



Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Φροντιστήριο 3

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

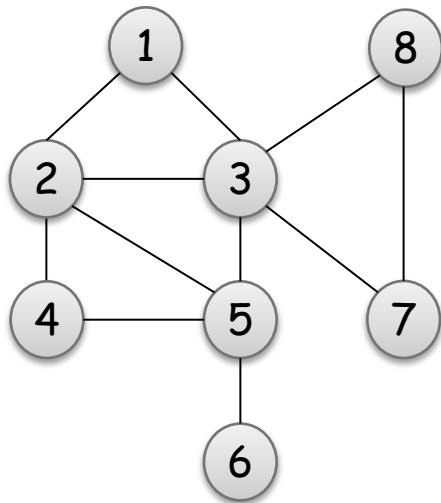


Γραφήματα - Προκαταρκτικά

Μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Μη κατευθυνόμενο γράφημα. $G = (V, E)$

- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E : διακριτές, δυαδικές, **συμμετρικές** σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: $n = |V|$, $m = |E|$



$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$E = \{ 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6 \}$$

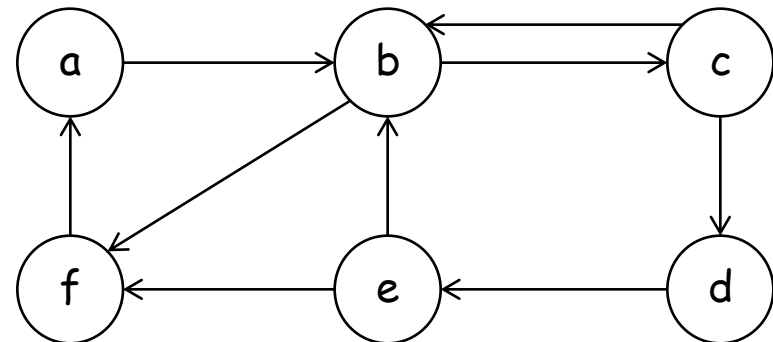
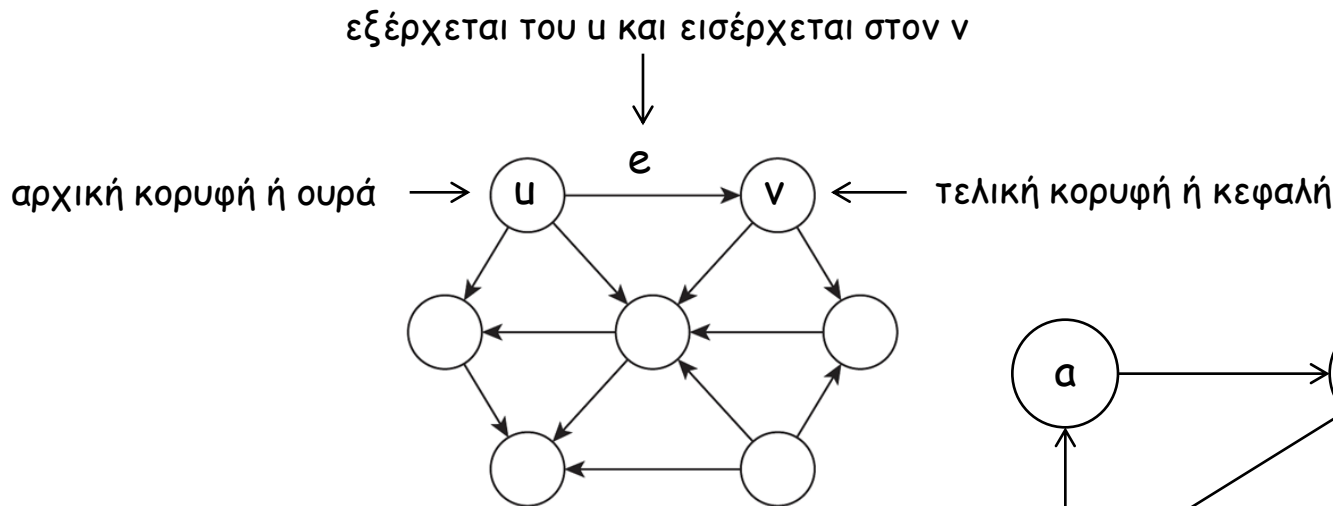
$$n = 8$$

$$m = 11$$

Κατευθυνόμενα γραφήματα

Κατευθυνόμενο γράφημα. $G = (V, E)$

- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E : διακριτές, δυαδικές, **ασύμμετρες** σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: $n = |V|$, $m = |E|$
- Η ακμή $e = (u, v)$ κατευθύνεται από τον κόμβο u στον κόμβο v

