ΣΑ1 και ΣΑ3 είναι bottlenecks, αφού:

$$\rho_1 = 1 = \rho_3 > \rho_2 = 1/2$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$U_1 = U_3 = 1 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = \frac{2,5}{4,25} = \mathbf{0,588} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{4,25} = \mathbf{0,294}$$

που επιβεβαιώνουν ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

- c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$

$$P_{2,0,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,235} \quad \text{και} \quad P_{0,2,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{0,0588}$$

Απαντήσεις (5)

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P_{1,0,1} + P_{0,1,1} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,353$$

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $N = 1$:

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho_3 = 1$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 1$	$g_2(1) = 1,5$	$G(1) = g_3(1) = 2,5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 1$	$g_2(2) = 1,75$	$G(2) = g_3(2) = 4,25$

Συνεπώς: $G(1) = 2,5$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\rho_1 = 1 = \rho_3$ και $\rho_2 = 1/2$

Απαντήσεις (6)

e) (a) Η λύση:
$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad \text{με} \quad n_1 + n_2 + n_3 = 1$$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$$U_1 = U_3 = 1 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = \frac{1}{2,5} = \mathbf{0,4} \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2,5} = \mathbf{0,2}$$

Φυσικά είναι μικρότερες από την περίπτωση με $N = 2$ όπου είχαμε $U_1 = U_3 = 0,588$ και $U_2 = 0,294$ (γιατί;)

(c)
$$P_{1,0,0} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,4} \quad \text{και} \quad P_{0,1,0} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \mathbf{0,2}$$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:
$$P_{0,0,1} = \frac{1}{2,5} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \mathbf{0,4}$$

Αν θέλαμε επιπλέον:

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}$$

- Μέσο αριθμό εργασιών σε ένα σταθμό (για $N = 2$):

$$E[n_1] = 1 \cdot (P_{1,1,0} + P_{1,0,1}) + 2 \cdot P_{2,0,0} = \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \frac{1}{4,25} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3,5}{4,25} \Rightarrow E[n_1] = 0,8235 \text{ εργασίες}$$

- Throughput ενός σταθμού (για $N = 2$):

$\lambda_1 = \mu_1 \cdot U_1 = \mu \cdot 0,588$.Πλέον μας χρειάζεται η τιμή του μ .

Π.χ. για $\mu = 1$ εργ/sec: $\lambda_1 = 1 \cdot 0,588 \Rightarrow \lambda_1 = 0,588$ εργ/sec

- Response Time σε έναν σταθμό (για $N = 2$):

$$\text{N. Little: } E[n_1] = \lambda_1 \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = E[n_1]/\lambda_1 = 0,8235/0,588 \Rightarrow T_1 = 1,4 \text{ sec}$$

- Response Time συνολικό (για $N = 2$):

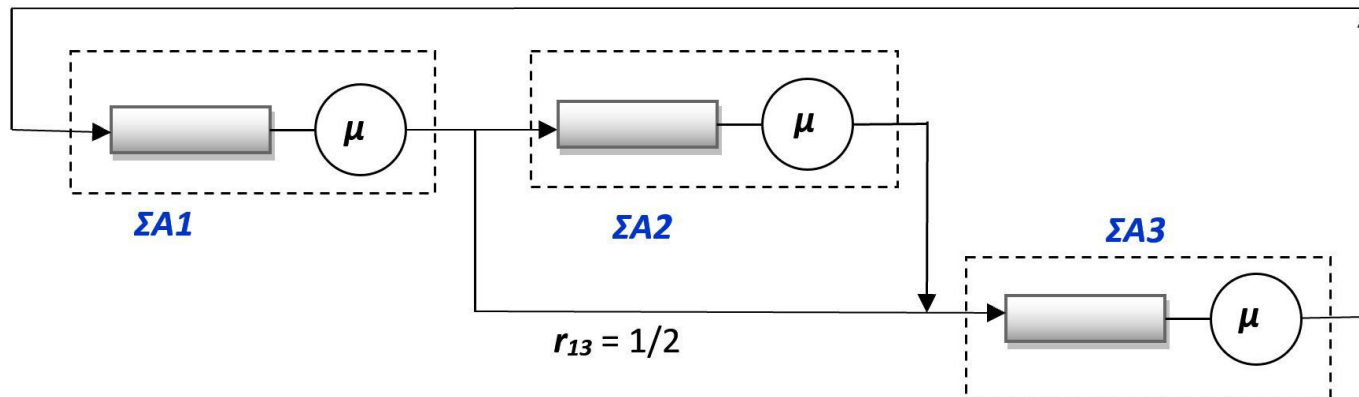
$$\text{N. Little στο δίκτυο: } N = \lambda_1 \cdot T \Rightarrow T = 2/0,588 \Rightarrow T = 3,4 \text{ sec}$$

