



# Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

## Φροντιστήριο 4

Διδάσκων  
Χρήστος Ζαρολιάγκης  
Καθηγητής  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής  
Πανεπιστήμιο Πατρών  
Email: [zaro@ceid.upatras.gr](mailto:zaro@ceid.upatras.gr)



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

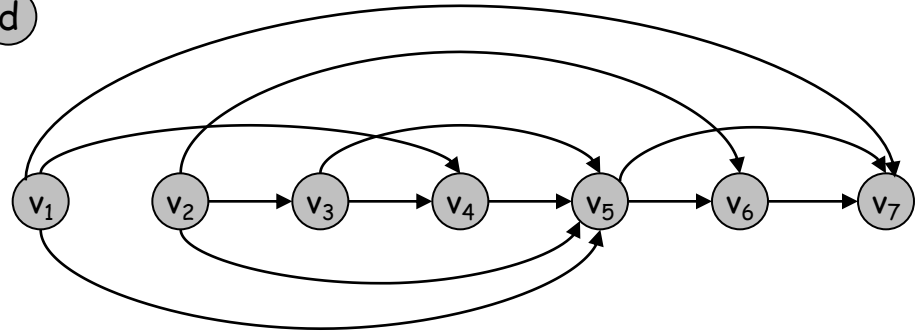
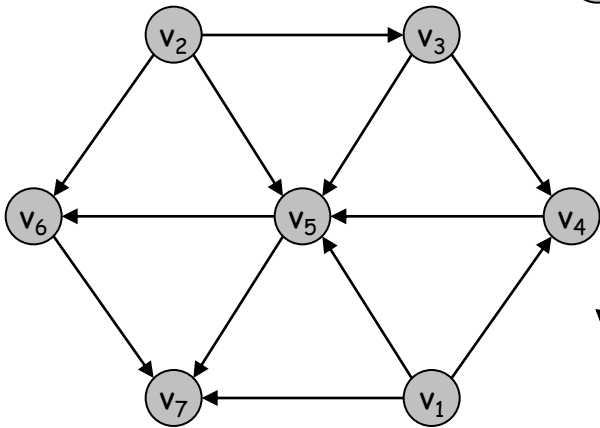
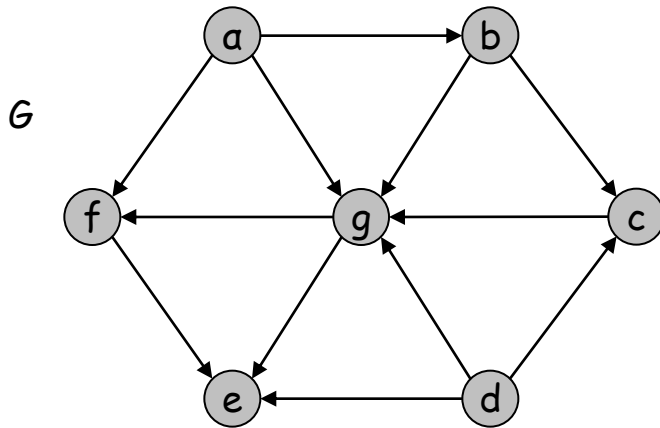


ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Τοπολογική Διάταξη

# Τοπολογική Διάταξη

**Ορισμός.** Μια **τοπολογική διάταξη** ενός κατευθυνόμενου γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι μια διάταξη των κόμβων του  $v_1, v_2, \dots, v_n$  τέτοια ώστε  $\forall (v_i, v_j)$  να ισχύει  $i < j$ .



