Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 7η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και ανάλυση του αλγορίθμου τοπολογικής διάταξης
- Περιγραφή και ανάλυση του αλγορίθμου εύρεσης ισχυρά συνεκτικών συνιστώσεων

Περιεχόμενα ενότητας

- Τοπολογική Διάταξη

- Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Αλγόριθμοι Γραφημάτων

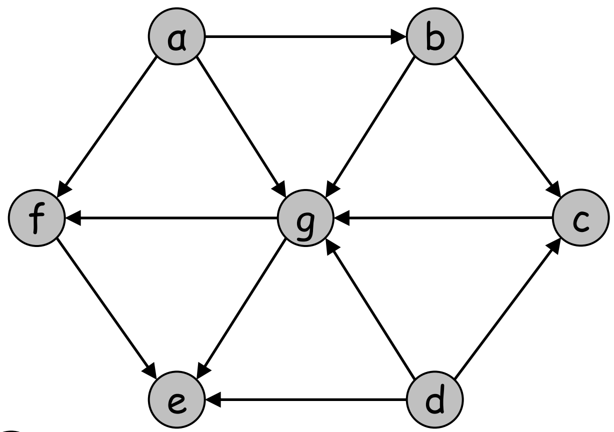
- Τοπολογική Διάταξη
- Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

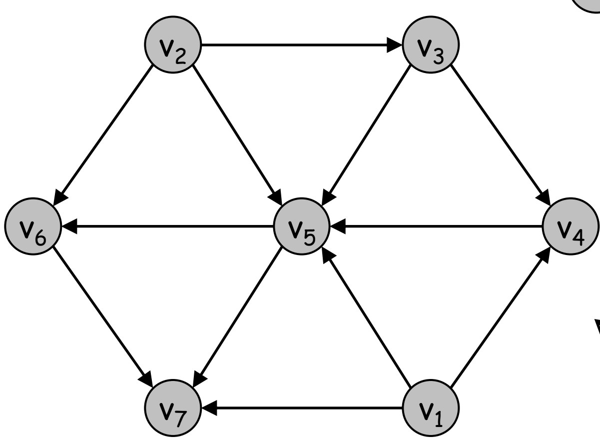
Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα και Τοπολογική Διάταξη

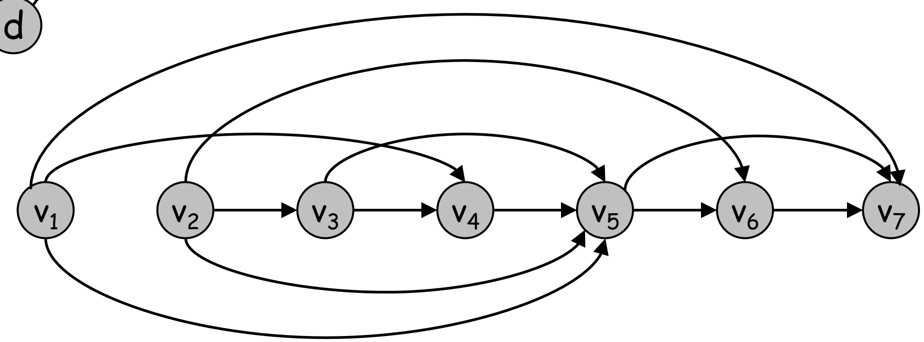
Τοπολογική Διάταξη

Ορισμός. Μια τοπολογική διάταξη ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια διάταξη των κόμβων του $v_1, v_2, \ldots, v_n$ τέτοια ώστε $\forall$ (v_i, v_j) να ισχύει $i < j$.

G





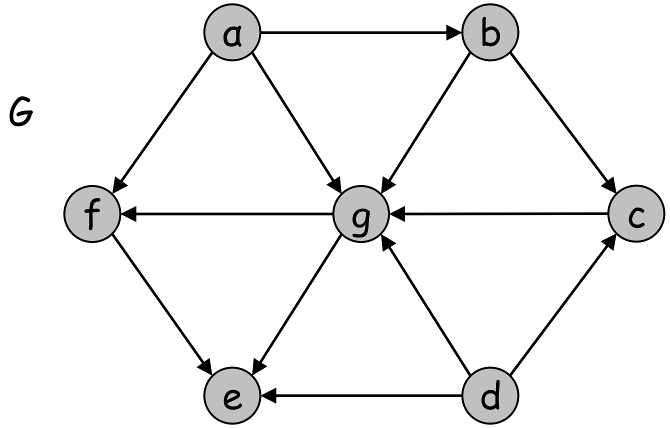


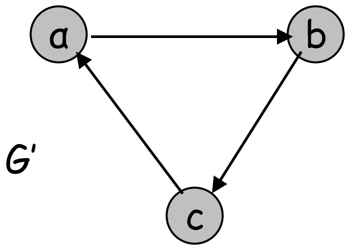
Μια τοπολογική διάταξη

Τοπολογική Διάταξη

Ορισμός. Μια τοπολογική διάταξη ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια διάταξη των κόμβων του $v_1, v_2, \ldots, v_n$ τέτοια ώστε $\forall\ (v_i, v_j)$ να ισχύει $i < j$.