$$\text{Εναλλακτικά: } T = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 + T_3) + \frac{1}{2}T_3 = \dots = 3,4 \text{ sec}$$

Εναλλακτικά: Διαφορετική επιλογή $\rho_i = 1$

$$\left. \begin{aligned} \mu\rho_1 &= \mu\rho_3 \\ \mu\rho_2 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 \\ \mu\rho_3 &= \frac{1}{2}\mu\rho_1 + \mu\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho_3 \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}\rho_1 \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \right\}$$

Θέτοντας $\rho_2 = 1$ παίρνουμε $\rho_1 = \rho_3 = 2$.



Εναλλακτικά (2)

ΒΗΜΑ 2: Υπολογισμός του $G(2)$

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 2$	$\rho_2 = 1$	$\rho_3 = 2$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$G(2) = g_3(2) = 17$

$$g_m(n) = g_{m-1}(n) + \rho_m \cdot g_m(n-1)$$

Η λύση του δικτύου:

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{G(2)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}$$

\Rightarrow

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3} \quad (1)$$

Εναλλακτικά (3)

- b) Ήδη με δεδομένες τις σχετικές χρησιμοποιήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα **ΣΑ1 και ΣΑ3** είναι **bottlenecks**, αφού

$$\rho_1 = 2 = \rho_3 > \rho_2 = 1$$

Οι απόλυτες τιμές της χρησιμοποίησης στα τρία συστήματα δίνονται από τη σχέση: $U_i = P(n_i \geq 1) = \rho_i \frac{G(N-1)}{G(N)}$

Δηλαδή:

$$U_1 = U_3 = 2 \cdot \frac{G(1)}{G(2)} = 2 \cdot \frac{5}{17} = \mathbf{0,588} \quad \text{και} \quad U_2 = 1 \cdot \frac{5}{17} = \mathbf{0,294}$$

ίδια αποτελέσματα φυσικά...

- c) Εφαρμόζοντας τη σχέση (1): $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}$

$$P_{2,0,0} = \frac{1}{17} \cdot 2^2 \cdot 2^0 = \mathbf{0,235}$$

$$P_{0,2,0} = \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \mathbf{0,0588}$$

ίδια....

Εναλλακτικά (4)

$$P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{17} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3} \quad (1)$$

d) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P_{1,0,1} + P_{0,1,1} = \frac{1}{17} \cdot 2^1 \cdot 2^1 + \frac{1}{17} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = 0,353 \text{ ίδια...}$$

e) Έχοντας υλοποιήσει τον αλγόριθμο του Buzen, πήραμε όλα τα $G(N)$ για $N \leq 2$, συνεπώς και για $N = 1$:

Σταθμοί Πελάτες	$\rho_1 = 2$	$\rho_2 = 1$	$\rho_3 = 2$
0	$g_1(0) = 1$	$g_2(0) = 1$	$G(0) = g_3(0) = 1$
1	$g_1(1) = \rho_1 = 2$	$g_2(1) = 3$	$G(1) = g_3(1) = 5$
2	$g_1(2) = \rho_1^2 = 4$	$g_2(2) = 7$	$G(2) = g_3(2) = 17$