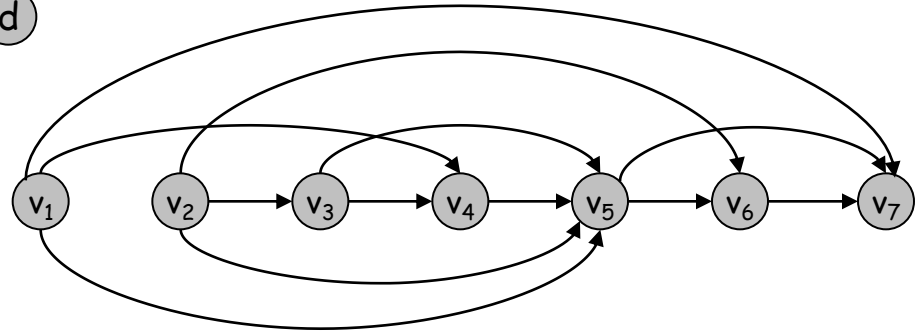
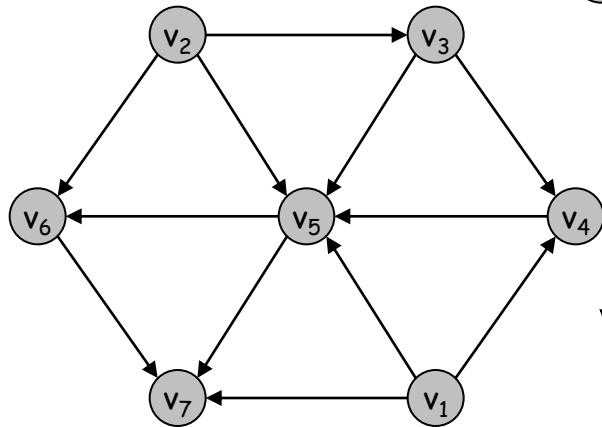
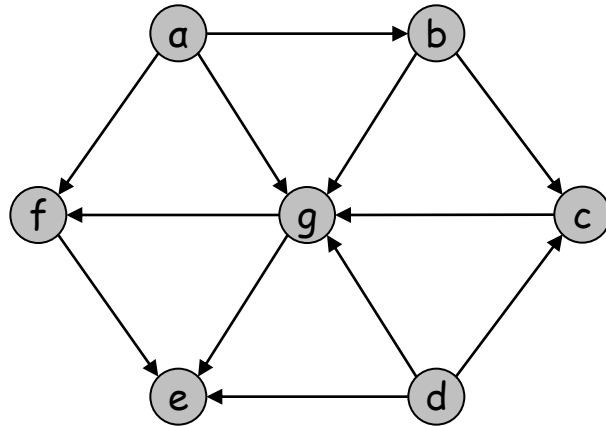
Μια τοπολογική διάταξη

# Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα (DAG) & Τοπολογική Διάταξη

**Ορισμός.** Ένα **DAG** είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κύκλους.

**Θεώρημα.** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν είναι DAG.

ένα DAG



Μια τοπολογική διάταξη

# Αλγόριθμος Τοπολογικής Διάταξης

---

Για τον υπολογισμό μιας τοπολογικής διάταξης του  $G$ :

Βρες έναν κόμβο  $v$  χωρίς εισερχόμενες ακμές και τοποθέτησέ τον στην πρώτη θέση. Αν  $\nexists$  τέτοιος κόμβος, τότε το  $G$  έχει κύκλο.

Διέγραψε τον  $v$  από το  $G$

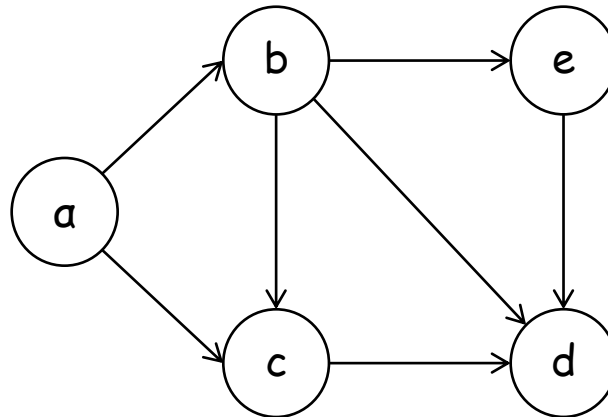
Υπολόγισε αναδρομικά μια τοπολογική διάταξη του  $G - \{v\}$  και πρόσθεσε αυτή τη διάταξη μετά τον κόμβο  $v$

---

# Τοπολογική Διάταξη

## Άσκηση 1:

Βρείτε την τοπολογική διάταξη (εάν υπάρχει) του παρακάτω κατευθυνόμενου γραφήματος.