Ερώτηση. Έχουν όλα τα κατευθυνόμενα γραφήματα τοπολογική διάταξη;





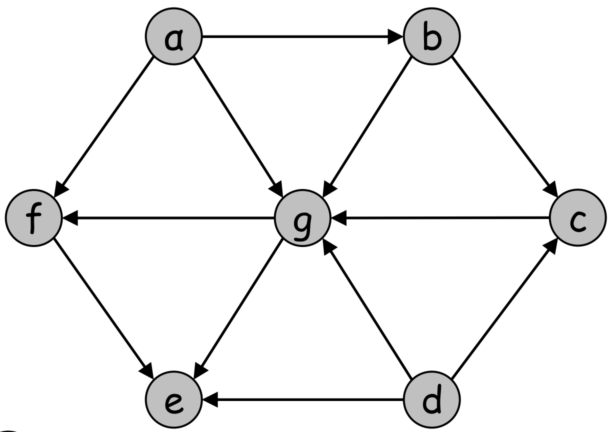
Το G' δεν έχει τοπολογική διάταξη, γιατί περιέχει κύκλο

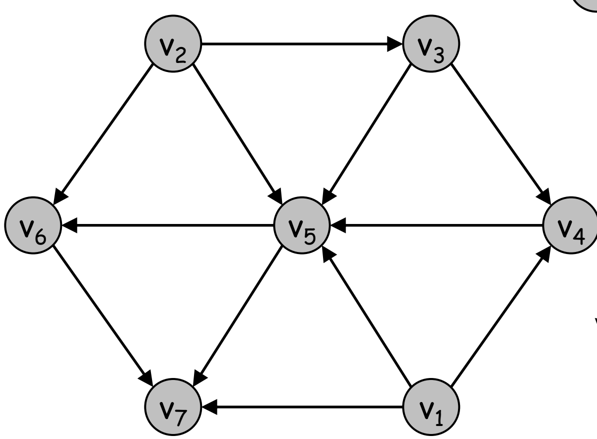
Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα (DAG) & Τοπολογική Διάταξη

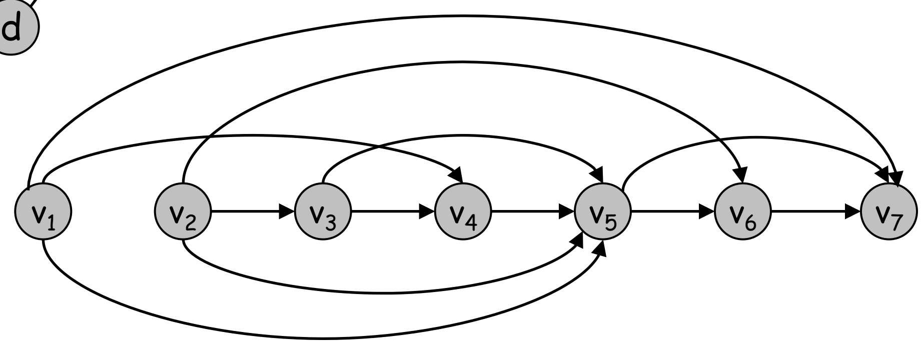
Ορισμός. Ένα DAG είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κύκλους.

Θεώρημα. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν είναι DAG.

ένα DAG







Μια τοπολογική διάταξη

Εφαρμογές - Περιορισμοί προτεραιότητας

Περιορισμοί προτεραιότητας. Η ακμή (v_i, v_j) σημαίνει ότι η εργασία v_i πρέπει να προηγηθεί της v_j.

Εφαρμογές.

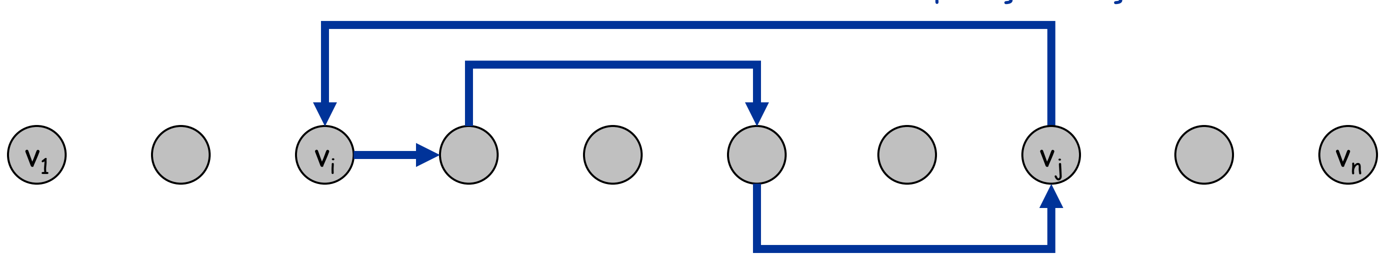
- Γράφημα προαπαιτούμενων μαθημάτων: το μάθημα v_i πρέπει να διδαχθεί πριν από το μάθημα v_j.
- Μεταγλώττιση: το κομμάτι κώδικα v_i πρέπει να μεταγλωττιστεί πριν από το v_j.
- Διοχέτευση υπολογιστικών εργασιών: η έξοδος της εργασίας v_i χρειάζεται για τον προσδιορισμό της εισόδου της εργασίας v_j.
- Υπολογισμός παραστάσεων, π.χ. $((a + b) * (c + d) + e) * (a + b)$

Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα

Λήμμα 1. Αν το *G* έχει τοπολογική διάταξη, τότε το *G* είναι ένα DAG.

Απόδειξη. (με άτοπο)

- Υποθέστε ότι το *G* έχει τοπολογική διάταξη $v_1, \ldots, v_n$ και ότι το *G* έχει επίσης έναν κατευθυνόμενο κύκλο *C*.
- Έστω v_i ο κόμβος με τον μικρότερο δείκτη στον *C*, και έστω v_j ο κόμβος ακριβώς πριν από τον v_i. Άρα η (v_j, v_i) είναι μια ακμή.
- Από την επιλογή του i, έχουμε $i < j$.
- Αντιθέτως, αφού η (v_j, v_i) είναι ακμή, και $v_1, \ldots, v_n$ είναι τοπολογική διάταξη, πρέπει να ισχύει $j < i$, άτοπο. ▪



Η υποτιθέμενη τοπολογική διάταξη: $v_1, \ldots, v_n$

Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα

Λήμμα 1. Αν το G έχει τοπολογική διάταξη, τότε το G είναι ένα DAG.