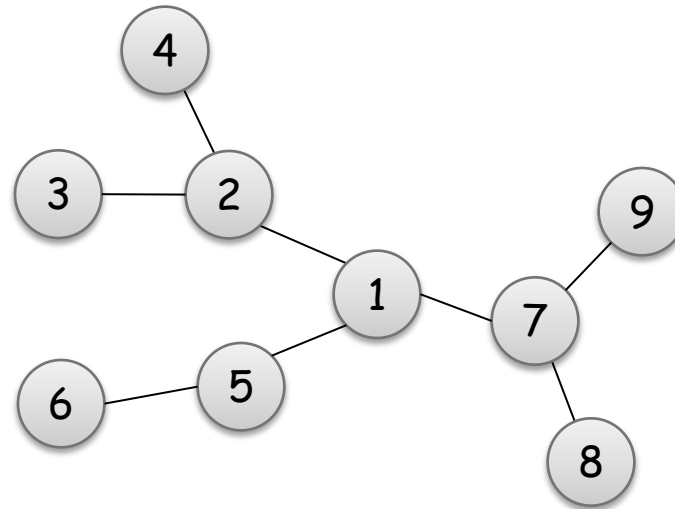


Δένδρα

Ορισμός. Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι **δένδρο** αν είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλο.

Θεώρημα. Έστω G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους. Οποιοσδήποτε δύο από τις ακόλουθες προτάσεις συνεπάγονται την τρίτη:

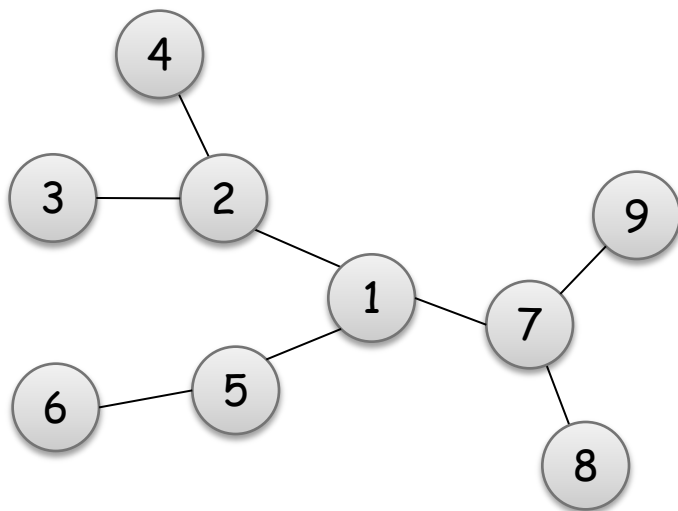
- Το G είναι συνεκτικό.
- Το G δεν περιέχει κύκλο.
- Το G έχει $n-1$ ακμές.



