ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων

Ενότητα 3: Μοντέλα Θεωρίας Αναμονής

Γαροφαλάκης Ιωάννης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχ/κών Η/Υ & Πληροφορικής

Σκοποί ενότητας

Κατά τη διάρκεια των καθημερινών μας συναλλαγών σε τράπεζες, υπηρεσίες, διόδια, κλπ «πελάτες» είμαστε εμείς και πόροι του συστήματος είναι συνήθως οι υπάλληλοι που μας εξυπηρετούν. Σε ένα πληροφοριακό σύστημα οι «πελάτες» είναι οι αιτήσεις χρήσης μιας CPU από ένα πρόγραμμα, τα πακέτα δεδομένων σε ένα δίκτυο και αντίστοιχα ως πόροι του συστήματος ο χρόνος της CPU, το κανάλι μετάδοσης των πακέτων κ.λ.π.

Προκειμένου να μελετήσουμε ένα σύστημα αναμονής, χρησιμοποιούμε μοντέλα αναμονής (queueing models), τα οποία είναι μαθηματικά μοντέλα. Η παρούσα ενότητα ασχολείται με την αναλυτική λύση των μοντέλων αναμονής. Τα θεωρητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό και τη θεωρία αναμονής (queueing theory).

Ορισμός συστημάτων αναμονής (1)

- **Συστήματα αναμονής** (Queueing Systems): Συστήματα στα οποία οι αφίξεις «πελατών» δημιουργούν απαιτήσεις εξυπηρέτησης από πόρους πεπερασμένης δυνατότητας εξυπηρέτησης.
- Σχηματίζονται «ουρές», όταν δημιουργούνται απαιτήσεις σύγχρονης χρησιμοποίησης πόρων.

Ορισμός συστημάτων αναμονής (2)

- Οι ουρές επηρεάζονται από τη μέση τιμή και τη στατιστική διακύμανση του ρυθμού αφίξεων.
  - Ανεξέλεγκτες ουρές όταν: μέση τιμή ρυθμού αφίξεων > μέγιστη δυνατότητα εξυπηρέτησης
  - Σχηματισμός ουρών λόγω στατιστικών διακυμάνσεων αφίξεων
- **Θεωρία αναμονής (Queueing Theory):** ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων, η απόδοση των οποίων επηρεάζεται από φαινόμενα αναμονής.

Φορτίο εργασίας συστημάτων αναμονής (Μη-εκτελέσιμο)

- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας* των *χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων* (Χ.Α.)

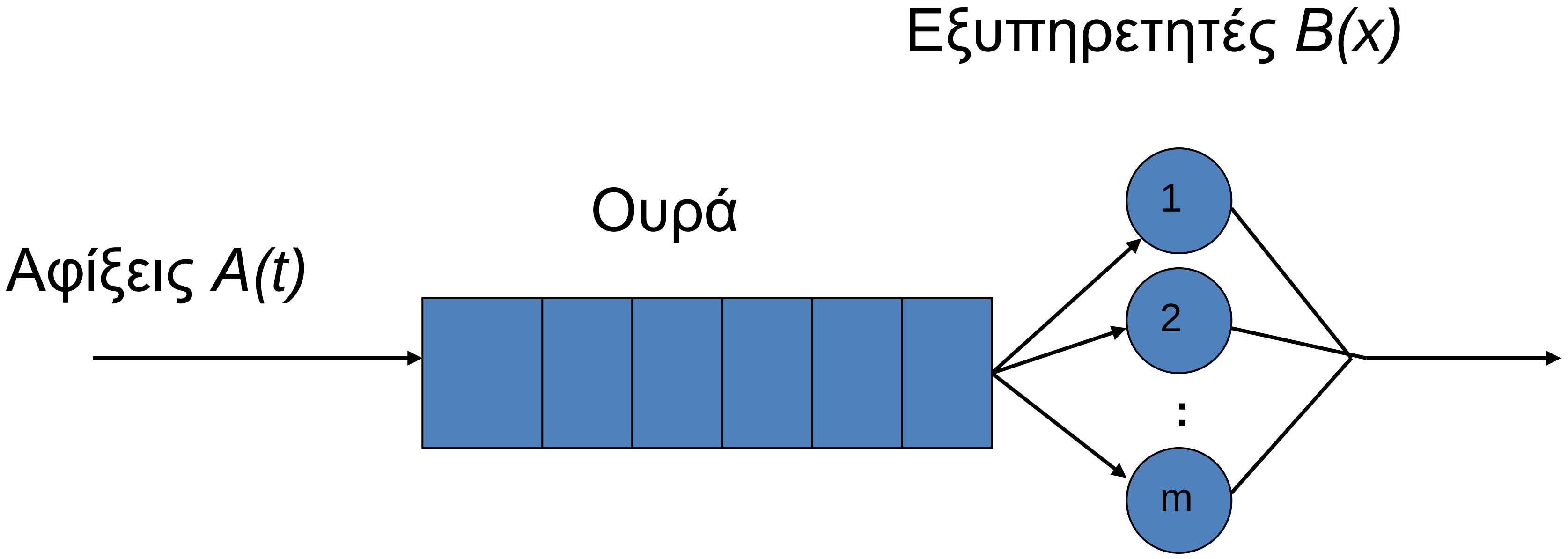
  $A(t)$ = Prob[χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων $\leq t$]

- *Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας* του *χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη* (Χ.Ε.)

  $B(x)$ = Prob[χρόνος εξυπηρέτησης $\leq x$]

- Συνήθως υποθέτουμε ότι οι παραπάνω **Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΔ)** συγκροτούνται από ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες **Τυχαίες Μεταβλητές (ΤΜ)**

Ένα Σύστημα Αναμονής



Άλλα μεγέθη περιγραφής του συστήματος

- *Αριθμός εξυπηρετητών* (servers) στο σύστημα *m*.
- *Χωρητικότητα* του συστήματος σε πελάτες *K* (default: *K* = ∞)
- *Πληθυσμός* υποψηφίων πελατών *M* (default: *M* = ∞)
- *Πολιτική εξυπηρέτησης*, δηλαδή ο τρόπος επιλογής πελατών από την ουρά για τον (τους) εξυπηρετητές. (default: FCFS ή FIFO)
- *Κλάσεις* πελατών (default: 1)
- *Ομάδες προτεραιότητας* πελατών (default: 1)
- *Διαθεσιμότητα* εξυπηρετητή (default: 100%)

Μετρικές απόδοσης

- *Χρόνος απόκρισης – response time* (συνολικός χρόνος στο σύστημα) για ένα πελάτη.
- *Χρόνος αναμονής* για ένα πελάτη.
- *Αριθμός πελατών* στο σύστημα.
- *Χρησιμοποίηση* (Utilization) του συστήματος.

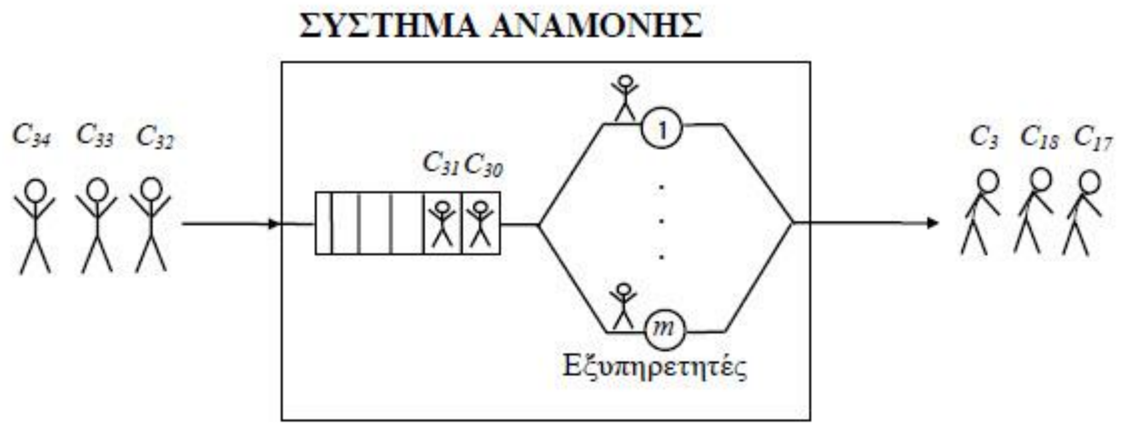
Συμβολισμός συστημάτων αναμονής

- *A/B/m*
  - A , B: Συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας Χ.Α και Χ.Ε αντίστοιχα. Εκφράζονται ως
    - *M* (για την εκθετική κατανομή).
    - *D* (για τη ντετερμινιστική [σταθερή] κατανομή).
    - *Er* (για την κατανομή Erlang r-βαθμίδων).
    - *G* (για ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)
  - m: αριθμός εξυπηρετητών
- *A/B/m/K/M*
  - *K* : η χωρητικότητα του συστήματος
  - *M* : το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών

όταν αυτά είναι διαφορετικά από ∞

Παράδειγμα: D/M/2//200

Αναπαράσταση συστήματος αναμονής



- *A(t), B(x)* : αυθαίρετα
- *m* εξυπηρετητές
- Αριθμούμε τους πελάτες με το δείκτη *n* και ορίζουμε C_n τον *n*-οστό πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (1)

- **Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων:**

  $\tau_n \equiv$ χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n

  $t_n \equiv$ χρόνος μεταξύ των αφίξεων των C_{n-1}, C_n

  $= \tau_n - \tau_{n-1}$ για n≥2 $(t_1 = \tau_1)$

  Prob[$t_n \le t$] = $A(t)$, δηλαδή το $A(t)$ είναι ανεξάρτητο του n

  $\bar{t}$ *μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων*

  Ρυθμός αφίξεων (arrival rate) των πελατών: $\lambda = \dfrac{1}{\bar{t}}$

- **Χρόνοι εξυπηρέτησης:**

  $x_n \equiv$ χρόνος εξυπηρέτησης του C_n

  Prob[$x_n \le x$] = $B(x)$

  $\bar{x}$: *μέσος χρόνος εξυπηρέτησης*

  Ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate) των πελατών : $\mu = \dfrac{1}{\bar{x}}$

Συμβολισμοί βασικών μεγεθών (2)

- **Χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:**

  $w_n \equiv$ *χρόνος αναμονής* (στην ουρά) του C_n.