Ερώτηση 1. *Έχει κάθε DAG μια τοπολογική διάταξη;*

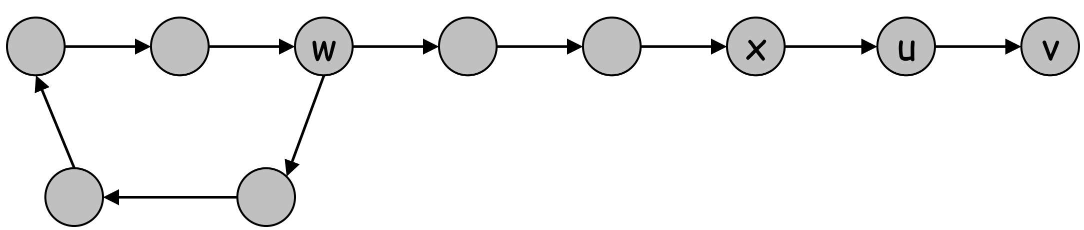
Ερώτηση 2. *Αν ναι, πως υπολογίζουμε μια;*

Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα

Λήμμα 2. Αν το G είναι DAG, τότε το G έχει έναν κόμβο χωρίς εισερχόμενες ακμές.

Απόδειξη. (με άτοπο)

- Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα DAG και κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον μια εισερχόμενη ακμή.
- Διαλέγουμε έναν κόμβο v, και ακολουθούμε οπισθόδρομες ακμές από τον v. Αφού ο v έχει τουλάχιστον μια εισερχόμενη ακμή (u, v) μπορούμε να προχωρήσουμε οπισθόδρομα στον u.
- Κατόπιν, αφού ο u έχει τουλάχιστον μια εισερχόμενη ακμή (x, u), προχωράμε οπισθόδρομα από τον x.
- Συνεχίζουμε μέχρι να συναντήσουμε έναν κόμβο, έστω w, δύο φορές.
- Έστω C η ακολουθία των κόμβων μεταξύ των δύο επισκέψεων του w. Η ακολουθία C είναι ένας κύκλος. Άτοπο ▪

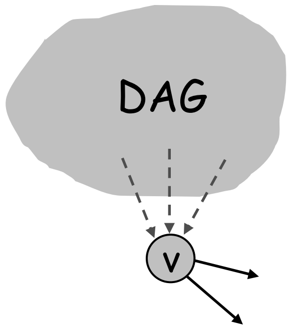


Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα

Λήμμα 3. Αν το G είναι DAG, τότε το G έχει τοπολογική διάταξη.

Απόδειξη. (με επαγωγή στο n)

- Αρχική περίπτωση: ισχύει για $n = 1$.
- Δεδομένου ενός DAG με $n > 1$ κόμβους, βρίσκουμε (από Λήμμα 2) έναν κόμβο v χωρίς εισερχόμενες ακμές.
- Το G - { v } είναι DAG, αφού η διαγραφή του v δεν δημιουργεί κύκλους.
- Από την υπόθεση της επαγωγής, το G - { v } έχει τοπολογική διάταξη.
- Τοποθετούμε τον v πρώτο στην τοπολογική διάταξη. Μετά προσθέτουμε τους κόμβους του G - { v } σε τοπολογική διάταξη. Αυτό είναι έγκυρο αφού ο v δεν έχει εισερχόμενες ακμές. ▪



Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα

Θεώρημα. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν είναι DAG.

Απόδειξη. Από Λήμματα 1 και 3. ▪

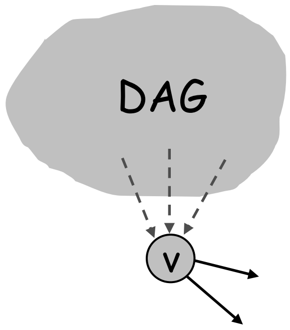
Αλγόριθμος Τοπολογικής Διάταξης

Για τον υπολογισμό μιας τοπολογικής διάταξης του G:

Βρες έναν κόμβο v χωρίς εισερχόμενες ακμές και τοποθέτησέ τον στην πρώτη θέση . Αν $\nexists$ τέτοιος κόμβος, τότε το G έχει κύκλο

Διέγραψε τον v από το G

Υπολόγισε αναδρομικά μια τοπολογική διάταξη του $G - \{v\}$ και πρόσθεσε αυτή τη διάταξη μετά τον κόμβο v



Αλγόριθμος Τοπολογικής Διάταξης – Χρόνος εκτέλεσης

Θεώρημα. Ο αλγόριθμος βρίσκει (εφόσον υπάρχει) μια τοπολογική διάταξη ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G σε χρόνο $O(m + n)$.

Απόδειξη.

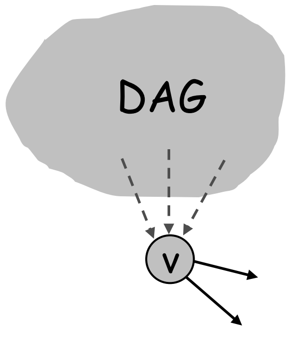
- Ορθότητα: Λήμμα 2.
- Διατηρούμε τις παρακάτω πληροφορίες:
  - `count[w]` = αριθμός απομενουσών εισερχόμενων ακμών του w
  - S = σύνολο απομενόντων κόμβων χωρίς εισερχόμενες ακμές (λίστα)
- Αρχικοποίηση: $O(m + n)$ με μια μοναδική σάρωση του γραφήματος.
- Ενημέρωση: για τη διαγραφή του v
  - Αφαίρεση του v από το S ($O(1)$ χρόνος)
  - Μείωση του `count[w]` για όλες τις ακμές από τον v στον w, και πρόσθεση του w στο S αν το `count[w]` φτάσει στο 0
  - Αυτό εκτελείται σε $O(1)$ χρόνο ανά ακμή ▪

Εναλλακτικός Αλγόριθμος Τοπολογικής Διάταξης

1. Εκτέλεση DFS στο G για υπολογισμό χρόνων εγκατάλειψης $f[v]$, $\forall\, v \in V$
2. Κάθε κορυφή που εγκαταλείπεται τοποθετείται στην αρχή μιας λίστας.
3. Η διάταξη των $f[v]$ σε φθίνουσα σειρά αποτελεί την ζητούμενη τοπολογική διάταξη.