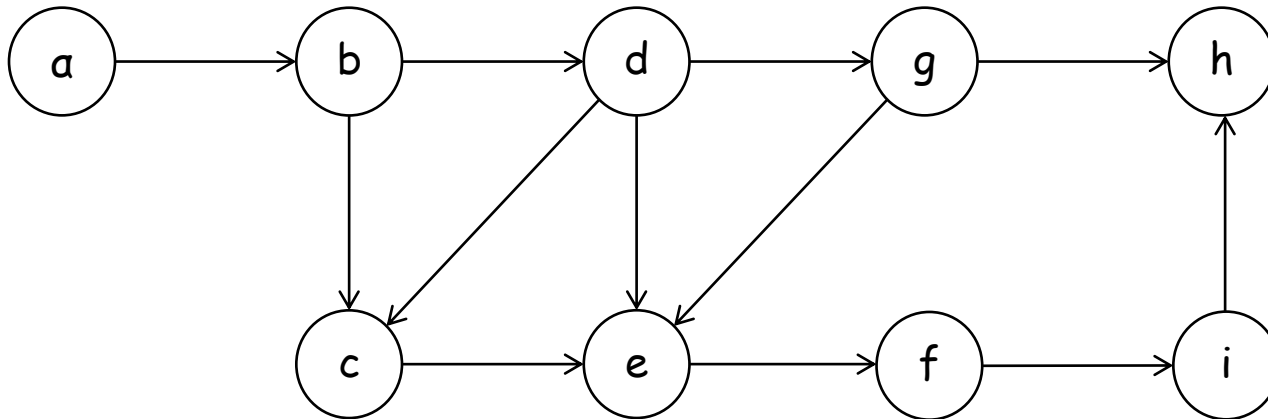




# Τοπολογική Διάταξη

## Άσκηση 2:

Βρείτε την τοπολογική διάταξη (εάν υπάρχει) του παρακάτω κατευθυνόμενου γραφήματος.

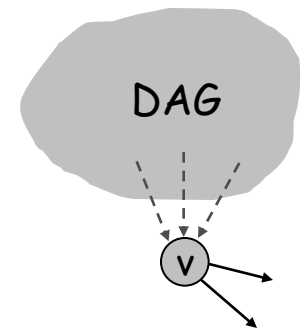


# Εναλλακτικός Αλγόριθμος Τοπολογικής Διάταξης

1. Εκτέλεση DFS στο  $G$  για υπολογισμό χρόνων εγκατάλειψης  $f[v]$ ,  $\forall v \in V$
2. Κάθε κορυφή που εγκαταλείπεται τοποθετείται στην αρχή μιας λίστας.
3. Η διάταξη των  $f[v]$  σε φθίνουσα σειρά αποτελεί την ζητούμενη τοπολογική διάταξη.

**Θεώρημα.** Ο εναλλακτικός αλγόριθμος βρίσκει μια τοπολογική διάταξη ενός DAG σε χρόνο  $O(n+m)$ .

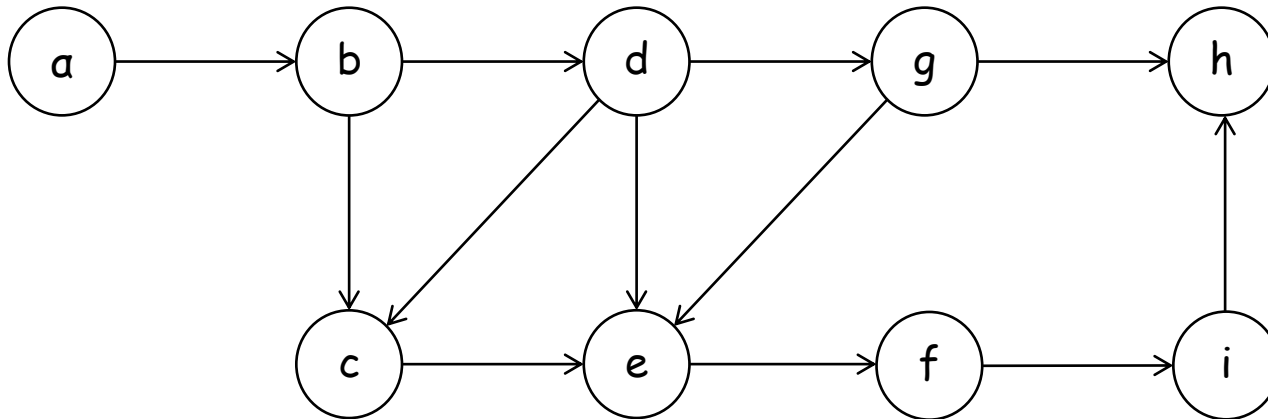
**Ερώτηση.** Πώς μπορεί να τροποποιηθεί ο εναλλακτικός αλγόριθμος έτσι ώστε να δέχεται ως είσοδο ένα οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  και να βρίσκει την τοπολογική διάταξη αν είναι DAG, αλλιώς να σταματά δηλώνοντας ότι το  $G$  έχει κύκλο;