  $W = \overline{w}$ *μέσος χρόνος αναμονής*

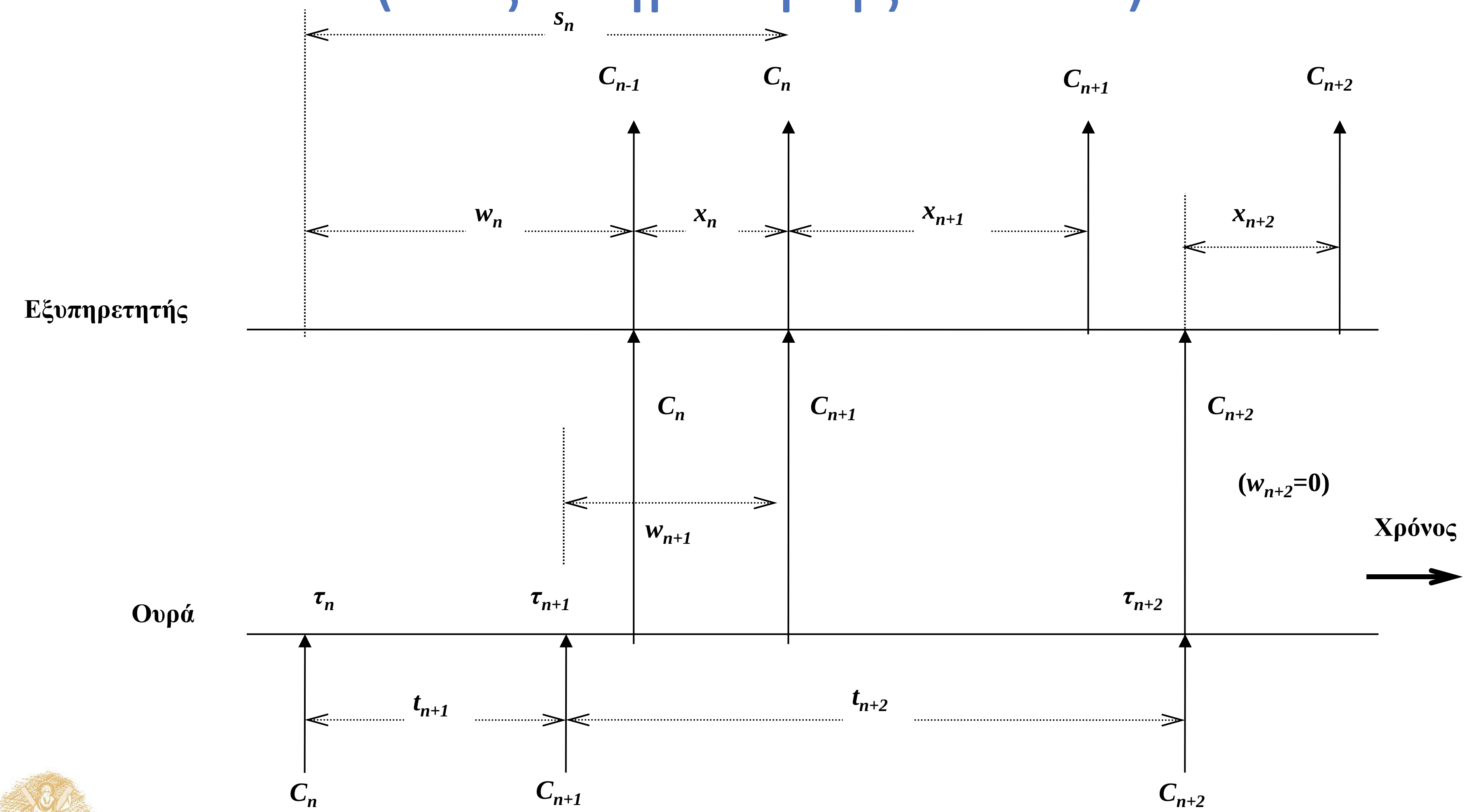
- **Συνολικός χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (χρόνος απόκρισης):**

  $s_n \equiv$ χρόνος συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) του C_n

  $= w_n + x_n$

  $T = W + \overline{x}$ *μέσος χρόνος συστήματος* ($T \equiv \overline{s}$)

Χρονικό Διάγραμμα Συστήματος Αναμονής (1 εξυπηρετητής – FCFS)



Νόμος του Little (1)

- Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ’ αυτό.

$$\overline{N} = \lambda \cdot T$$

- Για όρια του συστήματος μόνο στην ουρά

$$\overline{N}_q = \lambda \cdot W$$

- Για όρια συστήματος μόνο στον(-ους) εξυπηρετητή(-ές)

$$\overline{N}_s = \lambda \cdot \overline{x}$$

Νόμος του Little (2)

- *Διαισθητική απόδειξη*: ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα *βρει* μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών $\overline{N}$ που θα *υπάρχει* όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν $\lambda \cdot T$ πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

- Ο Νόμος δίνει μια χρήσιμη σχέση μεταξύ ορισμένων βασικών μεγεθών ενός συστήματος αναμονής, αλλά δεν αποτελεί «λύση» στο γενικό μας πρόβλημα: Ουσιαστικά συνδέει ένα γνωστό μέγεθος εισόδου (λ), με δύο άγνωστα μεγέθη ($\overline{N}$, T) τα οποία είναι μετρικές απόδοσης που θέλουμε να βρούμε.

Συντελεστής απασχόλησης

- Ο **συντελεστής απασχόλησης** ή **χρησιμοποίηση** *ρ*, ορίζεται ως ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται «δουλειά» στο σύστημα, προς το **μέγιστο** ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μπορεί να εκτελέσει αυτή τη «δουλειά». Δηλαδή για 1 εξυπηρετητή:

ρ = (μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών) x (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης) / 1

= $\rho = \lambda \cdot \bar{x}$

- Στην περίπτωση *m* εξυπηρετητών: $\rho = \dfrac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$
- *ρ* = {Μέση τιμή του ποσοστού εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι} *[Αποδεικνύεται με χρήση N. Little]*

Σταθερό σύστημα αναμονής

- **Σταθερό** σύστημα αναμονής, είναι αυτό στο οποίο δεν επιτρέπεται να δημιουργούνται ουρές ανεξέλεγκτου (άπειρου) μήκους.
- Σε ένα σταθερό σύστημα ισχύει $0 \leq \rho < 1$

G/G/1

- Έστω *τ* ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος περιμένουμε ο αριθμός των αφίξεων **A** να είναι πολύ κοντά στην τιμή $\lambda \cdot \tau$ Επίσης, έστω p_0 η *πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος* σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος *τ*, ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος για $\tau - \tau \cdot p_0$ sec και άρα ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται **B** στο χρονικό διάστημα *τ*, είναι περίπου $\frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\overline{x}}$
- **A** = **B**: $\lambda \cdot \tau \cong \frac{(\tau - \tau \cdot p_0)}{\overline{x}}$ οπότε για $\tau \to \infty$, έχουμε: $\lambda \, \overline{x} = 1 - p_0$
- *Οπότε* $\rho = 1 - p_0$ όπου p_0 η *πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι άεργος* σε κάποιο τυχαία εκλεγμένο χρονικό διάστημα

Στοχαστικές διαδικασίες

- *Στοχαστική Διαδικασία* (Σ.Δ.): ορίζεται ως μία οικογένεια Τυχαίων Μεταβλητών (Τ.Μ.), ***X(t)***, όπου οι Τ.Μ. έχουν δεικτοδοτηθεί με τη χρονική παράμετρο *t*.
- Παράγοντες ταξινόμησης στοχαστικών διαδικασιών
  - *ο χώρος καταστάσεων* (οι τιμές που παίρνουν οι ΤΜ)
    - πεπερασμένες ή αριθμήσιμες τιμές →Σ.Δ. *διακριτών-καταστάσεων* (*αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων* ↔ {0, 1, 2, …}
    - τιμές από ένα πεπερασμένο ή άπειρο συνεχές διάστημα → Σ.Δ. *συνεχών-καταστάσεων*
  - η *χρονική παράμετρος* (επιτρεπτές χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης)
    - Σ.Δ. Διακριτού-χρόνου [X_n – Στοχαστική Ακολουθία]
    - Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου [X(t)]
  - η *στατιστική σχέση* μεταξύ των Τ.Μ.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (1)

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την από κοινού PDF στις ΤΜ

  $= [\, X(t_1), X(t_2), \ldots]$, δηλαδή την:

$$F_{\vec{X}}\left(\vec{x}\,;\vec{t}\,\right) \equiv P\left[X\left(t_1\right) \leq x_1,\ \ldots,\ X\left(t_n\right) \leq x_n\right]$$

για όλα τα $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $= (t_1, t_2, \ldots ,t_n)$ και n.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (2)

1. Στάσιμες ΣΔ

   Αμετάβλητες στις ολισθήσεις στο χρόνο. Δηλαδή για οποιοδήποτε σταθερό τ, πρέπει: $F_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}+\tau\right)=F_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}\right)$

   όπου $\vec{t} + \tau = (t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau)$.