Θεώρημα. Ο εναλλακτικός αλγόριθμος βρίσκει μια τοπολογική διάταξη ενός DAG σε χρόνο $O(n+m)$.

Ερώτηση. Πώς μπορεί να τροποποιηθεί ο εναλλακτικός αλγόριθμος έτσι ώστε να δέχεται ως είσοδο ένα οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα G και να βρίσκει την τοπολογική διάταξη αν είναι DAG, αλλιώς να σταματά δηλώνοντας ότι το G έχει κύκλο;

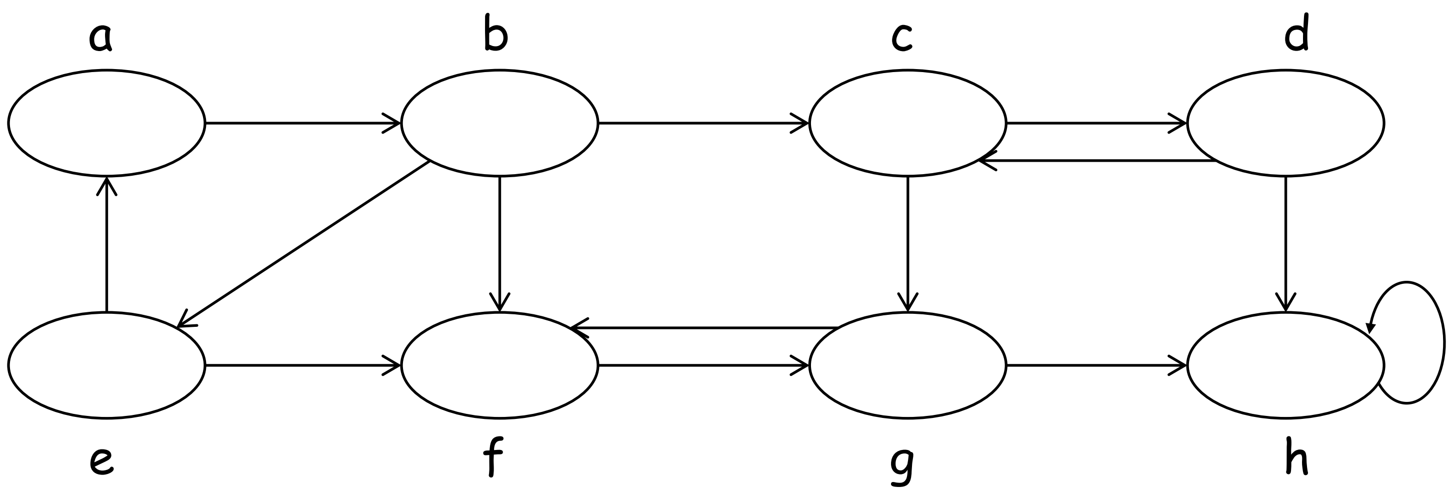


Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Ορισμός. Έστω $G = (V,E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα (ΙΣΣ) του G είναι ένα μέγιστο σύνολο $U \subseteq V$ κορυφών έτσι ώστε $\forall$ u,v $\in$ V, $\exists$ διαδρομή από την u στην v και από την v στην u.

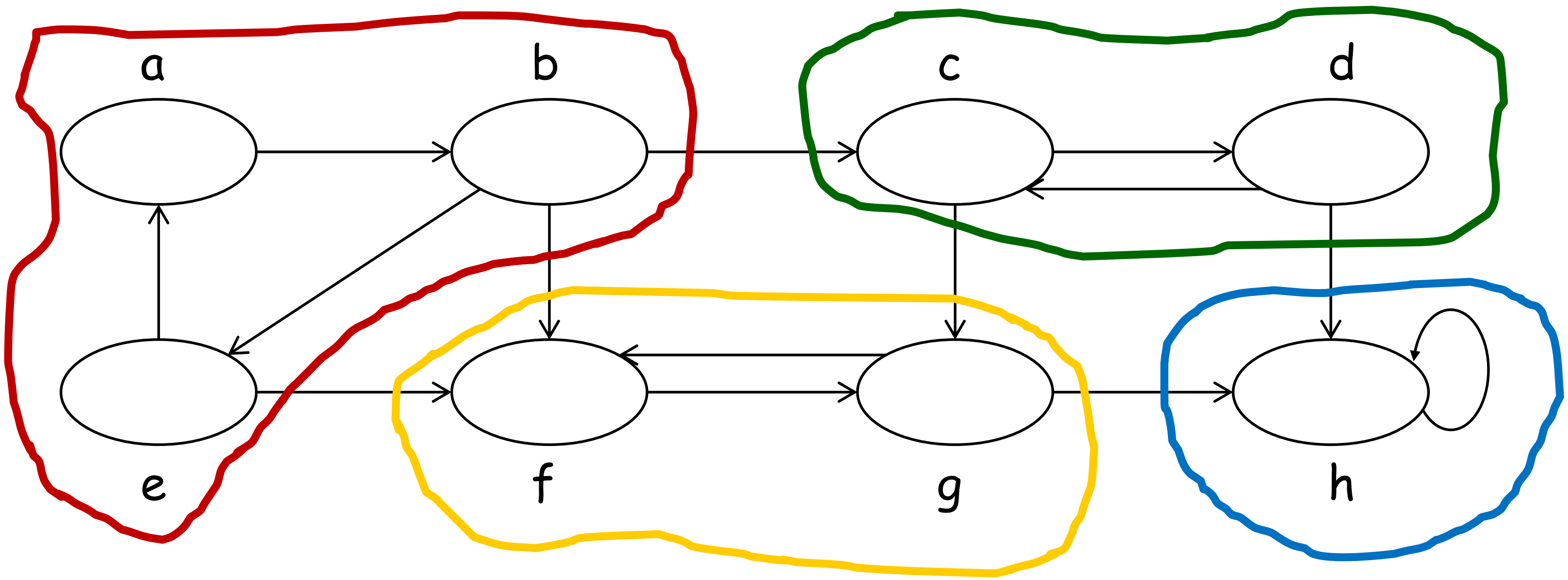
Παρατήρηση. Το σύνολο U ορίζει με μονοσήμαντο τρόπο ένα επαγώμενο υπογράφημα $I = (U,E')$ του $G = (V, E)$, το οποίο είναι ισχυρά συνεκτικό.



Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Ορισμός. Έστω $G = (V,E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα (ΙΣΣ) του G είναι ένα μέγιστο σύνολο $U \subseteq V$ κορυφών έτσι ώστε $\forall$ u,v $\in$ V, $\exists$ διαδρομή από την u στην v και από την v στην u.

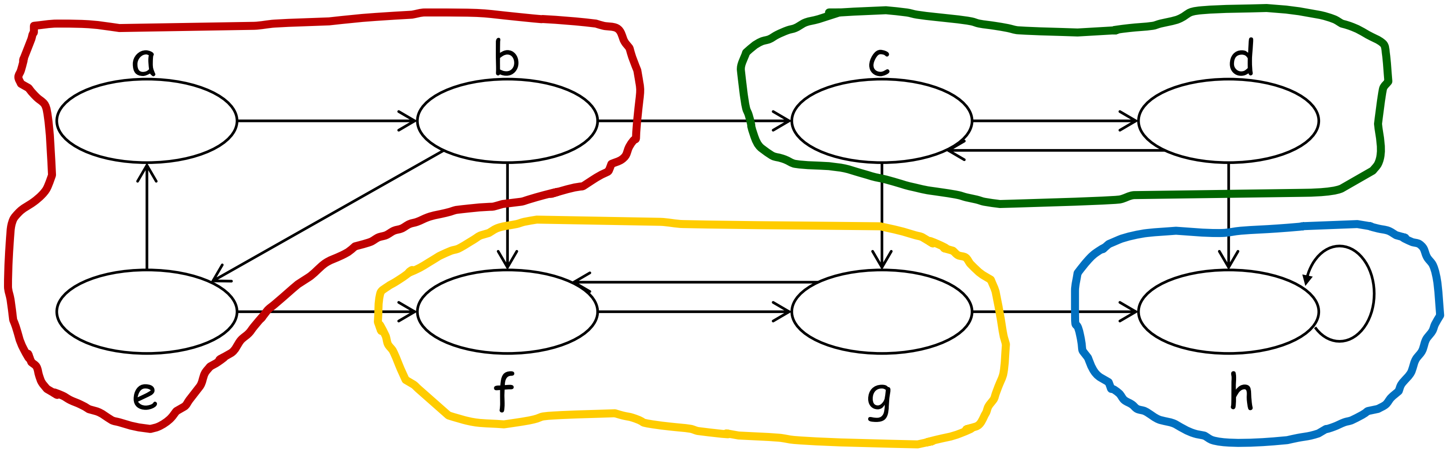
Παρατήρηση. Το σύνολο U ορίζει με μονοσήμαντο τρόπο ένα επαγώμενο υπογράφημα $I = (U,E')$ του $G = (V, E)$, το οποίο είναι ισχυρά συνεκτικό.

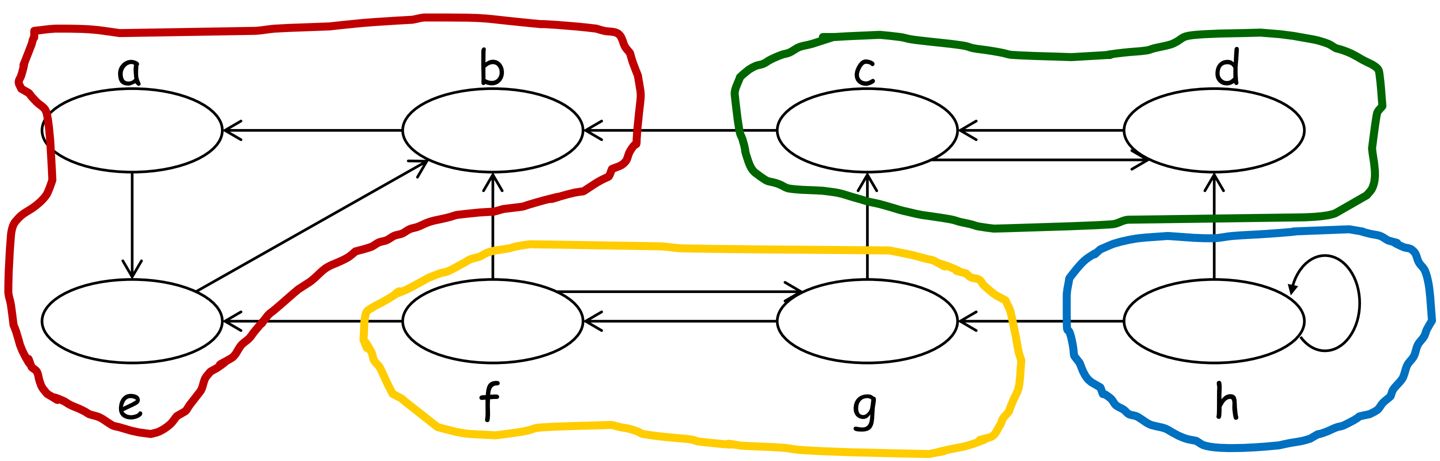


Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες

Ορισμός. Το γράφημα $G^{rev} = (V, E^{rev})$, με $E^{rev} = \{(u,v): (v,u) \in E\}$, καλείται ανάστροφο γράφημα ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V,E)$

Παρατήρηση. G και G^{rev} έχουν ακριβώς τις ίδιες ΙΣΣ.