Συνεπώς: $G(1) = 5$

ενώ τα ρ_i μένουν τα ίδια: $\rho_1 = 2 = \rho_3$ και $\rho_2 = 1$

Εναλλακτικά (5)

e) (a) Η λύση: $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{1}{5} \cdot 2^{n_1} \cdot 2^{n_3}$ με $n_1 + n_2 + n_3 = 1$

(b) Τα ρ_i είναι ίδια, οπότε και το συμπέρασμα είναι ίδιο:

Τα **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

Οι απόλυτες χρησιμοποιήσεις:

$$U_1 = U_3 = 2 \cdot \frac{G(0)}{G(1)} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{0,4} \quad \text{και} \quad U_2 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$$

ίδιες.

(c) $P_{1,0,0} = \frac{1}{5} \cdot 2^1 \cdot 2^0 = \mathbf{0,4}$ και $P_{0,1,0} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \mathbf{0,2}$

(d) Η ζητούμενη πιθανότητα: $P_{0,0,1} = \frac{1}{5} \cdot 2^0 \cdot 2^1 = \mathbf{0,4}$

ίδια...

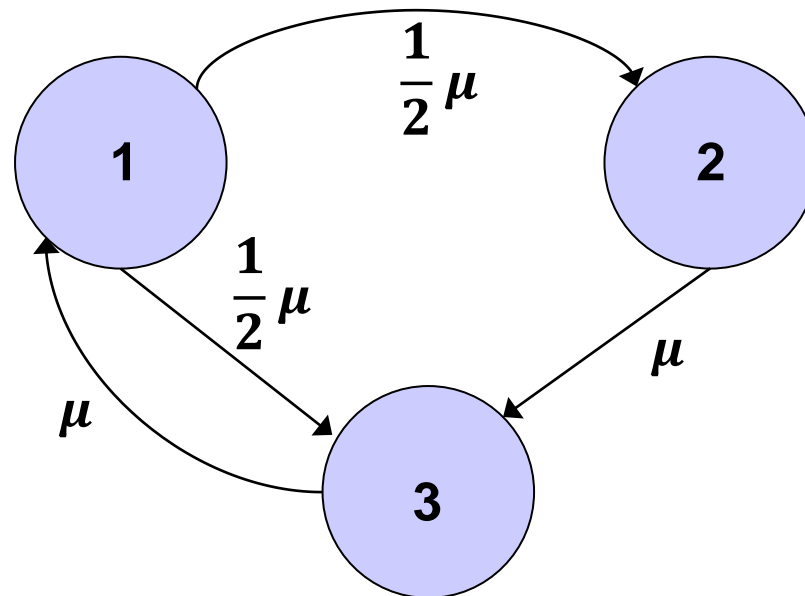
Απαντήσεις (7)

f) Θα έχουμε 3 καταστάσεις:

- **1** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0)$
- **2** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 0)$
- **3** που αντιστοιχεί στην κατάσταση δικτύου $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$

Δηλαδή η κατάσταση i αντιστοιχεί στην παρουσία του (μοναδικού) πελάτη στο ΣA_i για $i = 1, 2, 3$.

- Το διάγραμμα καταστάσεων – ρυθμών μεταβάσεων της αλυσίδας Markov συνεχούς χρόνου, είναι το εξής:



Απαντήσεις (8)

- Είναι μια *εργοδική* αλυσίδα.
- Υπάρχουν οι *πιθανότητες μόνιμης κατάστασης*.
- Εφαρμόζοντας το *Νόμο ισορροπίας της ροής πιθανότητας*:

$$\text{Κατάσταση 1: } p_1 \cdot \mu = p_3 \cdot \mu \quad (2)$$

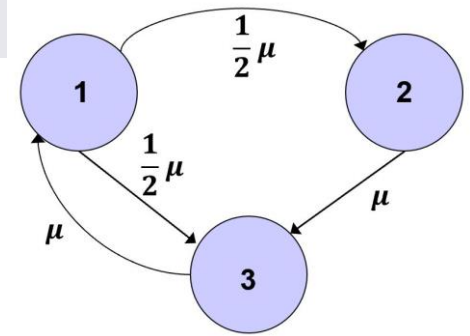
$$\text{Κατάσταση 2: } p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2} \mu \quad (3)$$

$$\text{Κατάσταση 3: } p_3 \cdot \mu = p_1 \cdot \frac{1}{2} \mu + p_2 \cdot \mu \quad (4)$$

$$\text{και η προφανής σχέση: } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (5)$$