# Τοπολογική Διάταξη

## Άσκηση 3:

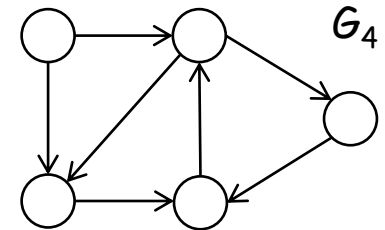
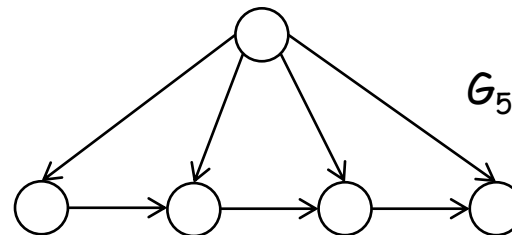
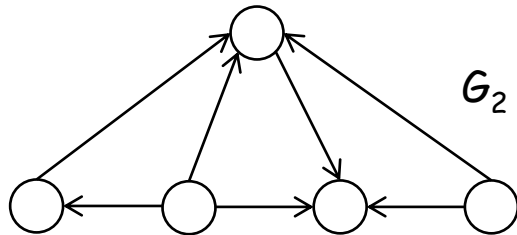
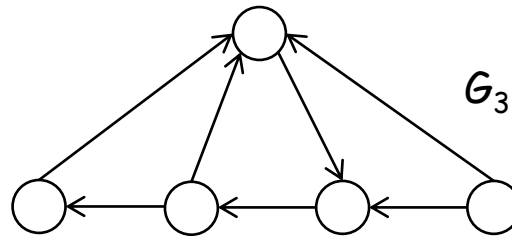
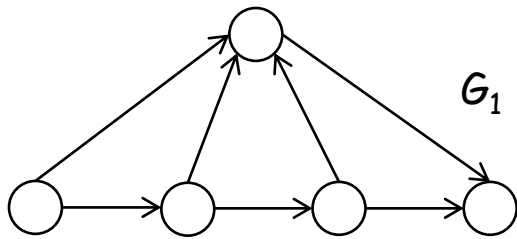
Βρείτε την τοπολογική διάταξη (εάν υπάρχει) του παρακάτω κατευθυνόμενου γραφήματος, χρησιμοποιώντας DFS.



# Τοπολογική Διάταξη

## Άσκηση 4:

Βρείτε μια τοπολογική διάταξη (εάν υπάρχει) των παρακάτω κατευθυνόμενων γραφημάτων:



## Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

## Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

**Ορισμός.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Μια **ισχυρά συνεκτική συνιστώσα (ΙΣΣ)** του  $G$  είναι ένα μέγιστο σύνολο  $U \subseteq V$  κορυφών έτσι ώστε  $\forall u, v \in U, \exists$  διαδρομή από την  $u$  στην  $v$  και από την  $v$  στην  $u$ .

**Παρατήρηση.** Το σύνολο  $U$  ορίζει με μονοσήμαντο τρόπο ένα επαγόμενο υπογράφημα  $I = (U, E')$  του  $G = (V, E)$ , το οποίο είναι ισχυρά συνεκτικό.

