Chapter 10
λ - Calculus

SLIDES TAKEN FROM National University of Athens

Ιστορική εξέλιξη λ-λογισμού - 1

- Αναπτύχθηκε αρχικά από τον Alonzo Church στις αρχές της δεκαετίας του 1930, πολύ πριν αρχίσουν να χρησιμοποιούνται οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές.
- Ήταν μέρος μιας γενικότερης θεωρίας με στόχο τη θεμελίωση μαθηματικών και λογικής [Chur32, Chur33]

Ιστορική εξέλιξη λ-λογισμού - 2

- Η γενική θεωρία ήταν ασυνεπής, όπως αποδείχθηκε αργότερα [Klee35]
- Το τμήμα της, που ασχολήθηκε με συναρτήσεις είχε σημαντικές εφαρμογές στην πληροφορική, κυρίως μετά το 1960
- Το τμήμα αυτό είναι ο λάμβδα λογισμός ή λ-λογισμός

λ-Λογισμός

- Πλήρες υπολογιστικό μοντέλο
- Δύο πολύ σημαντικά αποτελέσματα
  - Όλες οι αναδρομικές συναρτήσεις παριστάνονται στο λ-λογισμό [Klee35]
  - Ως υπολογιστικό μοντέλο, ο λ-λογισμός είναι ισοδύναμος με τη μηχανή Turing [Turi37].
    - Η μηχανή Turing αποτέλεσε τη βάση των υπολογιστών von Neumann στους οποίους ανήκουν οι σημερινοί υπολογιστές και οδήγησε στη δημιουργία των πρώτων γλωσσών προγραμματισμού

λ-Λογισμός

- Σχεδιασμός νέων αρχιτεκτονικών υπολογιστών
  - Μηχανές αναγωγής (reduction machines) και
  - Υπολογιστές ροής δεδομένων (data-flow computers)
    - Όταν πρωτο-δημιουργήθηκαν εκτελούσαν αποκλειστικά προγράμματα γραμμένα σε κάποια διάλεκτο του λ-λογισμού.
- Δημιουργία συναρτησιακού προγραμματισμού
  - John McCarthy σχεδίασε τη γλώσσα προγραμματισμού LISP στα τέλη της δεκαετίας του 1950. Αργότερα δημιουργήθηκαν οι Scheme, ML, Miranda, Haskell, κλπ.

λ- Λογισμός

- Υπολογιστές και συναρτησιακός προγραμματισμός δεν έτυχαν ευρείας αποδοχής όπως οι υπολογιστές von Neumann και ο προστακτικός προγραμματισμός
- Οι επιδόσεις των πρώτων μηχανών αναγωγής και οι υλοποιήσεις των συναρτησιακών γλωσσών ήταν χειρότερες από τα παραδοσιακά συστήματα.

λ-Λογισμός

- Ιδιαίτερα πρόσφορος ως συμβολισμός για την περιγραφή σημασιολογικών ιδιοτήτων των γλωσσών προγραμματισμού.
- Διευκόλυνε τη μελέτη και απομόνωση προβλημάτων σχεδίασης και υλοποίησης των γλωσσών προγραμματισμού
  - Μηχανισμό κλήσης υπο-προγραμμάτων και δομή συστήματος τύπων

λ-Λογισμός

- Διατύπωση θεωρίας πεδίων
- Θεμελίωση ερευνητικού πεδίου της σημασιολογίας γλωσσών προγραμματισμού

Διαισθητική εισαγωγή

- Ο λ-λογισμός είναι θεωρία συναρτήσεων
- Δύο κύριες λειτουργίες
  - *Εφαρμογή* συνάρτησης F πάνω σε ένα όρισμα A, που συμβολίζεται με F A
  - *Αφαίρεση.* Έστω ότι x μεταβλητή και E[x] έκφραση, που εξαρτάται από τη x. Η έκφραση λx.E[x] συμβολίζει τη συνάρτηση

$$x \mapsto E[x]$$

Διαισθητική εισαγωγή

- Η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα μία τιμή υ και επιστρέφει ως αποτέλεσμα την τιμή E[υ]. Η x δεν εμφανίζεται απαραίτητα στην έκφραση E[x]. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η λx.E[x] είναι μία σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα

Η $\lambda x.\ x^2 - 3x + 2$ συμβολίζει μία συνάρτηση, που σε κάθε τιμή x απεικονίζει την τιμή $x^2 - 3x + 2$.

Αν η συνάρτηση εφαρμοσθεί στο όρισμα 8, προκύπτει

$(\lambda x.\ x^2 - 3x + 2)8 = 8^2 - 3 \cdot 8 + 2 = 42$

Η τιμή του ορίσματος αντικαθιστά την παράμετρο x

Ελεύθερη και Δεσμευμένη Μεταβλητή

- Η αφαίρεση λx.E[x] δεσμεύει τη μεταβλητή x μέσα στην έκφραση E[x].
- Μεταβλητή μη δεσμευμένη ονομάζεται ελεύθερη.