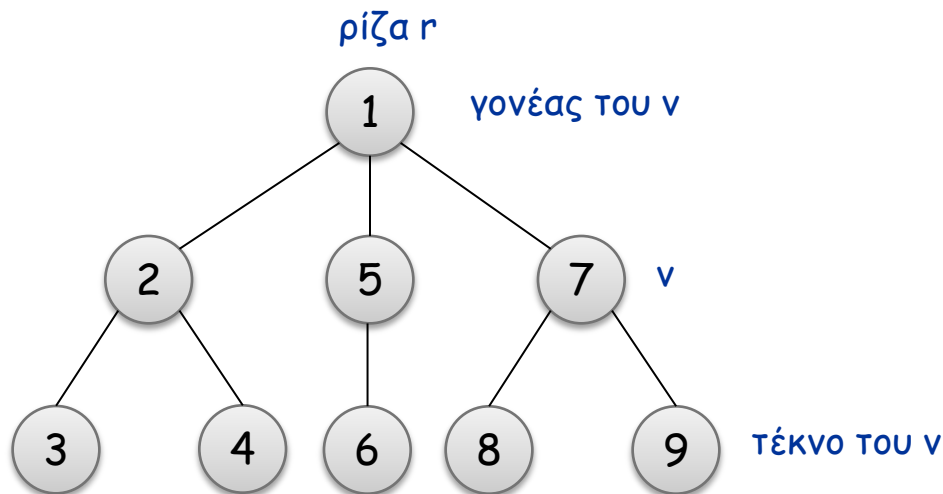
Δένδρα με ρίζα

Δένδρο με ρίζα. Δεδομένου ενός δένδρου T , διαλέξτε έναν κόμβο r ως ρίζα και προσανατόλισε κάθε ακμή έτσι ώστε να απομακρύνεται από τον r .

Σημασία. Μοντελοποιεί μια ιεραρχική δομή.



ένα (ελεύθερο) δένδρο

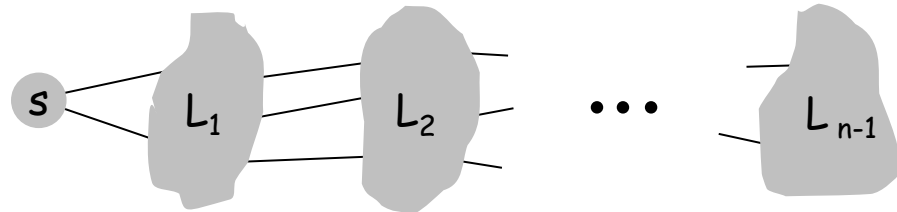


το ίδιο δένδρο, με ρίζα τον 1

Διάτρεξη Γραφήματος

Αναζήτηση πρώτα κατά Πλάτος (BFS)

BFS δαισθητικά. Εξερεύνηση από τον s με προτεραιότητα «πλάτους», δηλ. προς όλες τις πιθανές κατευθύνσεις, προσθέτοντας κόμβους ένα "επίπεδο" κάθε φορά.



Ο αλγόριθμος BFS.

- $L_0 = \{s\}$.
- $L_1 =$ όλοι οι γείτονες του L_0 .
- $L_2 =$ όλοι οι κόμβοι που δεν ανήκουν στο L_0 ή στο L_1 , και έχουν μια ακμή προς ένα κόμβο στο L_1 .
- $L_{i+1} =$ όλοι οι κόμβοι που δεν ανήκουν σε ένα προηγούμενο επίπεδο, και έχουν μια ακμή προς ένα κόμβο στο L_i .

Ιδιότητα. Για κάθε i , το L_i αποτελείται από όλους τους κόμβους σε απόσταση ακριβώς i από τον s . Υπάρχει διαδρομή από τον s στον t αν και μόνο αν ο t εμφανίζεται σε κάποιο επίπεδο.

Αναζήτηση πρώτα κατά Πλάτος (BFS)

```
BFS(s) {
  forall v ∈ V {Discovered(v)=false; π[v]=0;}
  Discovered(s)= true;
  L[0]={s}; i=0;                                     // T = ∅
  while L[i]≠ ∅ {
    αρχικοποίηση κενής λίστας L[i+1]
    forall u ∈ L[i] {
      forall (u,v) ∈ E {
        if Discovered(v)=false then {
          Discovered(v)=true;
          π[v] = u;                                   // T = T ∪ (u,v)
          L[i+1] = L[i+1] ∪ {v}
        }
      }
    }
    i = i + 1
  }
}
```

Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

DFS δαισθητικά. Εξερεύνηση από κάποιον κόμβο u με προτεραιότητα «βάθους»: ακολουθούμε ακμή (u,v) , ανακαλύπτοντας τον v , μετά ακολουθούμε ακμή (v,z) , ανακαλύπτοντας τον z , κοκ.