2. Ανεξάρτητες ΣΔ

   Οι πιο απλές. Δεν υπάρχει καμία δομή ή εξάρτηση των Τ.Μ. τους:

$$f_{\vec{X}}\left(\vec{x};\vec{t}\right)\equiv f_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n\right) \quad = f_{X1}\left(x_1;t_1\right)\ldots f_{Xn}\left(x_n;t_n\right)$$

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (3)

3. Διαδικασίες Markov

Για μια Αλυσίδα Markov $\{X(t)\}$, η πιθανότητα ότι η επόμενη τιμή $X(t_{n+1})$ θα είναι ίση με $\mathbf{x}_{n+1}$, εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή $X(t_n) = \mathbf{x}_n$ και όχι από οποιαδήποτε προηγούμενη (ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΜΝΗΣΙΑΣ).

Ιδιότητα Markov (για αλυσίδα Markov):

$$P\left[X\left(t_{n+1}\right)=x_{n+1} | X\left(t_n\right)=x_n, X\left(t_{n-1}\right)=x_{n-1},\ldots,X\left(t_1\right)=x_1\right]=$$
$$=P\left[X\left(t_{n+1}\right)=x_{n+1} | X\left(t_n\right)=x_n\right]$$

όπου $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, ενώ τα x_i περιέχονται σε κάποιο διακριτό χώρο καταστάσεων.

- Ο **χρόνος παραμονής** σε μια κατάσταση ακολουθεί την:

  Εκθετική Κατανομή (διαδικασία συνεχούς χρόνου), ή την - ισοδύναμη -

  Γεωμετρική Κατανομή (διαδικασία διακριτού χρόνου).

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (4)

4. Διαδικασίες Γεννήσεων - Θανάτων

   Κλάση των Διαδικασιών Markov: Οι αλλαγές κατάστασης γίνονται μόνο μεταξύ *γειτονικών* καταστάσεων.

   Δηλαδή αν $X(t_n) = i$, τότε $X(t_{n+1}) = i - 1$ ή $X(t_{n+1}) = i + 1$ μόνο.

5. Διαδικασίες Semi Markov

- Επιτρέπουμε αυθαίρετη κατανομή του χρόνου που η διαδικασία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση.
- Η διαδικασία συμπεριφέρεται σαν Markov κατά τις χρονικές στιγμές αλλαγής κατάστασης, και στην πραγματικότητα *σε αυτές τις στιγμές* λέμε ότι έχουμε μια *συμπυκνωμένη (embedded) αλυσίδα Markov*.
- Υπερσύνολο των διαδικασιών Markov.

Στατιστική σχέση μεταξύ των ΤΜ (5)

6. Τυχαίοι περίπατοι

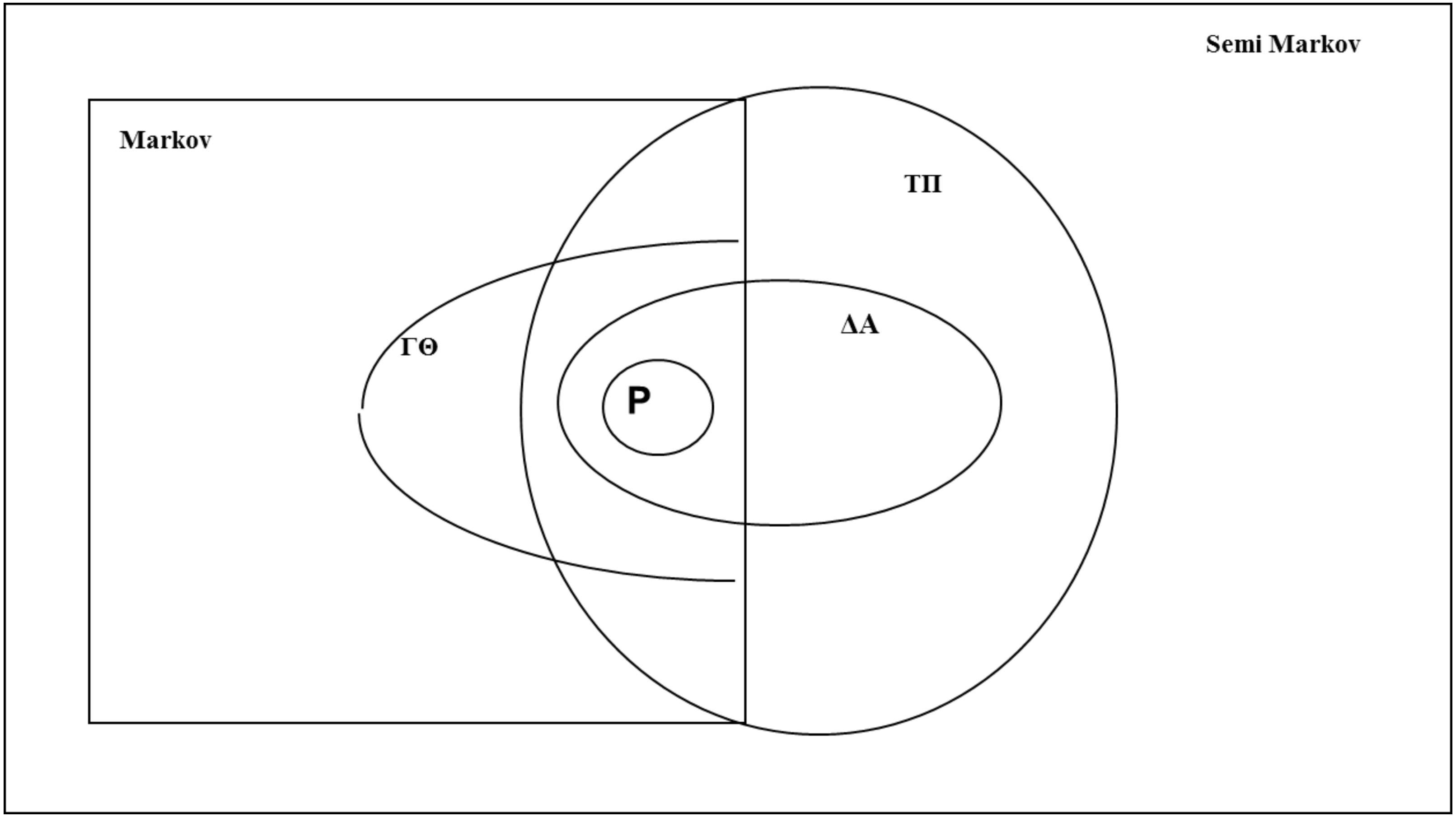
Η επόμενη θέση είναι ίση με την προηγούμενη θέση, συν μια τυχαία μεταβλητή

Δηλαδή, μια ακολουθία ΤΜ *{Sn}* είναι τυχαίος περίπατος αν: $S_n = X_1+X_2+ \ldots +X_n$ όπου $n = 1, 2, \ldots,$ $S_0 = 0$ και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων ΤΜ με κοινή κατανομή.

7. Διαδικασίες ανανέωσης

- Ειδική περίπτωση των τυχαίων περιπάτων.
- S_n είναι τώρα η ΤΜ που καθορίζει τη *χρονική στιγμή* στην οποία γίνεται η n-οστή μεταβολή κατάστασης και $\{X_n\}$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων ΤΜ, όπου η X_n αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(n-1)$-οστής και n-οστής μεταβολής κατάστασης . Οι μεταβολές γίνονται μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων .

Σχέσεις των κλάσεων Στοχαστικών Διαδικασιών



P: Poisson

Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

- Η ΣΔ καταλαμβάνει διακριτές θέσεις και οι αλλαγές μεταξύ αυτών των θέσεων γίνονται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Η υπό συνθήκη πιθανότητα να γίνει η μετάβαση της διαδικασίας από την *κατάσταση* E_i όπου είναι στο βήμα *(n-1),* στην *κατάσταση* E_j κατά το βήμα *n*

$$P\left[X_n = j \;\middle|\; X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right] = P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i_{n-1}\right]$$

πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος

Ομογενείς αλυσίδες Markov

- Αν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι *ανεξάρτητες του n*, τότε έχουμε μια *ομογενή αλυσίδα Markov. Ορίζουμε:*

$$p_{ij} \equiv P\left[X_n = j \;\middle|\; X_{n-1} = i\right]$$

- Πιθανότητες μετάβασης *m*-βημάτων

$$p_{ij}^{(m)} \equiv P\left[X_{n+m} = j \;\middle|\; X_n = i\right]$$

- Εύκολα βγαίνει: $$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$$

- Δηλαδή, αν πρόκειται να «ταξιδέψουμε» από την E_i στην E_j μέσα σε *m* βήματα, πρέπει να το κάνουμε «ταξιδεύοντας» πρώτα από την E_i σε κάποια E_k μέσα σε *(m-1)* βήματα και μετά από την E_k στην E_j στο επόμενο βήμα

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (1)

- **Αμείωτη**: κάθε κατάσταση της μπορεί να προσπελασθεί από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις. Δηλαδή, υπάρχει ένας ακέραιος m_0 για κάθε ζευγάρι καταστάσεων E_i , E_j :

$$p_{ij}^{(m_0)} > 0$$

- Ένα υποσύνολο καταστάσεων *A1* λέγεται *κλειστό* αν δεν είναι δυνατή καμία μετάβαση ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του *A1* σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός του *A1*.
- Αν το *A1* αποτελείται από μια μόνο κατάσταση, έστω E_i , τότε αυτή καλείται *απορροφητική* κατάσταση. Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η E_i απορροφητική, είναι $p_{ii} = 1$.
- Αν μία αλυσίδα περιέχει κλειστά υποσύνολα η αλυσίδα λέγεται *μειώσιμη*.

Ορισμοί για αλυσίδες Markov (2)

- $f_j^{(n)} \equiv$ *Prob [Η πρώτη επιστροφή στην E_j γίνεται μετά από n βήματα από την αναχώρηση από την E_j]*

- $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ *= Prob[Κάποτε να επιστρέψουμε στην E_j]*

- Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε κάποτε στην κατάσταση E_j, f_j, *είναι* $f_j = 1$, η κατάσταση E_j λέγεται *επαναληπτική*.
- Αν $f_j < 1$, λέγεται *μεταβατική*.

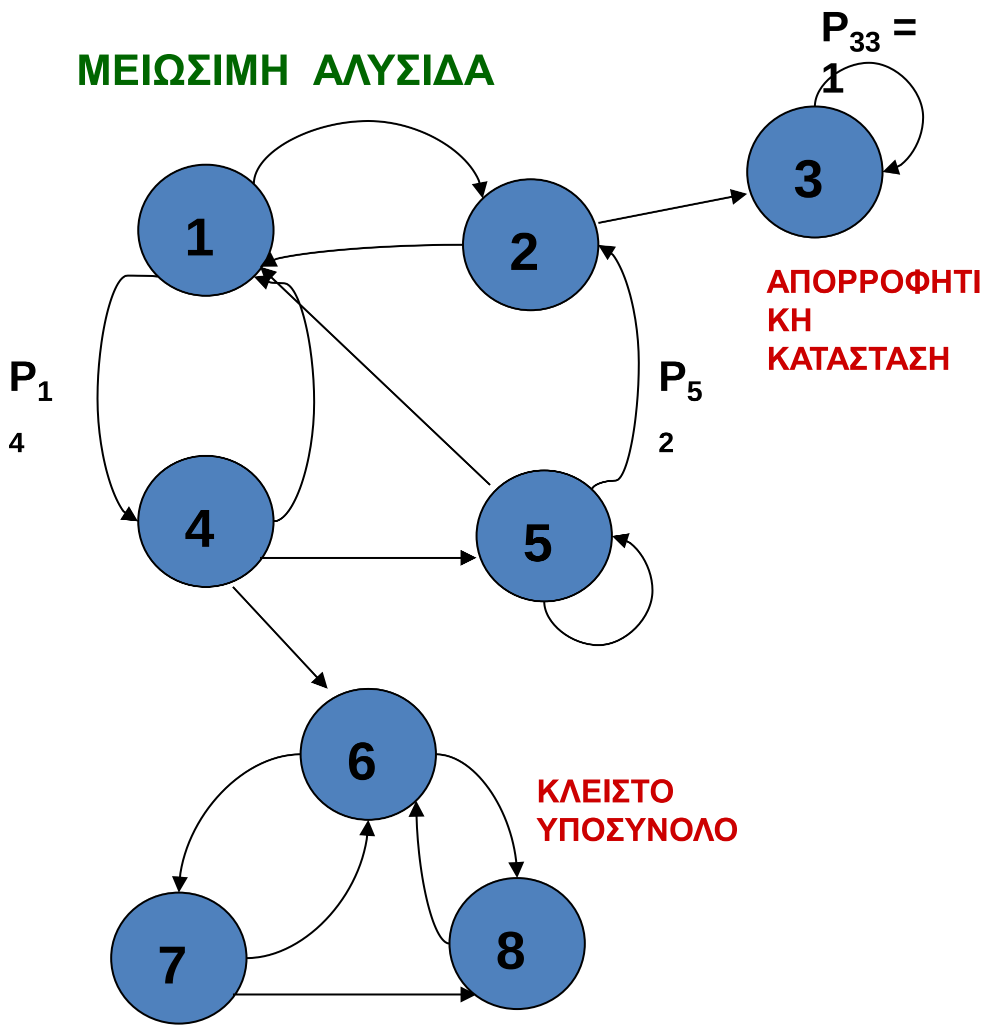
Ορισμοί για αλυσίδες Markov (3)

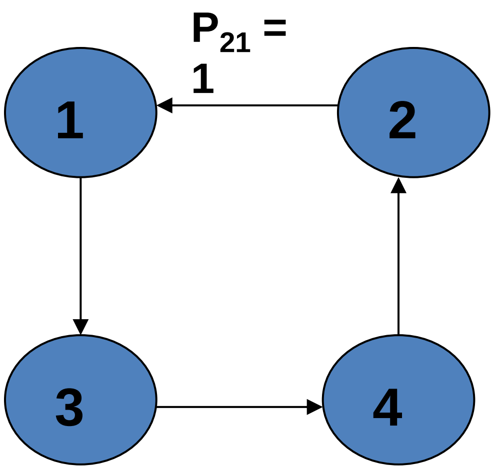
- Αν τα μόνα δυνατά βήματα κατά τα οποία μπορούμε να επιστρέψουμε στην E_j είναι *γ, 2γ, 3γ, . . ., (γ* ο μεγαλύτερος τέτοιος ακέραιος*)* τότε η E_j λέγεται *περιοδική* με περίοδο *γ*. Αν $\gamma = 1$ τότε η E_j είναι *μη-περιοδική*.
- Για τις καταστάσεις με $f_j = 1$, ορίζουμε το Μέσο Χρόνο Επανάληψης της (επιστροφής στην) E_j :

$$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

- Αν ο μέσος χρόνος επιστροφής στην E_j , M_j, *είναι* $M_j = \infty$, η E_j λέγεται *μηδενικά επαναληπτική*, ενώ αν *είναι* $M_j < \infty$, η E_j λέγεται *βέβαια επαναληπτική*.

Παραδείγματα





ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ

Θεώρημα 1

- Οι καταστάσεις μιας αμείωτης αλυσίδας Markov είναι είτε **όλες** μεταβατικές, είτε όλες βέβαια επαναληπτικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές. Αν είναι περιοδικές, τότε όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο γ.

Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης

- $\pi_j^{(n)} \equiv P[X_n = j]$: Πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα (η αλυσίδα Markov) στην κατάσταση E_j κατά το n-στο βήμα.
- $\{\pi_j\}$: στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων που περιγράφει την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση E_j κάποια χρονική στιγμή στο απώτερο μέλλον.
- Πιθανότητες Μόνιμης Καταστασ $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$
- Στην στάσιμη κατανομή, η επίδραση της κατανομής αρχικής κατάστασης $\{\pi_j^{(0)}\}$ έχει εξαφανιστεί
- Το να βρούμε τα $\{\pi_j\}$ είναι το πιο σημαντικό τμήμα της ανάλυσης των αλυσίδων Markov

Θεώρημα 2

Σε μια αμείωτη και μη-περιοδική ομογενή αλυσίδα Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$

υπάρχουν πάντα , και είναι ανεξάρτητες από την κατανομή της αρχικής κατάστασης.

Επίσης ισχύει:

1. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι μηδενικά επαναληπτικές, οπότε π_j= 0 και δεν υπάρχει κατανομή μόνιμης κατάστασης.