Παράδειγμα: $\lambda x.\ x^2 - 3y + 2$

x δεσμευμένη και y ελεύθερη

Παράδειγμα: $(\lambda x.\ x^2 - 3y + 2)(4x + 1)$

Η πρώτη εμφάνιση του x (στο x^2) είναι δεσμευμένη.

Παράδειγμα Δέσμευσης

$$\int \frac{\sin x + \cos y}{\cos x - \sin y}\, dx$$

Η μεταβλητή x στο εσωτερικό του ολοκληρώματος είναι δεσμευμένη. Η μεταβλητή y είναι ελεύθερη.

Λάμβδα όροι

Ο λ-λογισμός είναι μία τυπική γλώσσα Λ, η σύνταξη της οποίας δίνεται από τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό:

Ορισμός 10.1

Έστω V ένα αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών. Το σύνολο Λ των όρων του λ-λογισμού είναι το μικρότερο σύνολο, που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$$

$$M, N \in \Lambda \Rightarrow (M\ N) \in \Lambda$$

$$x \in V\ ,\ M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$$

λ-όροι

Τα στοιχεία του συνόλου Λ ονομάζονται επίσης λ-όροι (λ-terms). Υπάρχουν τριών ειδών:

- Μεταβλητές (Variables), δηλαδή στοιχεία του συνόλου V
- Εφαρμογές (Applications), με μορφή (M N), όπου M και N είναι λ-όροι
- Αφαιρέσεις (Abstractions), με μορφή (λx.M), όπου x μεταβλητή και M λ-όρος

λ-όροι

- Κατά σύμβαση χρησιμοποιούνται μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου (x,y,z κλπ) για συμβολισμό μεταβλητών και κεφαλαία (M,N,F,G, P κλπ) για λ-όρους.

λ-όροι

- Χρησιμοποιώντας αφηρημένη σύνταξη BNF και θεωρώντας ότι η συντακτική κλάση των μεταβλητών παριστάνεται με το μη-τερματικό σύμβολο (var), η γλώσσα Λ των λ-όρων περιγράφεται ισοδύναμα

⟨term⟩ ::= ⟨var⟩

| (⟨term⟩ ⟨term⟩)

| (λ ⟨var⟩·⟨term⟩)

Παράδειγμα 10.1

Οι παρακάτω είναι λ-όροι:

(x y)

(λx.x)

(λx.((λy.(x y))))

(((λx.x)y)(λx.z))

((λx.(λy.z)) (λx.x))

(λx.((λy.y)(λz.x)))

Συμβάσεις

Για απλοποίηση των λ-όρων και αποφυγή μεγάλου αριθμού παρενθέσεων (με αυστηρή τήρηση ορισμού 10.1) χρησιμοποιούνται οι συμβάσεις

- Εξωτερικές παρενθέσεις δεν γράφονται
  - λx.x συντομογραφία του (λx.x)
- Η εφαρμογή είναι αριστερά προσεταιριστική
  - F M_1 M_2 ... M_n συντομογραφία του (...((F M_1)M_2)... M_n)

Συμβάσεις

- Η αφαίρεση εκτείνεται όσο περισσότερο είναι δυνατό, δηλαδή ως το επόμενο κλείσιμο παρένθεσης ή το τέλος του όρου:
  - λx. M_1 M_2 … M_n συντομογραφία του

    λx. (M_1 M_2 … M_n)

Παράδειγμα 10.2

Ακολουθώντας τις συμβάσεις, οι λ-όροι του παραδείγματος 10.1 γράφονται

$x\ y$

$\lambda x.x$

$\lambda x.\lambda y.x\ y$

$((\lambda x.x)y)(\lambda x.z)$

$(\lambda x.\lambda y.z)\ (\lambda x.x)$

$\lambda x.(\lambda y.y)(\lambda z.x)$

Ορισμός 10.2

Η σχέση ταυτότητας $\equiv$ στο σύνολο των λ-όρων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$x \equiv y \quad \text{αν} \quad x = y$$

$$(M\ N) \equiv (P\ Q) \quad \text{αν } M \equiv P \text{ και } N \equiv Q$$

$$(\lambda x.\ M) \equiv (\lambda y.\ N) \quad \text{αν } x = y \text{ και } M \equiv N$$

Όπου $x = y$ συμβολίζεται η σχέση ισότητας στο σύνολο V (δηλαδή x και y είναι η ίδια μεταβλητή). Αν $M \equiv N$, οι όροι $M,N \in \Lambda$ ονομάζονται ταυτόσημοι (identical)

Μεταβλητές

- Η μεταβλητή x στην αφαίρεση λx.M ονομάζεται δεσμεύουσα μεταβλητή (binding variable)
- Η εμβέλεια (scope) της αφαίρεσης λx είναι ο λ-όρος M, εκτός από τυχόν αφαιρέσεις, που αυτός περιέχει και στις οποίες δεσμεύουσα μεταβλητή είναι πάλι η x.