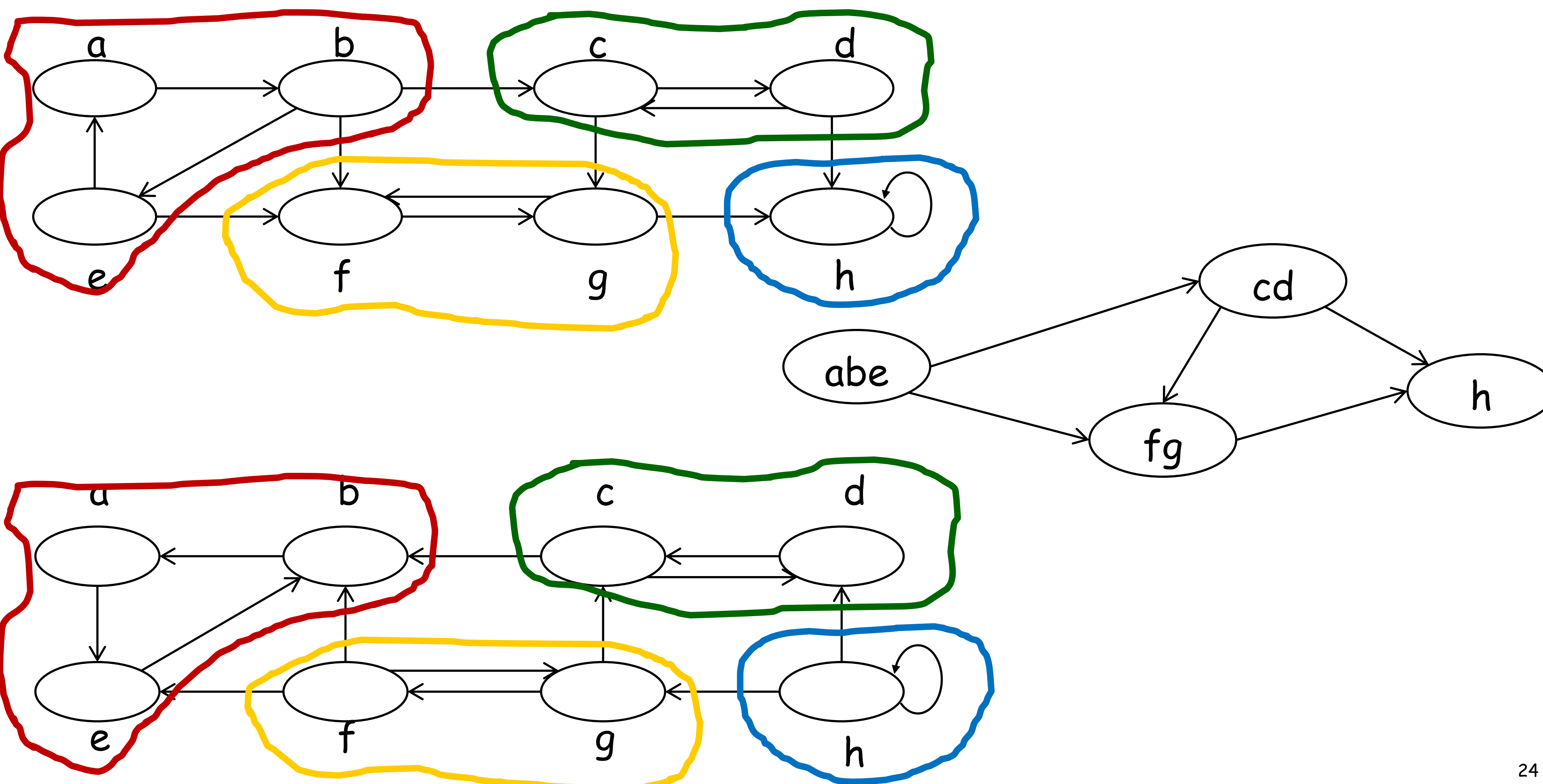




Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες – Ιδέα Αλγορίθμου

Ιδιότητα. Το γράφημα *G′*=(V′, E′) που προκύπτει αν «συρρικνώσουμε» κάθε ΙΣΣ σε μια κορυφή είναι DAG.

Ιδέα Αλγορίθμου. Επίσκεψη των κορυφών του *G′* σε τοπολογική διάταξη ≡ Επίσκεψη κορυφών του *G* σε φθίνουσα διάταξη ως προς f[ ], εργαζόμενοι όμως στο G^{rev}