- a) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2), (3), (5), παίρνουμε τη λύση:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = p_3 = 0,4 \\ p_2 = 0,2 \end{array} \right\} (6)$$



Απαντήσεις (9)

- Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης που βρήκαμε παραπάνω, έχουν την εξής αντιστοίχιση με τα προηγούμενα:

$$p_1 = P_{1,0,0} = 0,4 \quad p_2 = P_{0,1,0} = 0,2 \quad p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$$

- b) Προφανώς: $U_1 = p_1 = 0,4$ $U_2 = p_2 = 0,2$ $U_3 = p_3 = 0,4$
και **ΣΑ1** και **ΣΑ3** είναι τα **bottlenecks**.

c) $p_1 = P_{1,0,0} = 0,4$ $p_2 = P_{0,1,0} = 0,2$

d) $p_3 = P_{0,0,1} = 0,4$

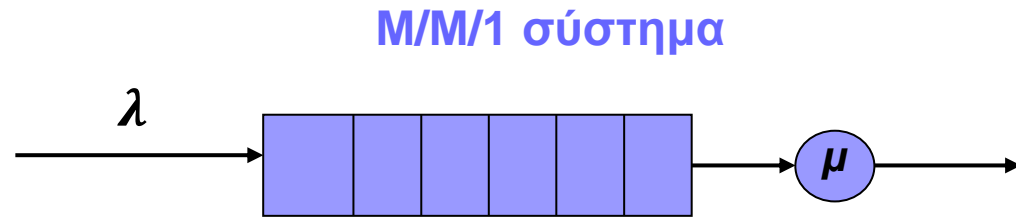
Άσκηση 2: Απλά συστήματα αναμονής

Σε έναν δικτυακό εκτυπωτή, οι αφίξεις εργασιών είναι Poisson, με μέσο ρυθμό 8 εργασίες/ώρα. Η διάρκεια μιας εκτύπωσης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, με μέση τιμή τα 2.5 λεπτά/εργασία. Θεωρούμε ότι μπορούν να περιμένουν στο buffer του εκτυπωτή, όσες εργασίες φθάσουν.

- Ποιος είναι ο μέσος χρόνος απόκρισης T μιας εργασίας στον εκτυπωτή;
 - Ποιος είναι ο μέσος αριθμός εργασιών N_q που περιμένουν στο buffer του εκτυπωτή;
 - Θεωρήστε ότι ο χρόνος εκτύπωσης είναι σταθερός (και όχι εκθετικός), ίσος με 2.5 λεπτά/εργασία. Στην περίπτωση αυτή, ποιος είναι ο μέσος χρόνος απόκρισης T και ο μέσος αριθμός εργασιών N_q που περιμένουν στο buffer; Συγκρίνετε και σχολιάστε με τα αποτελέσματα των (a) και (b).
- **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Στο σύστημα αναμονής M/D/1, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, είναι:

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

Απαντήσεις (1)



a) Για τον εκτυπωτή αυτόν, που είναι M/M/1, θέλουμε το **T** .