Μεταβλητές

- Εμφανίσεις της μεταβλητής x που βρίσκονται στην εμβέλεια κάποιου λx ονομάζονται δεσμευμένες (bound).
- Εμφανίσεις, που δεν βρίσκονται στην εμβέλεια κανενός λx ονομάζονται ελεύθερες.

Ορισμός 10.3

Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών (free variables) ενός λ-όρου $M \in \Lambda$ συμβολίζεται με FV(M) και ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$FV(x) = \{x\}$$

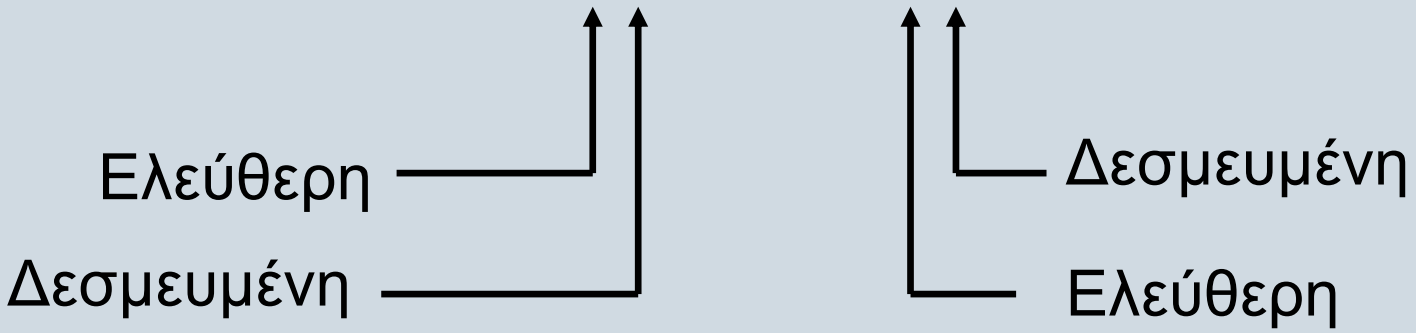
$$FV(M\ N) = FV(M) \cup FV(N)$$

$$FV(\lambda x.M) = FV(M) - \{x\}$$

Παράδειγμα 10.3

Έστω ο παρακάτω όρος:

$$M \equiv (\lambda x.\ y\ x)\ (\lambda y.\ x\ y)$$



Παράδειγμα 10.3

Ακολουθώντας τον ορισμό 10.3

$$
\begin{aligned}
FV(M) &= FV(\lambda x.y\ x)(\lambda y.x\ y) \\
&= FV(\lambda x.y\ x) \cup FV\ (\lambda y.x\ y) \\
&= (FV(y\ x) - \{x\}) \cup (FV(x\ y) - \{y\}) \\
&= ((FV(y) \cup FV(x)) - \{x\}) \cup ((FV(x) \cup FV(y)) - \{y\}) \\
&= (((\{y\} \cup \{x\}) - \{x\}) \cup (((\{x\} \cup \{y\}) - \{y\}) \\
&= ((\{x,y\} - \{x\}) \cup (\{x,y\} - \{y\}) \\
&= \{y\} \cup \{x\} \\
&= \{x,y\}
\end{aligned}
$$

Ορισμός 10.4

Ένας λ-όρος $M \in \Lambda$ ονομάζεται κλειστός λ-όρος (closed λ-term ή combinator) αν $FV(M) = \varnothing$. Το σύνολο των κλειστών λ-όρων συμβολίζεται με Λ^o .

Παράδειγμα 10.4

Οι ακόλουθοι λ-όροι είναι κλειστοί και στη βιβλιογραφία ονομάζονται *πρότυποι κλειστοί όροι* (standard combinators).

$$I \equiv \lambda x.\ x$$

$$K \equiv \lambda x.\ \lambda y.\ x$$

$$K_* \equiv \lambda x.\ \lambda y.\ y$$

$$S \equiv \lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (x\ z)(y\ z)$$

Αντικατάσταση

- Βασική πράξη συμβολικής επεξεργασίας των λ-όρων
- Επηρεάζει ελεύθερες μεταβλητές
- Ο συμβολισμός M[x := N] παριστάνει το αποτέλεσμα αντικατάστασης στον όρο M όλων των ε**λεύθερων εμφανίσεων της μεταβλητής x** με τον όρο N.