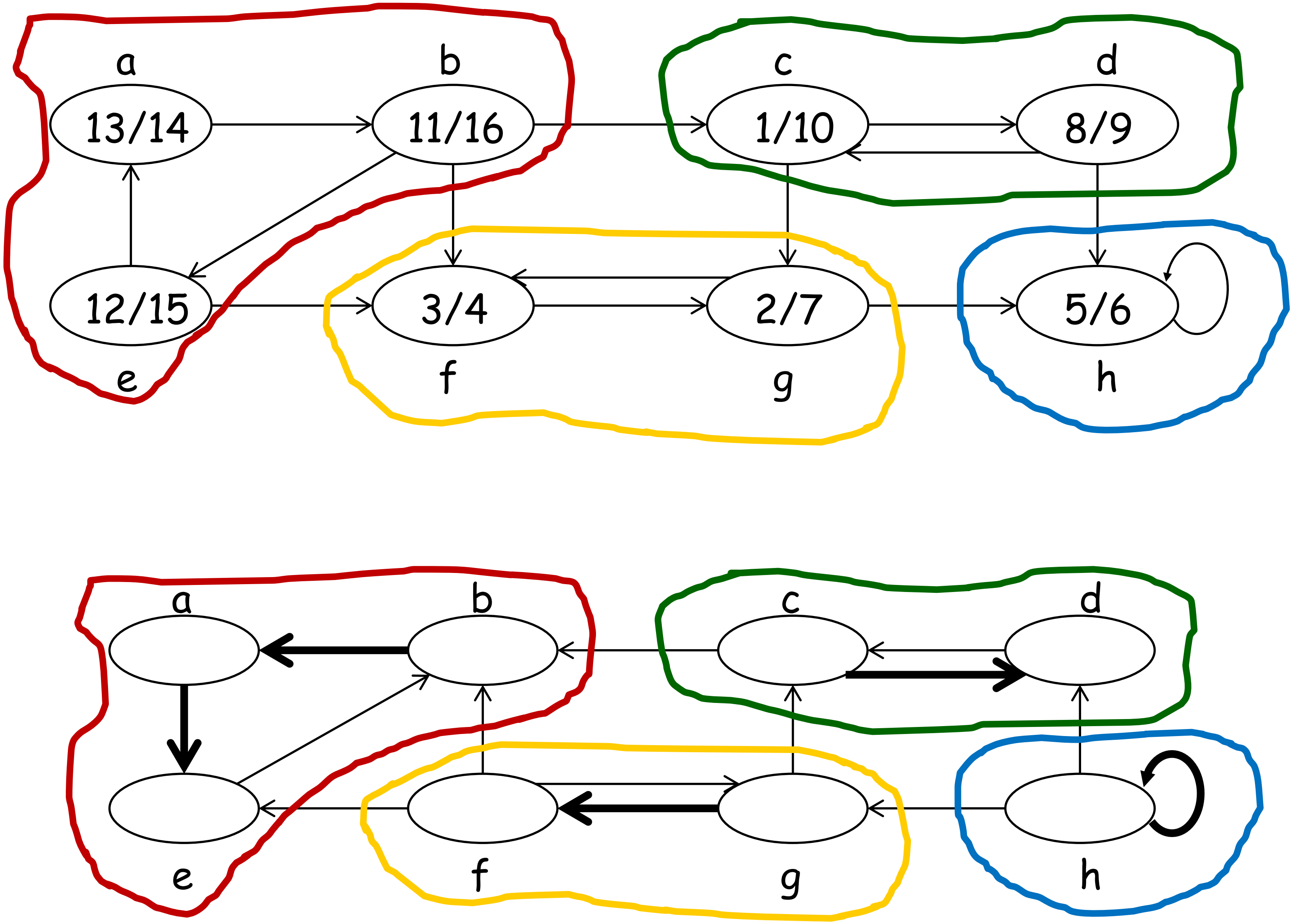


Ισχυρά Συνεκτικές Συνιστώσες - Αλγόριθμος

1. Εκτέλεση DFS(G) για υπολογισμό χρόνων εγκατάλειψης f[u], $\forall$ u $\in$ V
2. Δημιουργία G^{rev}
3. Εκτέλεση DFS(G^{rev}) αλλά στον κύριο βρόχο for πάρε τις κορυφές σε φθίνουσα διάταξη ως προς f[u], $\forall$ u $\in$ V
4. Οι ΙΣΣ είναι τα δένδρα του δάσους που δημιουργούνται στο βήμα 3.

ΙΣΣ – Παράδειγμα Εκτέλεσης Αλγορίθμου

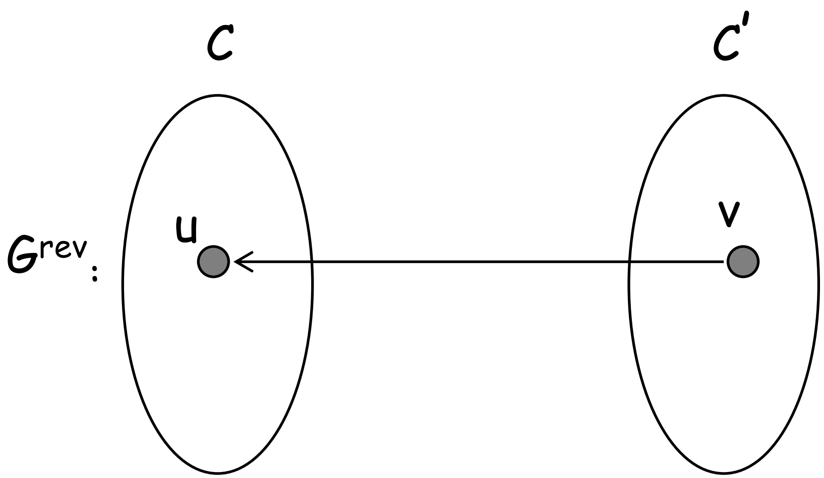
DFS από c.



ΙΣΣ – Ορθότητα Αλγορίθμου

Ορισμός. Έστω $U \subseteq V$. Τότε, $d(U) = \min\{d[u] : u \in U\}$ και $f(U) = \max\{f[u] : u \in U\}$

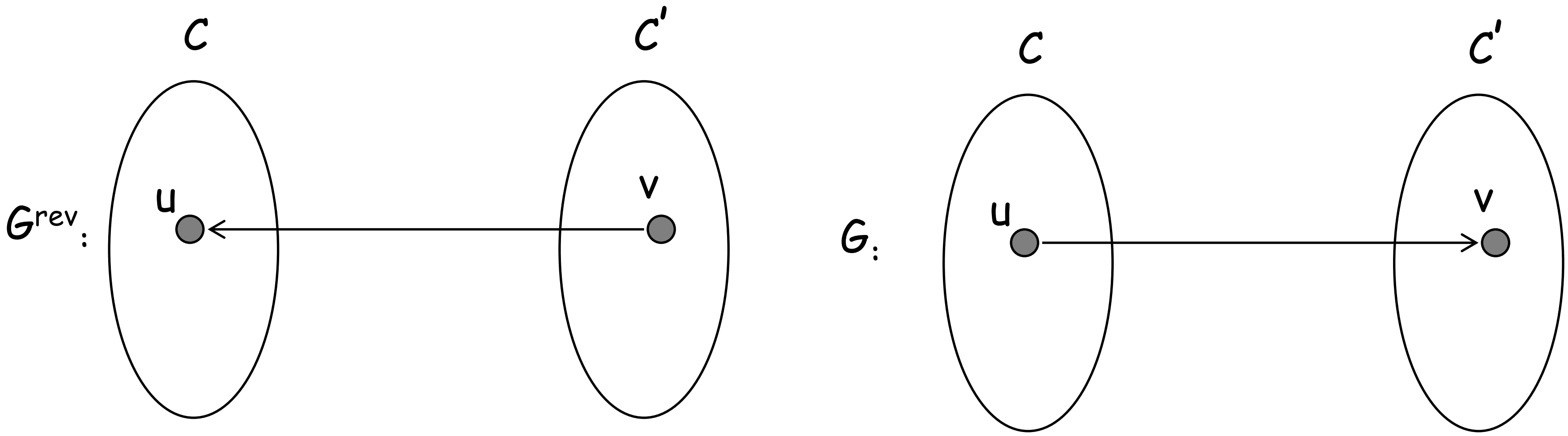
Λήμμα. Έστω C, C' διαφορετικές ΙΣΣ του G^{rev} και έστω $(v,u) \in G^{rev}$ με $u \in C$ και $v \in C'$. Τότε, $f(C) > f(C')$.