2. Είτε όλες οι καταστάσεις είναι βέβαια επαναληπτικές και τότε π_j > 0 για όλα τα j, στην οποία περίπτωση το σύνολο $\{\pi_j\}$ είναι μια κατανομή μόνιμης κατάστασης και

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}$$

Στην τελευταία περίπτωση οι ποσότητες π_j καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις εξής εξισώσεις:

$$1 = \sum_i \pi_i \qquad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

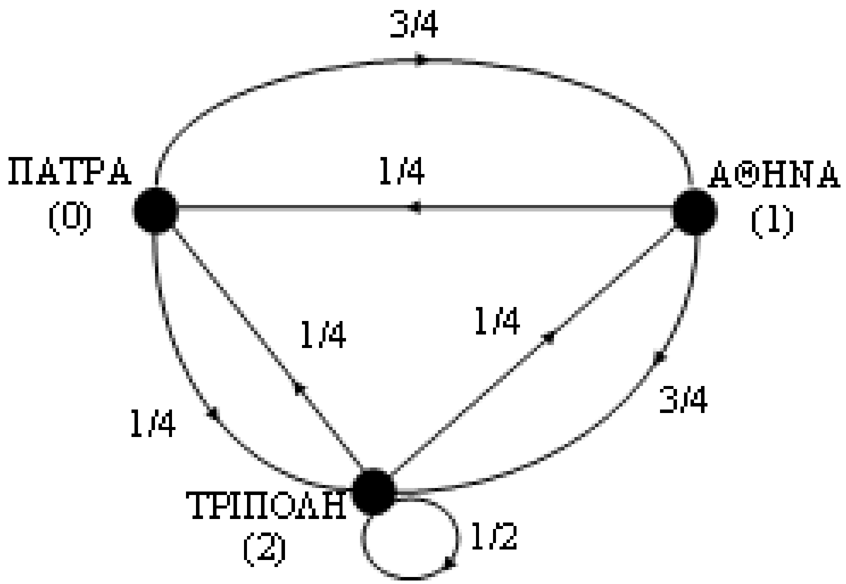
Ορισμοί Markov αλυσίδων (συνέχεια)

- Μια κατάσταση E_j λέγεται **εργοδική**, αν είναι μη-περιοδική και βέβαια επαναληπτική.

  Δηλαδή αν $f_j = 1$, $M_j < \infty$ και $\gamma = 1$.

- Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι εργοδικές, τότε η αλυσίδα Markov λέγεται και η ίδια *εργοδική*.

Παράδειγμα



Διάγραμμα καταστάσεων -
- πιθανοτήτων μεταβάσεων

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (1)

- $\vec{\mathbf{P}} = \left[p_{ij} \right]$ πίνακας μεταβάσεων
- $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \left[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \right]$ διάνυσμα πιθανοτήτων
- Από το θεώρημα 2: $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\boldsymbol{\pi}} \cdot \vec{\mathbf{P}}$
- Στο παράδειγμα

$$\vec{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (2)

- Λύνουμε τις εξισώσεις

$\pi_0 = 0\cdot \pi_0 + 1/4\cdot\pi_1 + 1/4\cdot\pi_2$

$\pi_1 = 3/4\cdot \pi_0 + 0\cdot \pi_1 + 1/4\cdot \pi_2$

$\pi_2 = 1/4\cdot \pi_0 + 3/4\cdot \pi_1 + 1/2\cdot \pi_2$

$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$

- Αποτέλεσμα:

$\pi_0 = 1/5 = 0.20$

$\pi_1 = 7/25 = 0.28$

$\pi_2 = 13/25 = 0.52$

Πιθανότητες Μόνιμης Κατάστασης

Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (1)

- Υπολογισμός πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)}$: η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση E_j τη χρονική στιγμή n.
- $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} \equiv \left[\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(\mathrm{n})}, \pi_2^{(\mathrm{n})}, \quad \ldots\right]$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο βήμα n
- Ισχύει ότι $\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n-1)} \cdot \vec{\mathbf{P}}$

$$\vec{\boldsymbol{\pi}}^{(n)} = \vec{\boldsymbol{\pi}}^{(0)} \cdot (\vec{\mathbf{P}})^n$$

Ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς συστήματος (2)

- Στο παράδειγμα των πόλεων, έστω ότι η αρχική κατανομή είναι η $\vec{\pi}^{(0)} = [1,0,0]$ δηλαδή αρχική πόλη είναι η Πάτρα.
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η ακολουθία τιμών των πιθανοτήτων σε κάθε βήμα.

n	0	1	2	3	4	. . . .	∞
$\pi_0^{(n)}$	1	0	0.250	0.187	0.203	. . . .	0.20
$\pi_1^{(n)}$	0	0.75	0.062	0.359	0.254	. . . .	0.28
$\pi_2^{(n)}$	0	0.25	0.688	0.454	0.543	. . . .	0.52

- **Οι ποσότητες συγκλίνουν πολύ γρήγορα προς τις οριακές τιμές της μόνιμης κατάστασης.**

Χρόνος παραμονής σε μια κατάσταση

Prob [Το σύστημα να παραμείνει στην E_i για ακριβώς m επιπλέον βήματα, δεδομένου ότι έχει μόλις εισέλθει στην E_i] = $(1 - p_{ii})\, p_{ii}^{m}$

Γεωμετρική κατανομή

(Ιδιότητα αμνησίας)

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (1)

Τα απλούστερα συστήματα: *M/M/m/K*

- *Εκθετικά κατανεμημένοι* χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (Χ.Α.)

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

- *Εκθετικά κατανεμημένοι* χρόνοι εξυπηρέτησης (Χ.Ε.)

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (2)

- *Ιδιότητα της αμνησίας:* «ο χρόνος ως το επόμενο γεγονός, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που έχει περάσει από το τελευταίο γεγονός».
- ΑΦΙΞΕΙΣ:

  Αν έχει περάσει χρόνος t_0 από την τελευταία άφιξη (του C_{n-1})

  $Prob[t_n \leq t + t_0 \mid t_n > t_0] = Prob[t_n \leq t]$

- ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ:

  Αν έχει περάσει χρόνος x_0 εξυπηρέτησης του πελάτη C_n

  $Prob[x_n \leq x + x_0 \mid x_n > x_0] = Prob[x_n \leq x]$

Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου (3)

- $P_k(t)$ = *Prob*[*k* πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή *t*]

  για $0 \leq k \leq K, \quad t \geq 0$

- $\boxed{p_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)}$ = *Prob*[*k* πελάτες στο σύστημα κάποια χρονική στιγμή *στο μέλλον*]

- ***Κατανομή μόνιμης κατάστασης.***

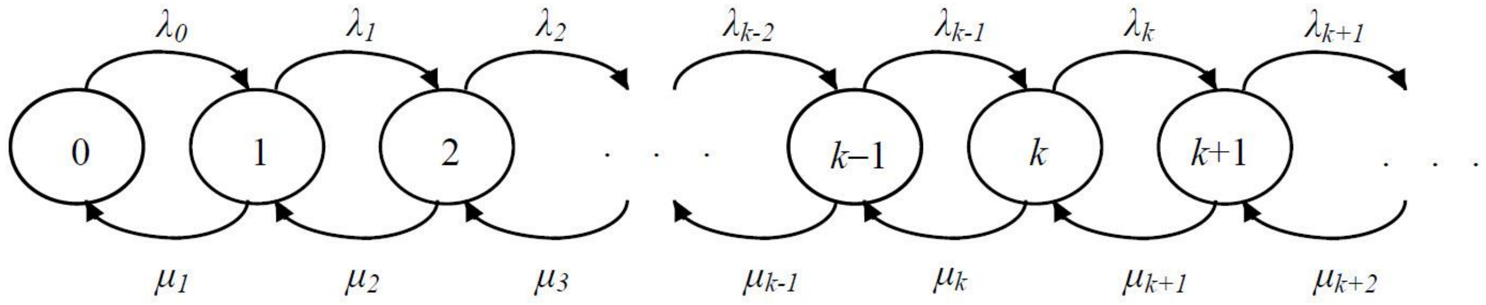
- Υπάρχει, αν το σύστημα είναι σταθερό ($0 \leq \rho < 1$)

Νόμος ισορροπίας της ροής πιθανότητας

Στη μόνιμη κατάσταση, ο «ρυθμός ροής πιθανότητας» μιας αλυσίδας Markov *από* κάθε κατάσταση, είναι ίσος με το «ρυθμό ροής πιθανότητας» *προς* την κατάσταση.

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (1)

- Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *j*, τότε στην επόμενη αλλαγή κατάστασης θα βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις $j-1$ ή $j+1$.
- $\boldsymbol{\lambda_k}$: ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν *k* πελάτες στο σύστημα
- $\boldsymbol{\mu_k}$: ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν *k* πελάτες στο σύστημα



- Διάγραμμα καταστάσεων-ρυθμών μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (2)

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας ***από*** την κατάσταση *k*} =

  $$p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k)$$

- {Ρυθμός ροής πιθανότητας ***προς*** την κατάσταση *k*} =

  $$p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$$

- Με βάση το νόμο ισορροπίας ροής
  - Για $k \geq 1$ $\quad p_k \cdot (\lambda_k + \mu_k) = p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} + p_{k+1} \cdot \mu_{k+1}$ **(1)**
  - Για $k = 0$ $\quad p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$ **(2)**

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (3)

- Ισχύει πάντα ότι $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ **(3)**
- Λύνοντας τις εξισώσεις (1), (2), (3), παίρνουμε:

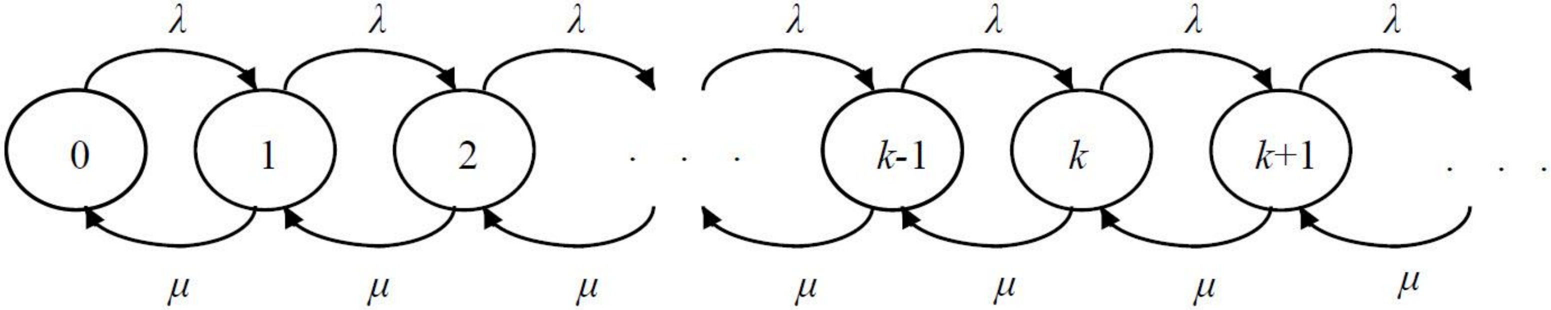
$$\boxed{p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \qquad \boxed{p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}} \qquad \textbf{(4)}$$

- Η παραπάνω λύση υπάρχει (δηλαδή, υπάρχει μόνιμη κατάσταση), αν $\boldsymbol{p_0 > 0}$, δηλαδή αν ο παρονομαστής της σχέσης (4) είναι μικρότερος από ∞ . Για να ισχύει το τελευταίο, θα πρέπει η ακολουθία λ_k / μ_k να συγκλίνει, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει κάποιο k_0 τέτοιο ώστε: $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1$ για όλα τα $k \geq k_0$

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (4)

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Ο Νόμος διατήρησης της ροής εφαρμόζεται και σε κάθε «σύνορο» της αλυσίδας Markov:



1: $p_0 \cdot \lambda_0 = p_1 \cdot \mu_1$

2: $p_1 \cdot \lambda_1 = p_2 \cdot \mu_2$

:

k: $p_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} = p_k \cdot \mu_k$

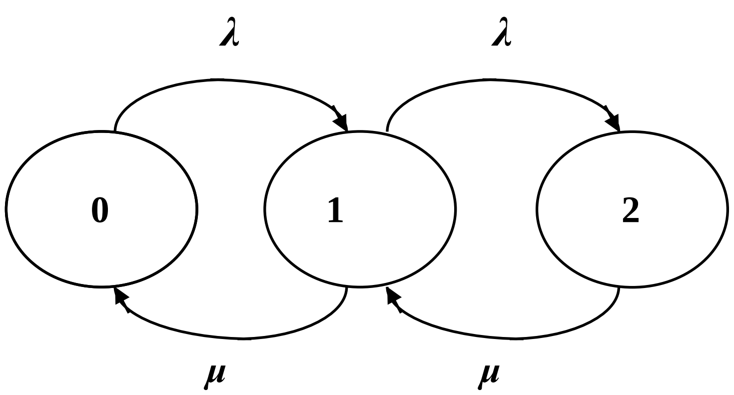
Ίδια Αποτελέσματα

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (5)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μας δίνεται μια αλυσίδα Markov γεννήσεων – θανάτων, η οποία έχει μόνο τρεις καταστάσεις {0, 1, 2}, ενώ ισχύει:

$\lambda_k = \lambda$ για $k = 0,1$ και $\mu_k = \mu$ για $k = 1,2$



Διάγραμμα Καταστάσεων – Ρυθμών Μεταβάσεων

Αλυσίδες Markov Γεννήσεων – Θανάτων (6)

- Για την κατάσταση 0: $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 1: $p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu$
- Για την κατάσταση 2: $p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda$

Από τις παραπάνω 3 σχέσεις, μόνο οι 2 είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε την $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ με 2 από τις παραπάνω, και παίρνουμε την τελική λύση:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2} \qquad p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2} \qquad p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2}$$

- Η αλυσίδα αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα ***M/M/1/2***. Γιατί;
- Στο σύστημα αυτό επιτρέπεται ***λ/μ*** **≥ 1**. Γιατί;

Διαδικασίες Poisson

- Ειδική περίπτωση Γεννήσεων-Θανάτων (**μόνο αφίξεις**)
  - $\mu_\kappa = 0$ για όλα τα k
  - $\lambda_\kappa = \lambda$ για όλα τα k
- Δεν είναι εργοδικό σύστημα. Όλες οι καταστάσεις *μεταβατικές*.
- Έστω το σύστημα ξεκινά τη στιγμή $t = 0$, άδειο. Δηλαδή:

$$\mathrm{P}_\kappa(0) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ 0, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

- Τη χρονική στιγμή t: $\mathrm{P}_\kappa(t) = \dfrac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda t}$ για $k \geq 0$, $t \geq 0$
- **Κατανομή Poisson**
- *Μέση Τιμή* και *Διακύμανση* (αριθμού αφίξεων στο [0, t]), ίσα με $\boldsymbol{\lambda t}$. (αναμενόμενο).
- Δηλαδή, στο M/M/1, η διαδικασία μόνο των αφίξεων, είναι Poisson

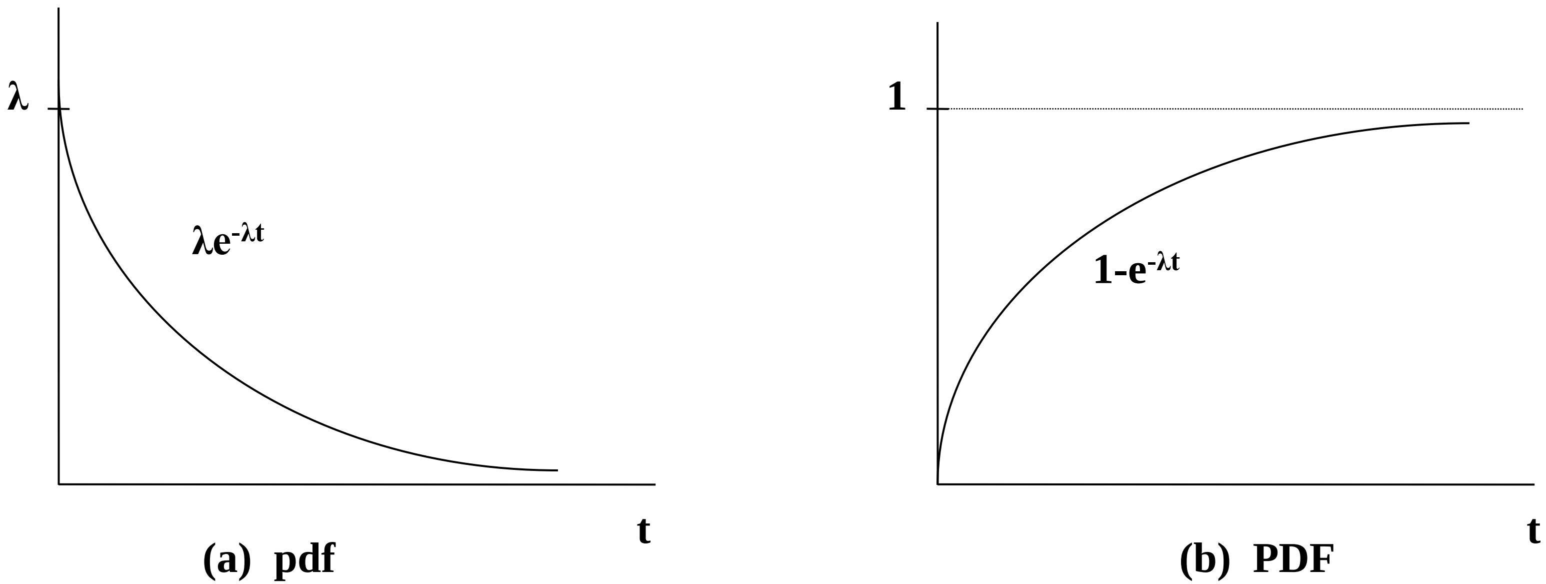
Poisson αφίξεις → Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ αφίξεων

- = ΤΜ για το χρόνο μεταξύ αφίξεων, με PDF *A(t)* και pdf *α(t)*

  Poisson

  $\boldsymbol{A(t)} = 1 - P[\quad > t] = 1 - P_0(t) = \mathbf{1 - e^{-\lambda t}}$, $t \geq 0$ (PDF Εκθετικής)

  Παράγωγος ως προς t: $\boldsymbol{\alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$, $t \geq 0$ (pdf Εκθετικής)