Μετατροπές

- Τρία είδη μετατροπής (α,β και η)
- Κάθε είδος μετατροπής περιγράφεται από τον κανόνα $M \rightarrow_{\chi} N$ όπου $\chi \in \{\alpha,\beta,\eta\}$ και $M,N \in \Lambda$. Ο όρος M ονομάζεται χ-redex ή απλά redex και ο N όρος contractum.

Ορισμός 10.5

Μία σχέση ~ πάνω στο Λ ονομάζεται συμβατή (compatible) αν για κάθε $x \in V$ και για κάθε $M,N,P \in \Lambda$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$M \sim N \Rightarrow (M\ P) \sim (N\ P)$$

$$M \sim N \Rightarrow (P\ M) \sim (P\ N)$$

$$M \sim N \Rightarrow (\lambda x.\ M) \sim (\lambda x.\ N)$$

Η σχέση ταυτότητας $\equiv$ μεταξύ των λ-όρων είναι συμβατή.

Ορισμός 10.6

Μία σχέση αναγωγής (reduction relation) είναι μία συμβατή, ανακλαστική και μεταβατική σχέση πάνω στο Λ.

Ορισμός 10.7

Η σχέση $\rightarrow_\alpha$ ορίζεται ως η μικρότερη συμβατή σχέση πάνω στο Λ για την οποία για κάθε $M \in \Lambda$ και για κάθε $x,y \in V$ τέτοια ώστε $y \notin FV(M)$ ισχύει

$$\lambda x.M \rightarrow_\alpha \lambda y.M[x:=y]$$

Ο περιορισμός $y \notin FV(M)$ εξασφαλίζει ότι η μετονομασία της δεσμεύουσας μεταβλητής δεν προκαλεί δέσμευση των μεταβλητών του όρου M, που ήταν αρχικά ελεύθερες.

Ορισμός 10.8

Η σχέση $\rightarrow_\beta$ ορίζεται ως η μικρότερη συμβατή σχέση πάνω στο Λ για την οποία για κάθε M, N$\in$Λ και για κάθε x,y$\in$V ισχύει

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x:=N]$$

Ορισμός 10.9

Η σχέση $\rightarrow_n$ ορίζεται ως η μικρότερη συμβατή σχέση πάνω στο Λ για την οποία για κάθε $M \in \Lambda$ και για κάθε $x \in V$ τέτοια ώστε $x \notin FV(M)$ ισχύει

$$\lambda x.M\ x \rightarrow_n M$$

Μετατροπή, αναγωγή και ισότητα

Οι τρεις κανόνες μετατροπής (α), (β) και (η) ορίζουν τρεις βασικές σχέσεις μετατροπής $\rightarrow_{\alpha}$, $\rightarrow_{\beta}$, $\rightarrow_{\eta}$ για το λ-λογισμό.

Η συνολική σχέση μετατροπής $M \rightarrow N$ θα υποδηλώνει ότι ο όρος M μετατρέπεται σε ένα βήμα στον όρο N με έναν από τους τρεις κανόνες.

Ορισμός 10.10

Με $\rightarrow$ συμβολίζεται η ένωση των σχέσεων $\rightarrow_\alpha$, $\rightarrow_\beta$, $\rightarrow_\eta$, δηλαδή η σχέση $\rightarrow$ ορίζεται ως η μικρότερη σχέση για την οποία ισχύουν:

$$M \rightarrow_\alpha N \Rightarrow M \rightarrow N$$

$$M \rightarrow_\beta N \Rightarrow M \rightarrow N$$

$$M \rightarrow_\eta N \Rightarrow M \rightarrow N$$

Συμβολισμός

$$M \equiv N_o \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow .... \rightarrow N_{n-1} \rightarrow N_n \equiv N$$

Ο όρος Μ μετατρέπεται στον όρο Ν με ακολουθία βημάτων, πιθανώς κενή. Η σχέση συμβολίζεται

$$M \twoheadrightarrow N$$

Αν n =1 τότε η μετατροπή γίνεται σε ένα βήμα

$M \rightarrow N$ και άρα η σχέση $\twoheadrightarrow$ εμπεριέχει την $\rightarrow$.

Αν n=0, η ακολουθία είναι κενή και δε συμβαίνει μετατροπή, δηλαδή $M \equiv N$ και άρα η σχέση $\twoheadrightarrow$ εμπεριέχει την $\equiv$.