Ο αλγόριθμος DFS (R : σύνολο κόμβων που έχουν ανακαλυφθεί).

DFS(u):

Σημείωσε ότι το u "Εξερευνήθηκε" και πρόσθεσε το u στην R

For κάθε ακμή (u, v) που πρόσκειται στον κόμβο u

If ο κόμβος v δεν έχει σημειωθεί ότι "Εξερευνήθηκε" **then**

 Κάλεσε αναδρομικά την DFS(v)

Endif

Endfor

Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

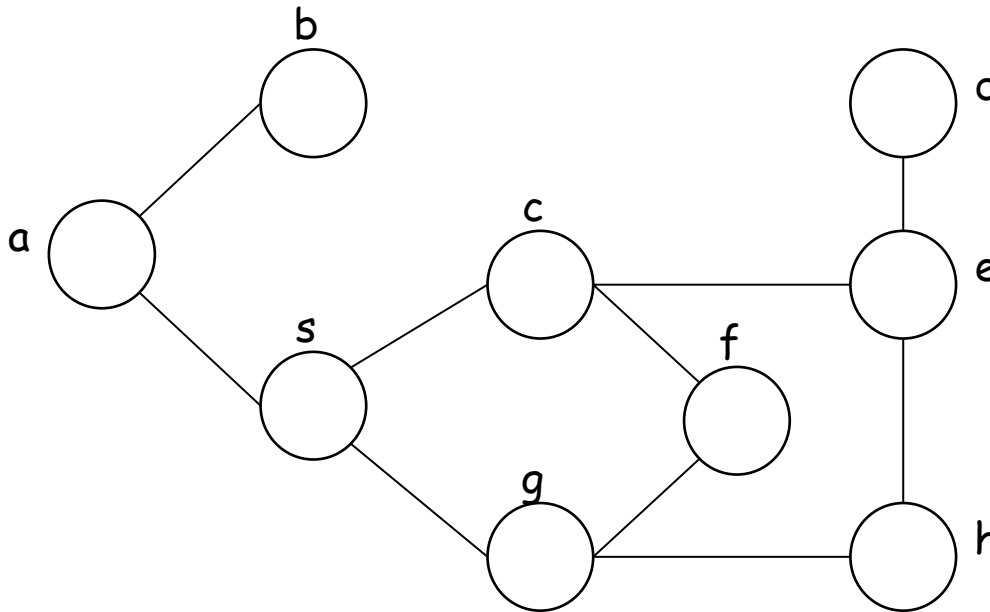
```
DFS(G) {
  forall u ∈ V {Discovered(u)=false; π[u]=0;}
  t=0; // καθολικός μετρητής χρόνου
  forall u ∈ V {if Discovered(u)=false then DFS-Visit(u)}
}

DFS-Visit(u)
  Discovered(u)= true; t=t+1; d[u]=t; // χρόνος ανακάλυψης
  forall (u,v) ∈ E {
    if Discovered(v)=false then {
      Discovered(v)=true;
      π[v] = u; // T = T ∪ (u,v)
      DFS-Visit(v);
    }
  }
  t = t + 1;
  f[u] = t; // χρόνος εγκατάλειψης
}
```

Αναζήτηση πρώτα κατά Πλάτος (BFS)

Άσκηση 1:

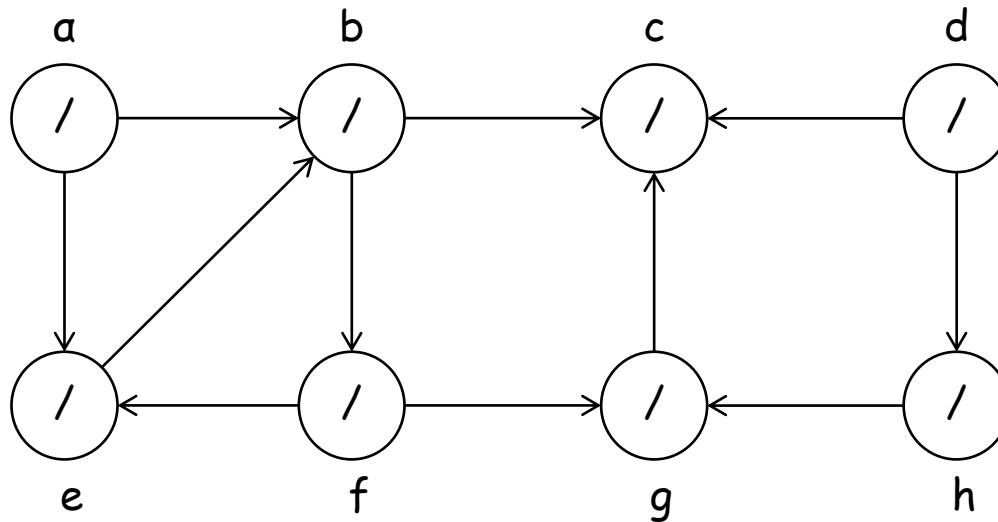
Στο μη κατευθυνόμενο γράφημα του παρακάτω σχήματος να δώσετε το επίπεδο (level) κάθε κόμβου σε μία Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος (ΑΠΠ), η οποία αρχίζει από την κορυφή a.



Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

Άσκηση 2:

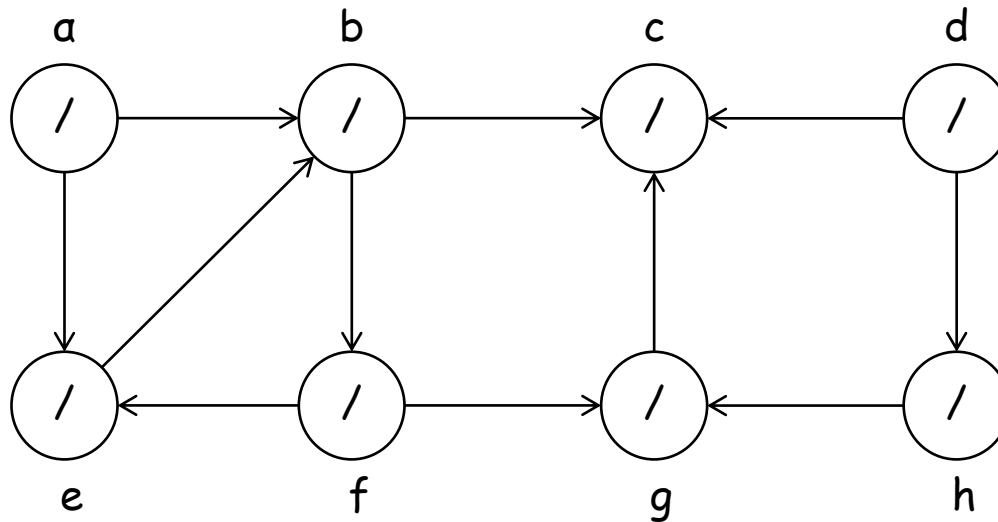
Στο κατευθυνόμενο γράφημα του παρακάτω σχήματος να δώσετε τους χρόνους ανακάλυψης (πρώτης επίσκεψης) και εγκατάλειψης σε μία Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ), η οποία αρχίζει από την κορυφή a. Οι χρόνοι να γραφούν πάνω στο σχήμα, στο εσωτερικό κάθε κορυφής, αριστερά ο χρόνος ανακάλυψης και δεξιά ο χρόνος εγκατάλειψης.



Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

Άσκηση 3:

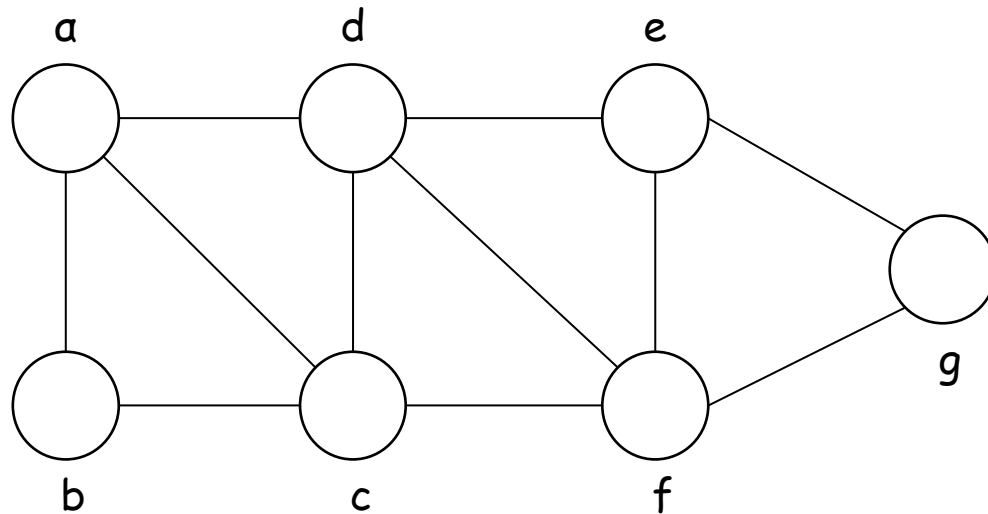
Να κατηγοριοποιήσετε τις ακμές (τόξα) του κατευθυνόμενου γραφήματος σύμφωνα με την ΑΠΒ της Άσκησης 2. Η κατηγοριοποίηση να γραφεί δίπλα σε κάθε ακμή του σχήματος χρησιμοποιώντας τα γράμματα "Δ" (ακμή δένδρου), "Π" (πίσω ακμή), "Ε" (εμπρός ακμή) και "Σ" (διασυνδετική ακμή).



Αναζήτηση πρώτα κατά Πλάτος (BFS)

Άσκηση 4:

Στο μη κατευθυνόμενο γράφημα του παρακάτω σχήματος να δώσετε το επίπεδο (level) κάθε κόμβου σε μία Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος (ΑΠΠ), η οποία αρχίζει από την κορυφή α.



Αναζήτηση πρώτα κατά Βάθος (DFS)

Άσκηση 5:

Δίνεται κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$. Βρείτε έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που να ελέγχει αν το G έχει κύκλο.

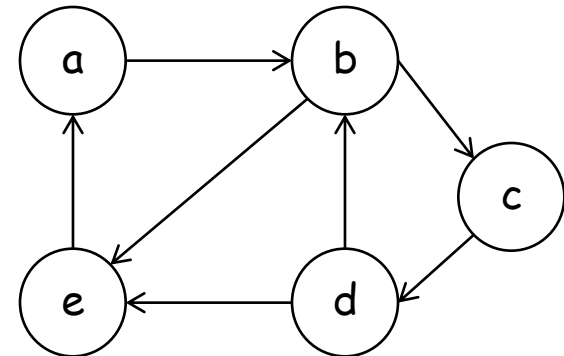
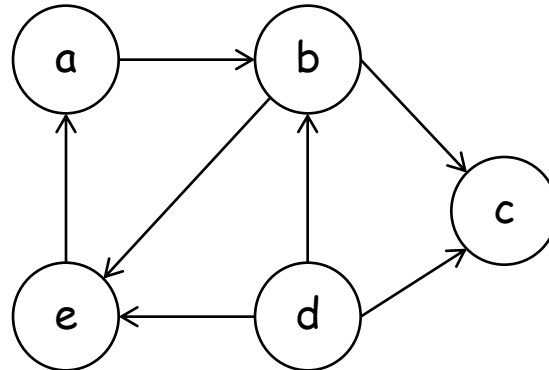
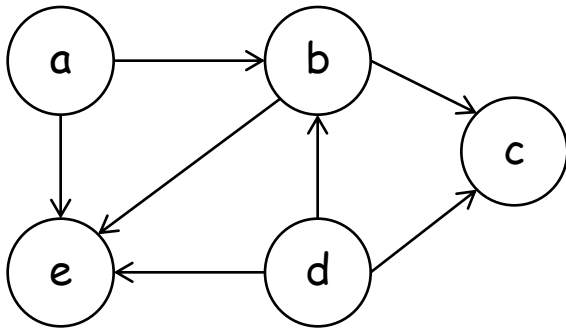
ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ.