Δίνονται:

$$\lambda = 8 \text{ εργασίες/h} = 8/60 \text{ εργ/μιν} = 0,1333 \text{ εργ/μιν.}$$

$$\bar{x} = 1/\mu = 2,5 \text{ min/εργ} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2,5} \text{ εργ/μιν} = 0,4 \text{ εργ/μιν.}$$

Οπότε:

$$\rho = \lambda/\mu = \frac{0,1333}{0,4} = 0,333 = 1/3$$

$$\text{και } \mathbf{T} = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{2,5}{2/3} = \mathbf{3,75 \text{ min}}$$

Απαντήσεις (2)

b) $\bar{N}_q = \bar{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6} = \mathbf{0,166}$ εργασίες (Μ.Ο.) στο buffer.

c) Τώρα το σύστημα είναι **M/D/1**. Οι παραπάνω τύποι για T και \bar{N}_q δεν ισχύουν πλέον, αλλά τα λ, μ, ρ παραμένουν ίδια.

Το T' θα το πάρουμε από το

N. Little: $\bar{N}' = \lambda \cdot T' \Rightarrow T' = \bar{N}' / \lambda$ (1)

M/D/1: $\bar{N}' = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{3} + \frac{1/9}{4/3} = \frac{15}{36} = 0,4167$ εργασίες (2)

Οπότε, από την (1) με χρήση της (2):

$$T' = \bar{N}' / \lambda = 0,4167 / 0,133 \Rightarrow \mathbf{T' = 3,133 \text{ min}}$$

και $\bar{N}_q' = \bar{N}' - \rho = 0,4167 - 0,3333 \Rightarrow \mathbf{\bar{N}_q' = 0,0834}$ εργασίες

Σχόλιο: Τα T και \bar{N}_q είναι σημαντικά μικρότερα στο M/D/1 από ότι στο M/M/1. Μάλιστα, $\bar{N}_q' = 1/2 \cdot \bar{N}_q$ (!). Οφείλεται στη μικρότερη αβεβαιότητα/διακύμανση που έχει το M/D/1...

Άσκηση 3: Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

Ένα πρόγραμμα έχει τρεις τύπους εντολών: *Εντολές CPU* (τύπος 1), *Εντολές διαχείρισης δεδομένων* (τύπος 2) και *Εντολές αλληλεπίδρασης με το χρήστη* (τύπος 3). Μετά από ανάλυση του προγράμματος, διαπιστώνουμε ότι μία εντολή τύπου 1 ακολουθείται από μία ακόμα εντολή τύπου 1 με πιθανότητα 0.7, ενώ με πιθανότητα 0.2 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 2. Αντίστοιχα, μία εντολή τύπου 2 ακολουθείται από μία ακόμα εντολή τύπου 2 με πιθανότητα 0.1, ενώ με πιθανότητα 0.8 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 1. Τέλος, μία εντολή τύπου 3 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 1 με πιθανότητα 0.9 και με πιθανότητα 0.1 ακολουθείται από μία εντολή τύπου 2.