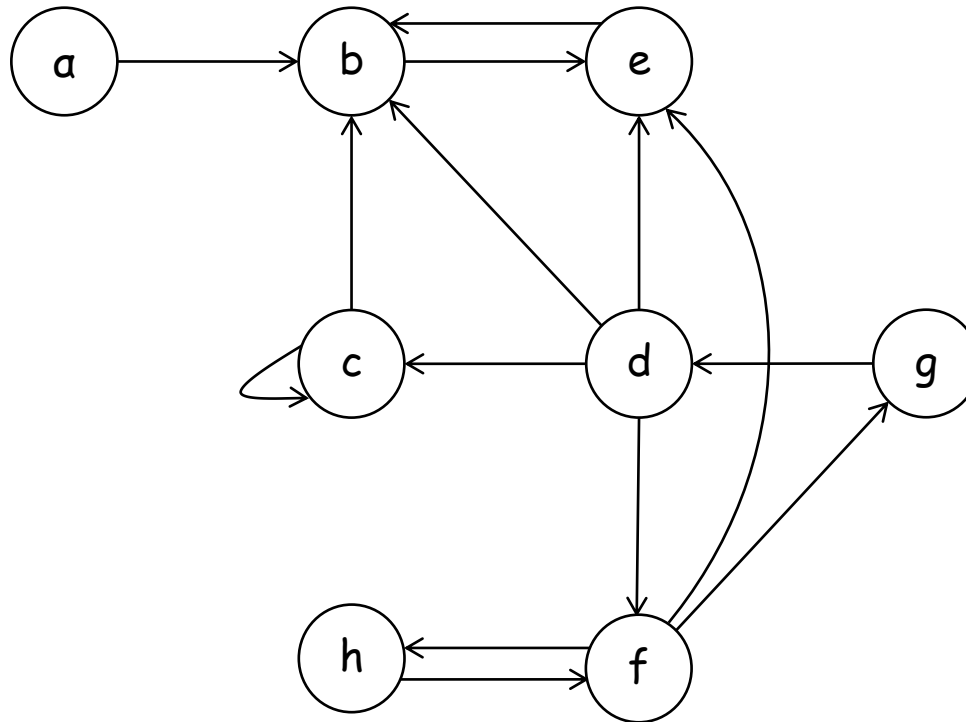
## Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες - Αλγόριθμος

1. Εκτέλεση  $\text{DFS}(G)$  για υπολογισμό χρόνων εγκατάλειψης  $f[u]$ ,  $\forall u \in V$
2. Δημιουργία  $G^{\text{rev}}$
3. Εκτέλεση  $\text{DFS}(G^{\text{rev}})$  αλλά στον κύριο βρόχο for πάρε τις κορυφές σε φθίνουσα διάταξη ως προς  $f[u]$ ,  $\forall u \in V$
4. Οι ΙΣΣ είναι τα δένδρα του δάσους που δημιουργούνται στο βήμα 3.

# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

## Άσκηση 5:

Βρείτε τις ισχυρές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος.

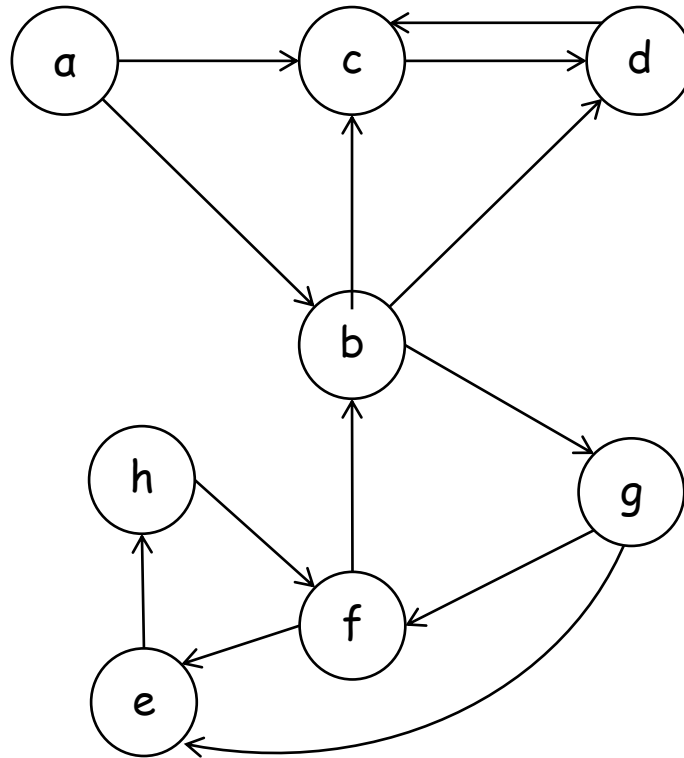




# Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

## Άσκηση 6:

Βρείτε τις ισχυρές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος.



# Τέλος Φροντιστηρίου



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.  
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.