Κανονικές μορφές

- λ-λογισμός θεωρείται ως υπολογιστικό μοντέλο επεξεργασίας συναρτήσεων
- Σχέσεις μετατροπής
  - παριστάνουν την πραγματοποίηση βημάτων επεξεργασίας πάνω στους λ-όρους
  - Αποσκοπούν στον υπολογισμό κάποιου αποτελέσματος

β - Μετατροπή

- Κατ’ εξοχήν υπολογιστική πράξη, αφού διαισθητικά παριστάνει εφαρμογή μίας συνάρτησης σε κάποιο όρισμα

α - Μετατροπή

- Δεν προάγει τη διαδικασία υπολογισμού.
- Τα ονόματα των δεσμευμένων μεταβλητών δεν έχουν ουσιαστική σημασία.
- Η μετονομασία των μεταβλητών, που επιτελείται μέσω της α-μετατροπής δεν αποτελεί ουσιαστικό υπολογιστικό βήμα

η – μετατροπή

- Δεν συμβάλλει άμεσα στην υπολογιστική διαδικασία.
- Υλοποιεί έναν μηχανισμό για την υλοποίηση λ-όρων, που παριστάνουν συναρτήσεις

Παρατηρήσεις

- Η σχέση μετατροπής $M \rightarrow N$ παριστάνει ένα βήμα στη διαδικασία υπολογισμού
- Η σχέση $M \twoheadrightarrow N$ παριστάνει (πιθανώς κενή) ακολουθία από τέτοια βήματα.
- Όταν $M \twoheadrightarrow N$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ο όρος N προέκυψε κατά την αποτίμηση του όρου M.
  - Αποτίμηση ενός όρου είναι η διαδοχική εφαρμογή κανόνων μετατροπής σε αυτόν.

Κανονικές μορφές

- Όταν σε έναν όρο Μ δεν εφαρμόζεται κανένα αμιγώς υπολογιστικό βήμα, δηλαδή καμία β- ή η-μετατροπή, τότε η αποτίμηση του θεωρείται ολοκληρωμένη και ο όρος είναι τελικό αποτέλεσμα.
- Τέτοιοι πλήρως αποτιμημένοι όροι ονομάζονται *κανονικές μορφές*.

Ορισμός 10.11

Ένας όρος $M \in \Lambda$ είναι σε κανονική μορφή (normal form) όταν δεν περιέχει κανένα β-redex ή η-redex.

Παράδειγμα 10.11

Οι όροι λx.x και λf.f (λx.x f) είναι σε κανονική μορφή. Αντίθετα ο όρος

λz.(λf.λx.f z x) (λy.y) δεν είναι σε κανονική μορφή, γιατί περιέχει το β-redex:

$(\lambda f.\lambda x.f\ z\ x)(\lambda y.y) \rightarrow_\beta \lambda x.\ (\lambda y.y)\ z\ x$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Υπάρχουν λ-όροι η αποτίμηση των οποίων οδηγεί, μετά από διαδοχικές μετατροπές σε κάποια κανονική μορφή. Υπάρχουν όροι για τους οποίους αυτό δεν ισχύει και η αποτίμηση τους ενδέχεται να συνεχίζεται επ’ άπειρον χωρίς να καταλήγει σε κανονική μορφή.

Ορισμός 10.12

Ένας όρος $M \in \Lambda$ λέμε ότι έχει κανονική μορφή αν για κάποιον όρο $N \in \Lambda$, ισχύει

$M \twoheadrightarrow N$ και ο N είναι σε κανονική μορφή.

Στην περίπτωση αυτή, ο όρος M ονομάζεται κανονικοποιήσιμος (normalizing).

Ορισμός 10.13

Ένας όρος M ονομάζεται ισχυρά κανονικοποιήσιμος (strongly normalizing) αν όλες οι ακολουθίες μετατροπής, που ξεκινούν με τον M καταλήγουν σε κανονική μορφή.

Ορισμός 10.14

Η στρατηγική κατά την οποία επιλέγεται για μετατροπή κάθε φορά το αριστερότερο redex ενός όρου, δηλαδή αυτό του οποίου το σύμβολο λ βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο αριστερά, ονομάζεται στρατηγική της αναγωγής κανονικής σειράς (normal order reduction strategy)

Πρόταση 10.14

Αν $M_1 = M_2$, τότε υπάρχει ένας όρος N τέτοιος ώστε $M_1 \twoheadrightarrow N$ και $M_2 \twoheadrightarrow N$.

Θεώρημα

Σταθερό σημείο – Fixed point

i) Για κάθε όρο $F \in \Lambda$ υπάρχει όρος $X \in \Lambda$ τέτοιος ώστε να ισχύει $F\ X = X$

ii) Υπάρχει ένας τελεστής σταθερού σημείου, δηλαδή ένας όρος $Y \in \Lambda$ τέτοιος ώστε για κάθε $F \in \Lambda$ να ισχύει $F(Y\ F) = Y\ F$.