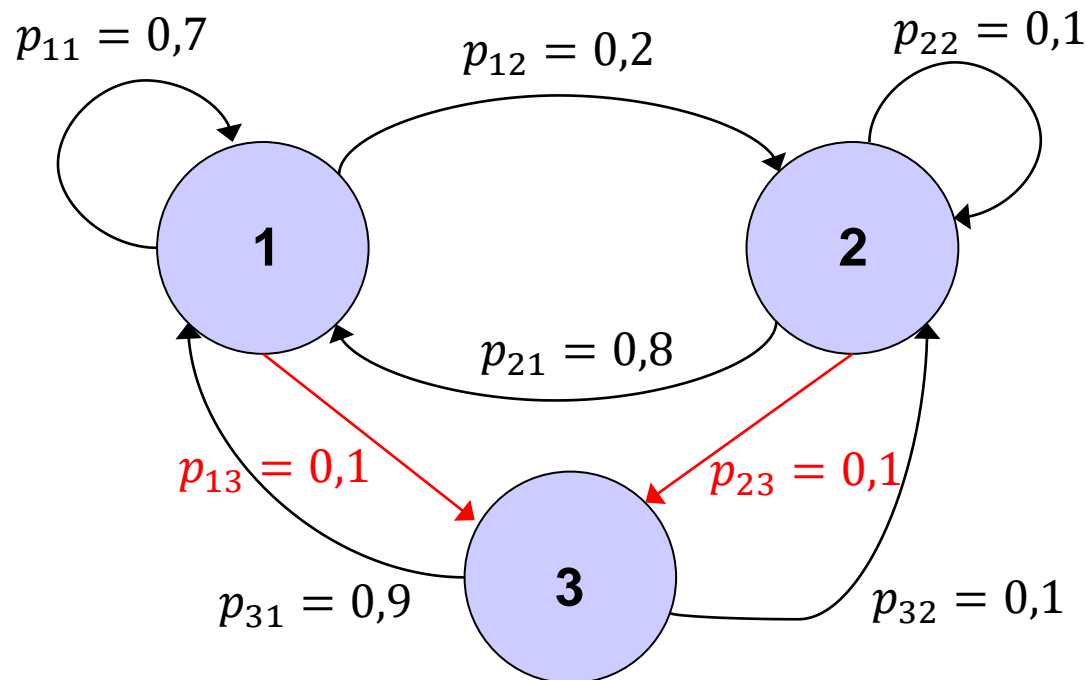
- a) Παρουσιάστε το *διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων* της αλυσίδας Markov διακριτού χρόνου που είναι μοντέλο του συστήματος.
- b) Ποιο είναι το ποσοστό των *εντολών CPU* και ποιο το ποσοστό των *εντολών αλληλεπίδρασης με το χρήστη* που παρατηρούνται κατά την εκτέλεση του προγράμματος;
- c) Κατά μέσο όρο, πόσες εντολές τύπου 1 ή/και 3 παρεμβάλλονται μεταξύ δύο διαδοχικών εντολών τύπου 2;

Απαντήσεις (1)

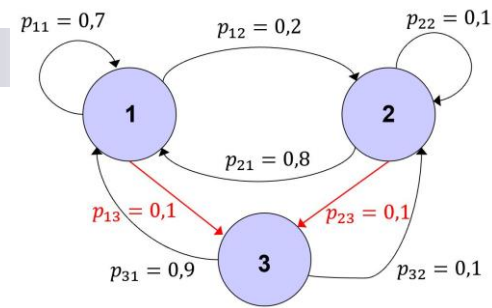
a) Θα έχουμε 3 καταστάσεις:

- Κατάσταση **1** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών CPU*
- Κατάσταση **2** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών διαχείρισης δεδομένων*
- Κατάσταση **3** που αντιστοιχεί στην εκτέλεση *Εντολών αλληλεπίδρασης με το χρήστη*

■ Το διάγραμμα καταστάσεων – πιθανοτήτων μεταβάσεων είναι το εξής:



Απαντήσεις (2)



b) Εξισώσεις μόνιμης κατάστασης:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_{11} \cdot \pi_1 + p_{21} \cdot \pi_2 + p_{31} \cdot \pi_3 \Leftrightarrow \pi_1 = 0,7 \cdot \pi_1 + 0,8 \cdot \pi_2 + 0,9 \cdot \pi_3 \\ \pi_2 &= p_{12} \cdot \pi_1 + p_{22} \cdot \pi_2 + p_{32} \cdot \pi_3 \Leftrightarrow \pi_2 = 0,2 \cdot \pi_1 + 0,1 \cdot \pi_2 + 0,1 \cdot \pi_3 \\ \pi_3 &= p_{13} \cdot \pi_1 + p_{23} \cdot \pi_2 \Leftrightarrow \pi_3 = 0,1 \cdot \pi_1 + 0,1 \cdot \pi_2 \end{aligned} \quad (1)$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Χρησιμοποιώντας την 4^η και δύο από τις 1^η, 2^η, 3^η των εξισώσεων (1), παίρνουμε τη λύση:

$$\pi_1 = 0,7355$$

$$\pi_2 = 0,1736$$

$$\pi_3 = 0,091$$

c) Ισχύει:

$$M_2 = 1/\pi_2 = 1/0,1736 \Rightarrow M_2 = 5,76 \text{ εντολές}$$