Η εκθετική κατανομή

Ιδιότητα Αμνησίας της Εκθετικής Κατανομής

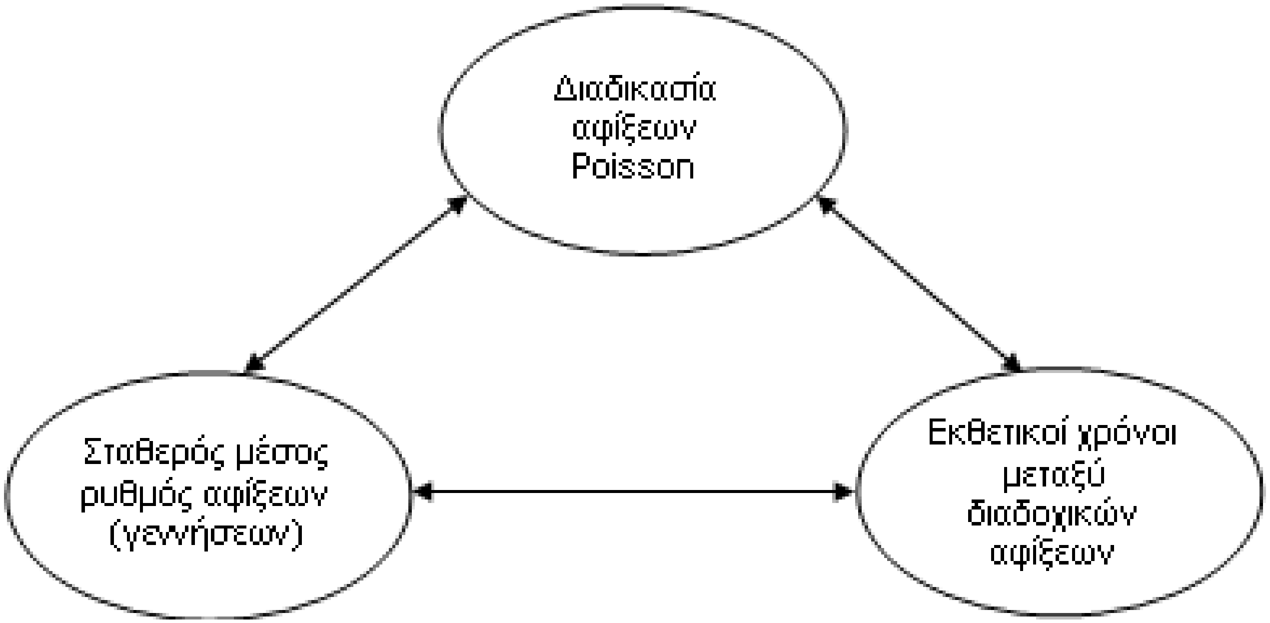
- Έστω ότι γίνεται μια άφιξη τη χρονική στιγμή **0**. Τώρα, έστω ότι πέρασαν $\boldsymbol{t_0}$ δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των οποίων δεν έγινε άφιξη. Αν αυτή τη στιγμή $\boldsymbol{t_0}$ ρωτήσουμε *«ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να γίνει μετά από* ***t*** *δευτερόλεπτα από τώρα»,* η απάντηση θα είναι:

$$\mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \frac{\mathrm{P}\left[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0\right]}{\mathrm{P}\left[\tilde{t} > t_0\right]} = \frac{\mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t + t_0\right] - \mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t_0\right]}{\mathrm{P}\left[\tilde{t} > t_0\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t + t_0 \;\middle|\; \tilde{t} > t_0\right] = \mathrm{P}\left[\tilde{t} \leq t\right]}$$

Σχέσεις



Διαδικασία αφίξεων Poisson
Σταθερός μέσος ρυθμός αφίξεων (γεννήσεων)
Εκθετικοί χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων

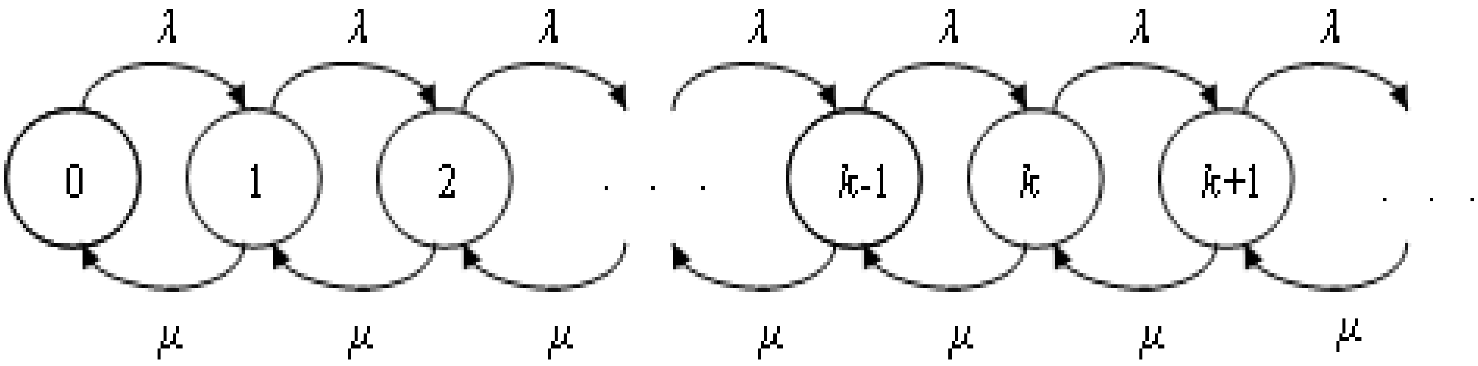
Το κλασικό Σύστημα Αναμονής *M/M/1*

- *Εκθετική* κατανομή της διαδικασίας των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
- *Εκθετική* κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης
- Ένας εξυπηρετητής
- Άπειρο μήκος ουράς
- Αλυσίδα Markov Γεννήσεων – Θανάτων
- Με τη συνηθισμένη παραδοχή ότι οι *ρυθμοί* αφίξεων και εξυπηρέτησης δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος (αριθμός παρόντων πελατών), ισχύει:

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{για} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Το Σύστημα Αναμονής *M/M/1* *(συνέχεια)*



Διάγραμμα καταστάσεων - ρυθμών μεταβάσεων για το σύστημα *M/M/1*

Για τη λύση:

$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$

:

$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$

:

και $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Λύση συστήματος *M/M/1 (1)*

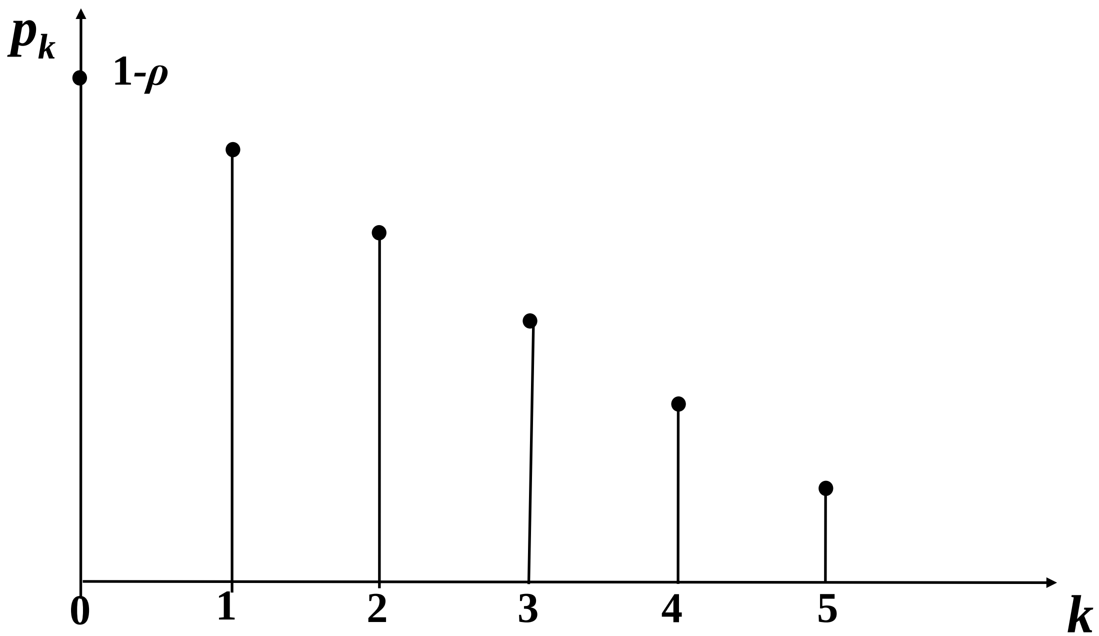
- Χρησιμοποίηση (G/G/1): $$\boxed{\rho = \lambda \cdot \bar{x} = \frac{\lambda}{\mu}}$$
- Συνθήκη σταθερότητας: $0 < \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$
- Από τη γενική λύση των διαδικασιών Γ-Θ (ή την προσέγγιση της προηγούμενης διαφάνειας):

$$\boxed{p_k = (1-\rho)\cdot \rho^k} \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Περιέχεται το: $p_0 = 1 - \rho$

Λύση συστήματος *M/M/1 (2)*

- Τα $\boldsymbol{p_k}$ ακολουθούν τη *Γεωμετρική Κατανομή*
- Εξαρτώνται από τα λ και μ, μόνο μέσω του λόγου τους $\boldsymbol{\rho}$

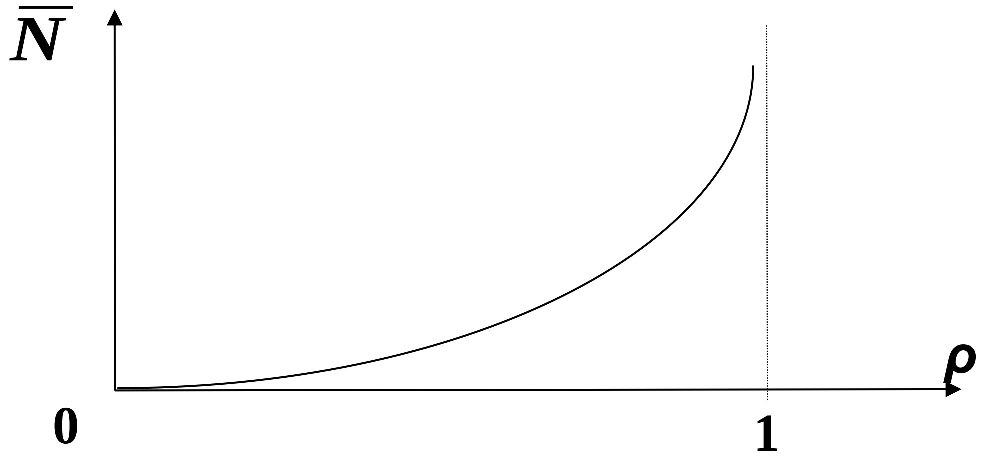


Τα p_k στο σύστημα *M/M/1*.

Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1 (1)*

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N}=\sum_{k=0}^{\infty} k p_k=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k=(1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

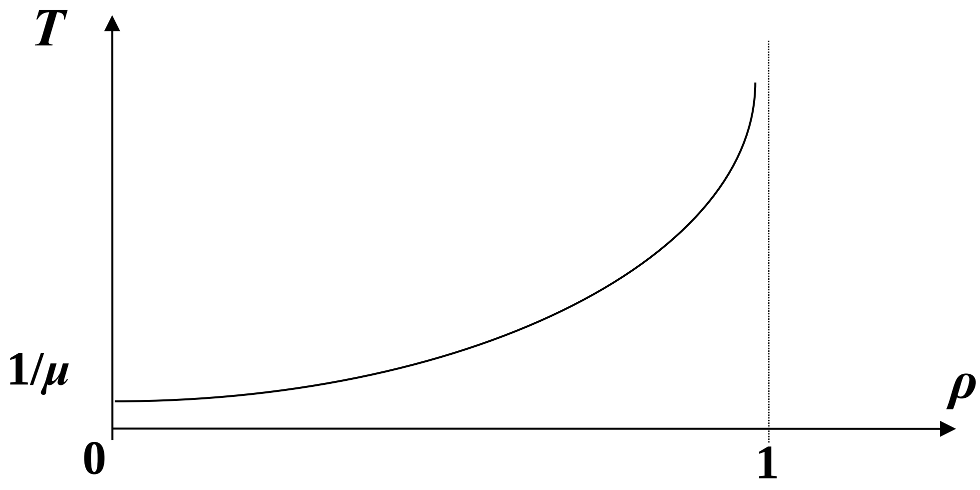


Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1 (2)*

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (*Response Time*)

Με χρήση του *Νόμου του Little*:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$



Μετρικές απόδοσης στο *M/M/1 (3)*

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \bar{x} = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\bar{N}_q = \bar{N} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον *n* πελάτες στο σύστημα
- $P_{(n)} =$ *Prob*[*n* ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα]

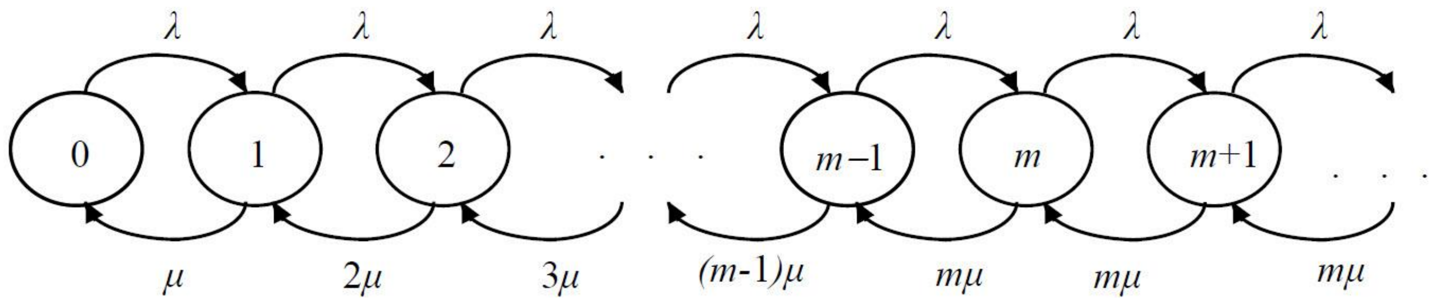
$$P_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = (1-\rho)\sum_{k=n}^{\infty} \rho^k = (1-\rho)\rho^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = (1-\rho)\rho^n \frac{1}{1-\rho} = \rho^n$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/m (1)*

- ***m*** ίδιοι εξυπηρετητές
- Ο καθένας με ρυθμό εξυπηρέτησης ***μ***
- Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, ίδια με του *M/M/1*

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{για} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{για} \quad 1 \le k \le m \\ m\mu & \text{για} \quad m \le k \end{cases}$$



Το σύστημα αναμονής *M/M/m* (2)

- Χρησιμοποίηση

$$\rho = \frac{\lambda \bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Συνθήκη Σταθερότητας

$$0 < \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

- Λύση μόνιμης κατάστασης

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!} & \text{για} \quad 1 \le k \le m \\ p_0 \dfrac{\rho^k m^m}{m!} & \text{για} \quad k \ge m \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\rho)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Μετρικές απόδοσης στο *M/M/m (1)*

- Πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά ένας πελάτης:

  Π = *Prob*[*m* ή περισσότεροι πελάτες στο σύστημα]

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!} = p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^k = p_0 \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m\rho + \frac{\rho \Pi}{1-\rho}$$

Μετρικές απόδοσης στο *M/M/m (2)*

- Μέσος χρόνος ενός πελάτη στο σύστημα (response time)

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\Pi}{m(1-\rho)}\right)$$ (N. Little)

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά

$$W = T - \overline{x} = T - 1/\mu = \frac{\Pi}{m\mu(1-\rho)}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

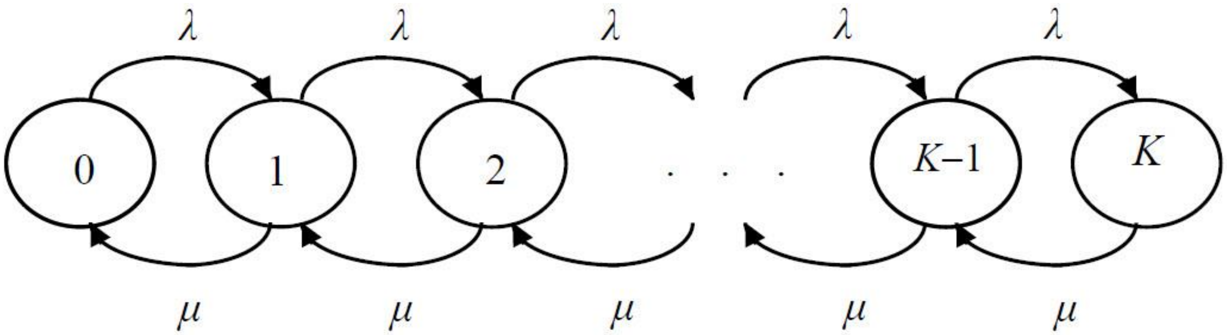
$$\overline{N}_q = \overline{N} - m\rho = \frac{\rho\Pi}{1-\rho}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K (1)*

- Ίδια χαρακτηριστικά με το *M/M/1*, αλλά περιορισμένη χωρητικότητα σε πελάτες.
- Στο σύστημα μπορούν να βρίσκονται το πολύ ***K*** πελάτες (στην ουρά και στον εξυπηρετητή).
- Πελάτες που φθάνουν και βρίσκουν γεμάτο το σύστημα, χάνονται.
- Οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης του *M/M/1/K*:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{για} \quad 0 \le k < K \\ 0 & \text{για} \quad k \ge K \end{cases} \qquad \mu_k = \begin{cases} \mu & \text{για} \quad 1 \le k \le K \\ 0 & \text{για} \quad k > K \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K (2)*



- Λύση συστήματος

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{για} \quad 0 \le k \le K \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K (3)*

ΜΕΤΡΙΚΕΣ

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{K} k p_k = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - \frac{(K+1)(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά

$$\overline{N}_q = \sum_{k=2}^{K} (k-1) p_k = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - (\lambda/\mu) \cdot \frac{1+K(\lambda/\mu)^{K}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Το σύστημα αναμονής *M/M/1/K (4)*

- **Παράδειγμα**: Το μοντέλο μιας τηλεφωνικής συσκευής χωρίς κράτηση κλήσεων (παλιό αναλογικό σύστημα):

M/M/1/1

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda/\mu} & \text{για} \quad k=0 \\ \dfrac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} & \text{για} \quad k=1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$\boldsymbol{p_0}$: Πιθανότητα να μιλήσει, κάποιος που καλεί

$\boldsymbol{p_1}$: Πιθανότητα να βρει κατειλημμένη τη συσκευή, κάποιος που καλεί

$\boldsymbol{\lambda}$: Μέσος ρυθμός με τον οποίο γίνονται κλήσεις στη συσκευή

$\overline{x} = 1/\mu$: Μέση χρονική διάρκεια μιας συνομιλίας

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ιωάννης Γαροφαλάκης, 2015. «Τεχνικές Εκτίμησης Υπολογιστικών Συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1093/.

Σημείωμα Αδειοδότησης