Ορισμός 10.15

Πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις λογικές τιμές στο λάμβδα-λογισμό;

true ≡ λx. λy. x

false ≡ λx. λy. y

Ορισμός 10.16

Πως αναπαριστούμε τους λογικούς τελεστές;

not ≡ λz. z **false true**

Θεώρημα

i) **not true = false**

ii) **not false = true**

Απόδειξη

(μόνο του πρώτου, παρόμοια γίνεται και του δεύτερου)

not true $\equiv$ (λz.z **false true**) **true**

$\rightarrow_\beta$ **true false true**

$\equiv$ (λx. λy. x) **false true**

$\twoheadrightarrow_\beta$ **false**

Ορισμός 10.17

cond $\equiv \lambda z.\ \lambda x.\ \lambda y.\ z\ x\ y$

if B **then** N **else** M $\equiv$ **cond** B N M

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η παραπάνω δομή πληροί τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Θεώρημα

Για κάθε N, M ισχύουν τα παρακάτω

i) **if true then** N **else** M = N

ii) **if false then** M **else** N = M

Απόδειξη (του πρώτου)

if true then N **else** M ≡ **cond** true N M

≡ (λz. λx. λy. z x y) **true** N M

$\twoheadrightarrow_\beta$ **true** N M

≡ (λx. λy. x) N M

$\twoheadrightarrow_\beta$ N

Διατεταγμένα ζεύγη

Στον λ-λογισμό κωδικοποιούνται διατεταγμένα ζεύγη όρων (που με τη σειρά τους κωδικοποιούν άλλα μαθηματικά αντικείμενα). Μία τέτοια κωδικοποίηση γίνεται μέσω του **pair**. Ο συμβολισμός ⟨N,M⟩ χρησιμοποιείται για διευκόλυνση στη γραφή όρων, που κωδικοποιούν διατεταγμένα ζεύγη.

Ορισμοί 10.18 και 10.19

pair $\equiv \lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ z\ x\ y$

$\langle N, M \rangle \equiv$ **pair** $N\ M$

Οι πράξεις **fst** και **snd**, που επιστρέφουν το πρώτο και το δεύτερο στοιχείο ενός διατεταγμένου ζεύγους κωδικοποιούνται ως:

fst $\equiv \lambda z.\ z$ **true**

snd $\equiv \lambda z.\ z$ **false**

Αποδεικνύεται ότι οι πράξεις πληρούν απαιτούμενες ιδιότητες και άρα η δομή $\langle N,M \rangle$ χρησιμεύει ως διατεταγμένο ζεύγος

Θεώρημα

Για κάθε N, M $\in$ Λ ισχύουν τα εξής:

i) **fst** $\langle N,M \rangle = N$

ii) **snd** $\langle N,M \rangle = M$

Θεώρημα

Απόδειξη (μόνο του πρώτου)

fst $\langle N,M\rangle \equiv (\lambda z.z\ \mathbf{true})\ \langle N,M\rangle$

$\rightarrow_\beta \langle N,M\rangle\ \mathbf{true}$

$\equiv$ pair N M true

$\equiv (\lambda z.\ \lambda x.\ \lambda y.\ z\ x\ y)\ N\ M\ \mathbf{true}$

$\twoheadrightarrow_\beta \mathbf{true}\ N\ M$

$\equiv (\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ N\ M$

$\twoheadrightarrow_\beta\ N$

Φυσικοί αριθμοί

Έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές κωδικοποιήσεις των φυσικών αριθμών στον λ-λογισμό. Η πρώτη και η πιο γνωστή από αυτές είναι τα αριθμοειδή του Church.

Ορισμός 10.20

Έστω φυσικός αριθμός $n \in N$ και όροι $F, A \in \Lambda$. Ο όρος $F^n(A) \in \Lambda$ ορίζεται επαγωγικά ως:

$F^0(A) \equiv A$

$F^{n+1}(A) \equiv F\ (F^n(A))$

Ο ορισμός του $F^n(A)$ θα μπορούσε ισοδύναμα να δοθεί με τη μορφή $F^{n+1}(A) \equiv F^n(F\ A)$.

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι

$F^n(FA) \equiv F\ (F^n(A))$ και $F^n(F^m(A)) \equiv F^{n+m}(A)$.

Ορισμός 10.21

(Αριθμοειδή του Church – Church numerals)
Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται
ένας όρος $c_n \in \Lambda$ ως:
$c_n \equiv \lambda f.\ \lambda x.\ f^n(x)$

Ορισμός 10.21

Το αριθμοειδές, που αντιστοιχεί στον αριθμό 0 είναι το $c_0 \equiv \lambda f.\ \lambda x.\ x$, στον αριθμό 1 το $c_1 \equiv \lambda f.\ \lambda x.\ f\ x$, στον αριθμό 2 το $c_2 \equiv \lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ x)$ κοκ. Όλα τα αριθμοειδή είναι σε β-κανονική μορφή (μάλιστα όλα εκτός του c_1 είναι και σε η-κανονική μορφή). Ούτε όλοι οι λ-όροι είναι αριθμοειδή, ούτε όλοι ανάγονται σε αριθμοειδή.