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι

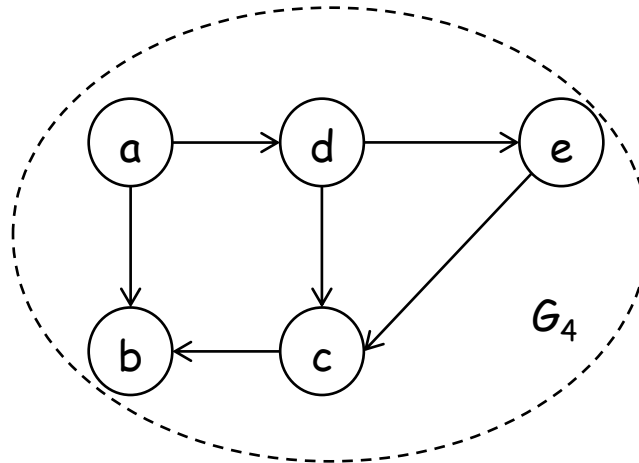
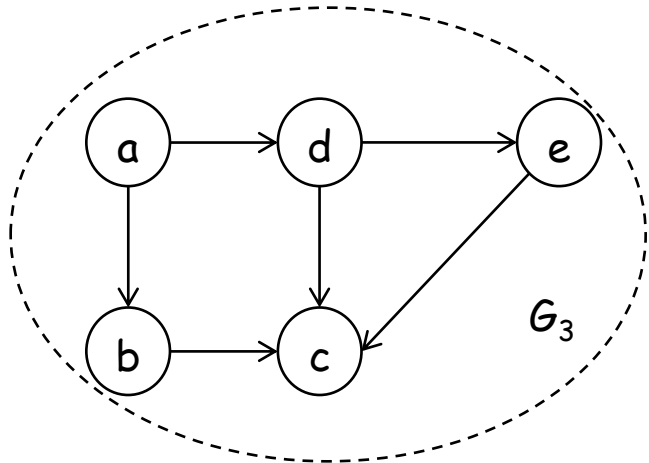
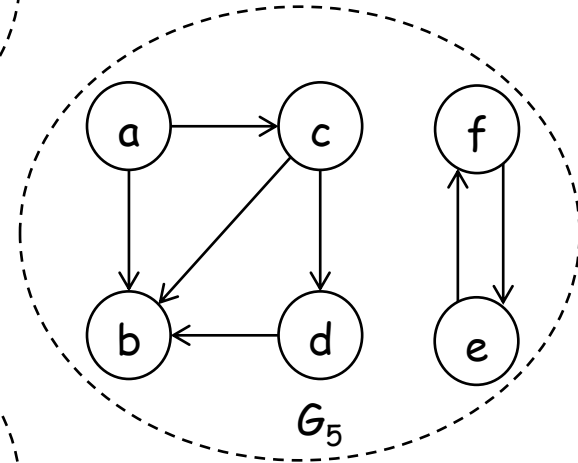
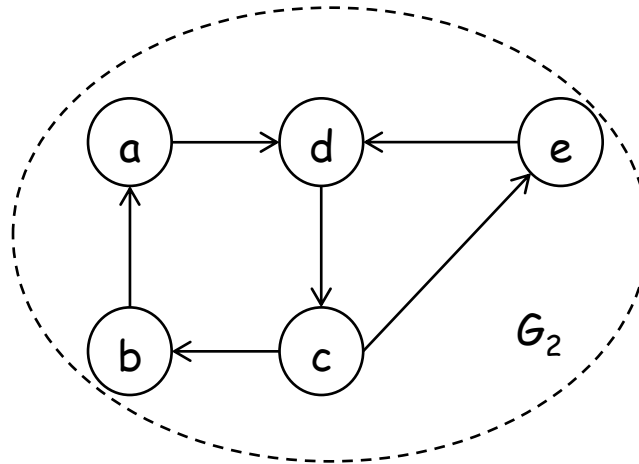
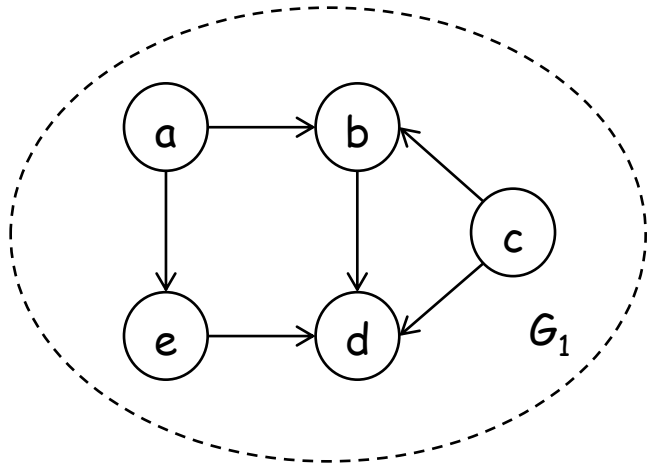
- **Ασθενώς συνεκτικό**, αν για κάθε ζευγάρι κόμβων u και v , υπάρχει ημιδιαδρομή από τον u στον v
- **Μονομερώς συνεκτικό**, αν για κάθε ζευγάρι κόμβων u και v , είτε υπάρχει διαδρομή από τον u στον v , είτε υπάρχει διαδρομή από τον v στον u
- **Ισχυρά συνεκτικό**, αν για κάθε ζευγάρι κόμβων u και v , υπάρχει διαδρομή από τον u στον v



ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Άσκηση 6:

Βρείτε το είδος συνεκτικότητας των παρακάτω κατευθυνόμενων γραφημάτων G_1 , G_2 , G_3 , G_4 και G_5 .

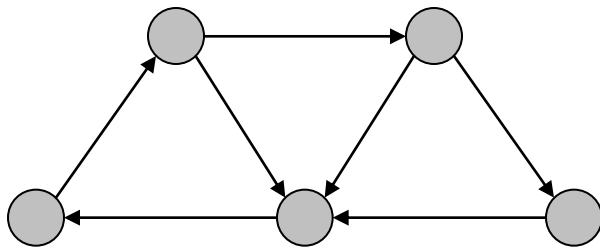


ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

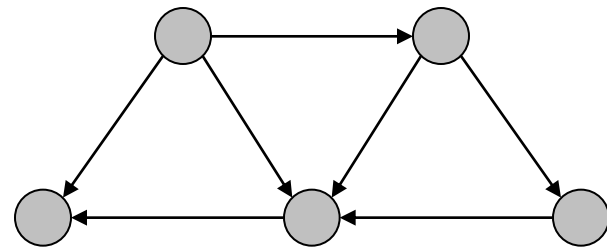
Θεώρημα. Μπορεί να καθοριστεί αν το G είναι ισχυρά συνεκτικό σε χρόνο $O(m+n)$.

- Επέλεξε οποιονδήποτε κόμβο s .
- Εκτέλεσε BFS από τον s στο G .
- Εκτέλεσε BFS από τον s στον G^{rev} .
- Επέστρεψε «αληθές» αν και μόνο αν έγινε προσπέλαση όλων των κόμβων σε κάθε εκτέλεση του BFS.

Αντιστροφή κατεύθυνσης κάθε ακμής του G



Ισχυρά συνεκτικό

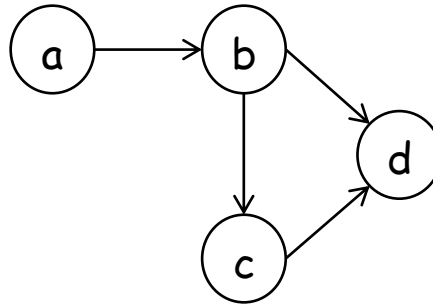


Όχι ισχυρά συνεκτικό

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Άσκηση 7:

Βρείτε αν το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό ή όχι, χρησιμοποιώντας Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος (BFS).



Τέλος Φροντιστηρίου



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης *Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1]* ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.