ΙΣΣ – Ορθότητα Αλγορίθμου

Ορισμός. Έστω $U \subseteq V$. Τότε, $d(U) = \min\{d[u] : u \in U\}$ και $f(U) = \max\{f[u] : u \in U\}$

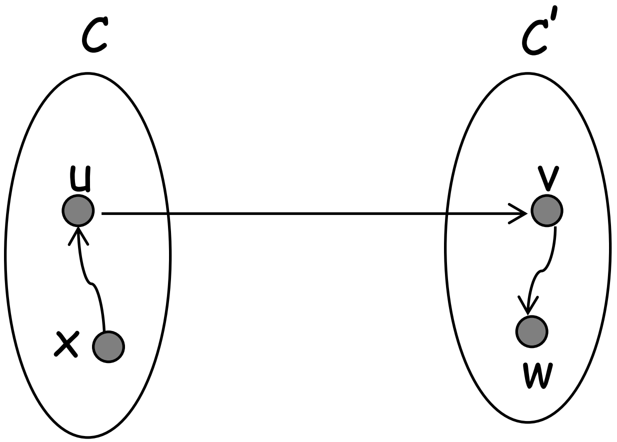
Λήμμα. Έστω C, C' διαφορετικές ΙΣΣ του G^{rev} και έστω $(v,u) \in G^{rev}$ με $u \in C$ και $v \in C'$.
Τότε, $f(C) > f(C')$.



ΙΣΣ – Απόδειξη Ορθότητας Αλγορίθμου

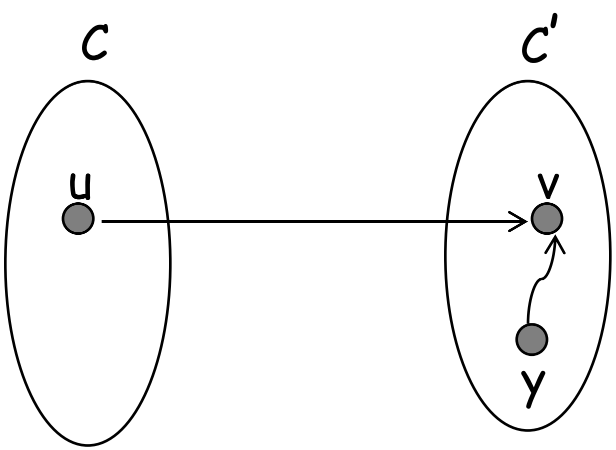
Ορισμός. Έστω $U \subseteq V$. Τότε, $d(U) = \min\{d[u] : u \in U\}$ και $f(U) = \max\{f[u] : u \in U\}$

Ισοδύναμο Λήμμα. Έστω C, C' διαφορετικές ΙΣΣ του G και έστω $(u,v) \in G$ με $u \in C$ και $v \in C'$. Τότε, $f(C) > f(C')$.



Απόδειξη.

(α) $d(C) < d(C')$.
Έστω $x \in C$: $d[x] = d(C)$. Όλες οι $w \in C'$ είναι προσπελάσιμες από την x μέσω της (u,v) $\Rightarrow$ όλες οι κορυφές των C και C' θα γίνουν απόγονοι της x σε αναζήτηση DFS $\Rightarrow$ η x θα εγκαταλειφθεί τελευταία $\Rightarrow$ $f[x] = f(C) > f(C')$.



(β) $d(C) > d(C')$.
Έστω $y \in C'$: $d[y] = d(C')$. Όλες οι $v \in C'$ θα ανακαλυφθούν μετά την y σε μια DFS, η y θα εγκαταλειφθεί τελευταία $\Rightarrow$ $f[y] = f(C')$.
Αφού $(u,v) \in G$ με $u \in C$ και $v \in C'$, τότε από την Ιδιότητα οι κορυφές της C δεν είναι προσπελάσιμες από καμία κορυφή της C' $\Rightarrow$ τη χρονική στιγμή $f[y]$ όλες οι $w \in C$ δεν έχουν ανακαλυφθεί ακόμη $\Rightarrow$ $w \in C$, $f[w] > f[y] = f(C')$ $\Rightarrow$ $f(C) > f(C')$.

ΙΣΣ – Χρονική Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου

Θεώρημα. Ο αλγόριθμος υπολογίζει τις ΙΣΣ ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G σε χρόνο $O(n+m)$.

Απόδειξη. Έπεται από την ΠΧΠ του αλγόριθμου DFS και την κατασκευή του G^{rev} σε χρόνο $O(m)$.

Βιβλιογραφία

1. J. Kleinberg and E. Tardos, *Σχεδιασμός Αλγορίθμων*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*, ελληνική έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012
3. K. Mehlhorn and P. Sanders, *Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων – Τα βασικά εργαλεία*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2014
4. S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, *Αλγόριθμοι*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
5. Θ. Παπαθεοδώρου, *Αλγόριθμοι: Εισαγωγικά Θέματα και Παραδείγματα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014. «Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.