Ορισμός 10.22

$succ \equiv \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ n\ f\ (f\ x)$

$A_{+} \equiv \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ \lambda x.\ n\ f\ (m\ f\ x)$

$A_{*} \equiv \lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ n\ (m\ f)$

$A_{exp} \equiv \lambda n.\ \lambda m.\ m\ n$

Το θεώρημα 10.7 αποδεικνύει την ορθότητα της κωδικοποίησης πράξεων του παραπάνω ορισμού. Για την απόδειξη του είναι χρήσιμο το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα

Για κάθε $n,m \in \bar{N}$ και για κάθε $x,y \in \Lambda$ ισχύουν τα εξής:

i) $c_n\, f\, (c_m\, f\, x\,) = c_{n+m}\, f\, x$

ii) $(c_n\, x)^m(y) = x^{nm}(y)$

iii) Αν $m>0$, τότε $(c_n)^m(x) = c_n{}^m\, x$

Λήμμα

Απόδειξη

i) $c_n\ f\ (c_m\ f\ x\ ) \equiv (\lambda f.\ \lambda x.f^n(x))\ f\ ((\lambda f.\ \lambda x.f^m(x)))\ f\ x)$

$\twoheadrightarrow_\beta (\lambda f.\ \lambda x.f^n(x))\ f\ (f^m(x))$

$\twoheadrightarrow_\beta (f^n(f^m(x))$

$\equiv f^{n+m}(x)$

$\twoheadleftarrow_\beta (\lambda f.\ \lambda x.f^{n+m}(x))\ f\ x$

$\equiv c_{n+m}\ f\ x$

Λήμμα

Απόδειξη

ii) $(c_n\ x)^{m+1}(y) \equiv c_n\ x((c_n\ x)^m(y))$

$= c_n\ x(x^{nm}(y))$ (επαγωγική υπόθεση)

$\equiv (\lambda f.\ \lambda x.f^n(x))\ x\ (x^{nm}(y))$

$\twoheadrightarrow_\beta x^n(x^{nm}(y))$

$\equiv x^{n+nm}(y)$

$\equiv x^{n(1+m)}(y)$

Λήμμα

Απόδειξη

iii) $(c_n)^{m+1}(x) \equiv c_n\,((c_n)^m(x))$

$= c_n\,(c_n{}^m\,x)$ (επαγωγική υπόθεση)

$\equiv (\lambda f.\ \lambda x.f^n(x))\ (c_n{}^m\,x)$

$\twoheadrightarrow_\beta \lambda y.\ (c_n{}^m\,x)^n(y)$

$= \lambda y.\ x^{nm}\,{}^n(y)$ (λήμμα 10.1(ii))

$\equiv \lambda y.\ x^{nm+1}(y)$

$\leftarrow_\beta (\lambda\, f.\lambda x.\ f^{nm+1}(x))x$

$\equiv c_n{}^{m+1}\,x$

Θεώρημα

Για κάθε n,m $\in$N ισχύουν τα εξής:

i) succ $c_n = c_{n+1}$

ii) $A_+ \; c_n \, c_m = c_{n+m}$

iii) $A_* \; c_n \, c_m = c_{nm}$

iv) Αν m>0 τότε $A_{exp} \; c_n \, c_m = c_n^m$

Θεώρημα

Απόδειξη

i) succ c_n $\equiv (\lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f^n(x))$

$\rightarrow_\beta \lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f^n(x))\ f\ (f\ x)$

$\twoheadrightarrow_\beta \lambda f.\ \lambda x.\ f^n(f\ x)$

$\equiv c_{n+1}$

Θεώρημα

Απόδειξη

ii) $A_+\ c_n\ c_m \equiv (\lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ \lambda x.\ n\ f\ (m\ f\ x))\ c_n\ c_m$

$\twoheadrightarrow_\beta \lambda f.\ \lambda x.\ c_n\ f\ (c_m\ f\ x)$

$= \lambda f.\ \lambda x.\ c_{n+m}\ f\ x$ (λήμμα 10.1 (i))

$\twoheadrightarrow_\eta c_{n+m}$

Θεώρημα

Απόδειξη

iii) $A_* \; c_n \; c_m \equiv (\lambda n.\, \lambda m.\, \lambda f.\, \lambda x.\, n\ (m\ f))\ c_n\ c_m$

$\twoheadrightarrow_\beta \lambda f.\, c_n\ f\ (c_m\ f)$

$\equiv \lambda f.\, (\lambda f.\, \lambda x.\, f^n(x))\ (c_m\ f\ )$

$\rightarrow_\beta \lambda f.\, \lambda x.\, (c_m\ f\ )^n(x)$

$= \lambda f.\, \lambda x.f^{mn}\,(x)$ (λήμμα 10.1 (ii))

$\equiv c_{nm}$

Θεώρημα

Απόδειξη

iv) $A_{exp}\ c_n\ c_m \equiv (\lambda n.\ \lambda m.\ m\ n)\ c_n\ c_m$

$\twoheadrightarrow_\beta c_m\ c_n$

$\equiv (\lambda f.\ \lambda x.f^m(x))\ (c_n\ )$

$\rightarrow_\beta \lambda x.(c_n)^m(x)$

$= \lambda x.c_n{}^m\ x$ (λήμμα 10.1 (iii))

$\rightarrow_n c_n{}^m$

Λάμβδα λογισμός και πέρασμα παραμέτρων

- Η σχέση ομοιότητας του λ-λογισμού με τις γλώσσες προγραμματισμού δεν περιορίζεται στην εκφραστική του ικανότητα ως προγραμματιστικού μοντέλου.
- Οι στρατηγικές αναγωγής λ-όρων είναι πολύ στενά συνδεδεμένες με μεθόδους περάσματος παραμέτρων των γλωσσών προγραμματισμού.

Αναλογία λ-λογισμού και γλωσσών προγραμματισμού

- Οι λ-όροι αντιστοιχούν σε εκφράσεις ή εντολές
- Η αφαίρεση και η εφαρμογή αντιστοιχούν στον ορισμό και την κλήση συναρτήσεων ή διαδικασιών και
- Η διαδικασία της αναγωγής αντιστοιχεί στην αποτίμηση εκφράσεων ή την εκτέλεση εντολών.

Οκνηρή αποτίμηση (lazy evaluation)

- Τερματισμός της αποτίμησης μιας έκφρασης πριν προκύψει πλήρως αποτιμημένο αποτέλεσμα.
- Υποστήριξη από γλώσσες συναρτησιακού προγραμματισμού
  - Haskell και Miranda

Οκνηρή αποτίμηση

- Τερματισμός όταν το αποτέλεσμα είναι τιμή (value).
- Η ακριβής μορφή των τιμών διαφέρει από γλώσσα σε γλώσσα
  - Αριθμητικές και λογικές σταθερές, καθώς και συναρτησιακές αφαιρέσεις είναι τιμές.
- Στον λ-λογισμό μόνο οι αφαιρέσεις θεωρούνται τιμές

Αναγωγή Κανονικής Μορφής

- Η στρατηγική της αναγωγής κανονικής σειράς σχετίζεται στενά με την οκνηρή αποτίμηση.
- Η μετατροπή κάθε φορά του αριστερότερου β-redex σημαίνει ότι δεν έχει προηγηθεί μετατροπή μέσα στον όρο, πάνω στον οποίο εφαρμόζεται η αφαίρεση, που αντιστοιχεί σε αυτό το β – redex.

Αναλογία με Οκνηρή Αποτίμηση

- Κατ' αναλογία στην οκνηρή αποτίμηση μία συνάρτηση καλείται **χωρίς να προηγηθεί αποτίμηση των παραμέτρων της.**
- Στην γλώσσα προγραμματισμού Algol 60, η συμπεριφορά αυτή επιτυγχάνεται με τη μέθοδο του περάσματος παραμέτρων κατ' όνομα (call by name).

Πρόθυμη Αποτίμηση

- Στις γλώσσες αυτές το πέρασμα παραμέτρων γίνεται κατ' αξία (by value) και η τιμή της παραμέτρου g αποτιμάται πριν κληθεί η συνάρτηση f.
- Η κλήση της g οδηγεί σε μη τερματισμό.
- Πρόθυμη αποτίμηση (eager evaluation) είναι η αποτίμηση κατά την οποία οι παράμετροι αποτιμώνται πριν γίνει η κλήση στη συνάρτηση.

Πρόθυμη αποτίμηση στο λ-λογισμό

- Στον λ-λογισμό , το ανάλογο της πρόθυμης αποτίμησης και του περάσματος παραμέτρων κατ’ αξία είναι μία στρατηγική αποτίμησης που κατά την αποτίμηση του όρου (λx.λy.y)Ω θα αποτιμούσε πρώτα τον όρο Ω.

Πρόθυμη αποτίμηση στο λ-λογισμό

- Τέτοιου είδους στρατηγικές προκύπτουν υποχρεωτικά αν στον κανόνα της β-μετατροπής

$$(\lambda x.M)\ N \rightarrow_\beta\ M[\ x:=N\ ]$$

Προσθέσουμε τον περιορισμό ότι ο όρος N πρέπει να είναι τιμή.