Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 5η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή στη μέθοδο «Διαίρει και βασίλευε»

- Περιγραφή και ανάλυση του αλγορίθμου Συγχώνευσης (merge sort)

- Επισκόπηση των βασικών μεθόδων επίλυσης αναδρομικών σχέσεων

Περιεχόμενα ενότητας

- Μέθοδος «Διαίρει και βασίλευε»
- Αλγόριθμος Mergesort
- Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής
- Επαναληπτική Μέθοδος – ανάπτυξη αναδρομής
- Μέθοδος Αντικατάστασης (ή σωστής πρόβλεψης)

Η Μέθοδος «Διαίρει & Βασίλευε» (Divide & Conquer)

Διαίρει και βασίλευε

Ιούλιος Καίσαρας
(100 – 44 π.Χ.)

Εικόνα 1

Αρκετά παλιά ιδέα ...

Divide et impera. Veni, vidi, vici.
(Διαίρει και βασίλευε. Ήλθον, είδον, νίκησον.)

Προσφιλής πολεμική του τακτική: διαίρεση του αντίπαλου στρατεύματος σε δύο μισά και επίθεση στο ένα μισό με ολόκληρο τον στρατό του

Διαίρει και βασίλευε

Βασική Τεχνική

- Διάσπαση εισόδου σε τμήματα μικρότερου μεγέθους
- Επίλυση προβλήματος σε κάθε τμήμα (υποπρόβλημα) αναδρομικά
- Συνδυασμός επιμέρους λύσεων των υποπροβλημάτων σε μια συνολική λύση για το αρχικό πρόβλημα

Διαίρει και βασίλευε

Εφαρμογή – Ταξινόμηση **n** στοιχείων

- Διάσπαση προβλήματος μεγέθους n σε δύο ίσα τμήματα μεγέθους $\frac{1}{2}$n (υποπροβλήματα)
- Αναδρομική επίλυση κάθε υποπροβλήματος
- Συνδυασμός των δύο λύσεων σε μια συνολική λύση σε γραμμικό χρόνο

Συνέπεια

- Απλοϊκή μέθοδος (insertion sort): $O(n^2)$
- Διαίρει και βασίλευε (mergesort): $O(n \log n)$

Ταξινόμηση

Ταξινόμηση. Δεδομένων n στοιχείων, διέταξέ τα σε αύξουσα σειρά.

Προφανείς εφαρμογές ταξινόμησης.

- Απαρίθμηση των αρχείων σε έναν φάκελο.
- Οργάνωση μιας βιβλιοθήκης MP3.
- Απαρίθμηση ονομάτων σε ένα τηλεφωνικό κατάλογο.
- Παρουσίαση των αποτελεσμάτων του Google PageRank.

Προβλήματα που γίνονται πιο εύκολα μετά από ταξινόμηση.

- Εύρεση του μέσου στοιχείου.
- Εύρεση του πιο κοντινού ζευγαριού.
- Δυαδική αναζήτηση σε μια βάση δεδομένων.
- Προσδιορισμός στατιστικών ακραίων τιμών.
- Ανακάλυψη διπλότυπων σε μια λίστα ταχυδρομείου.

Μη-προφανείς εφαρμογές ταξινόμησης.

- Συμπίεση δεδομένων.
- Γραφικά υπολογιστών.
- Χρονοπρογραμματισμός διαστημάτων.
- Υπολογιστική βιολογία.
- Ελάχιστα γεννητικά δέντρα.
- Διαχείριση αλυσίδας προμηθειών.
- Εξομοίωση ενός συστήματος σωματιδίων.
- Προτάσεις βιβλίων στο Amazon.
- Εξισορρόπηση φόρτου σε έναν παράλληλο υπολογιστή.
- . . .

Ο αλγόριθμος Mergesort

Αλγόριθμος Mergesort

Jon von Neumann (1945)

Εικόνα 2

Αλγόριθμος Mergesort.

- Διαίρεση του πίνακα των n στοιχείων σε δύο ίσα τμήματα
- Αναδρομική ταξινόμηση κάθε (μισού σε μέγεθος) τμήματος
- Συγχώνευση των δύο (μισών σε μέγεθος) τμημάτων σε ένα πλήρως ταξινομημένο πίνακα

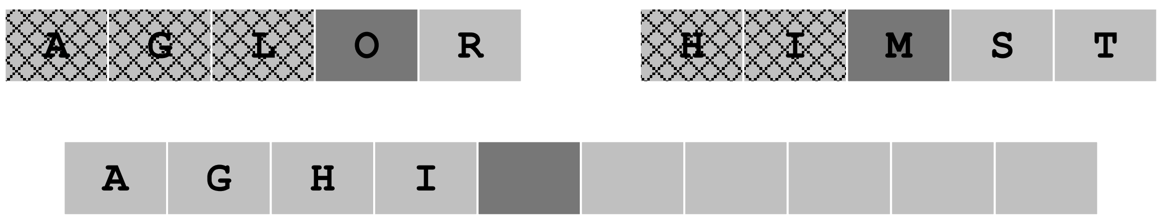
A	L	G	O	R	I	T	H	M	S	
A	L	G	O	R	I	T	H	M	S	διαίρεση
A	G	L	O	R	H	I	M	S	T	ταξινόμηση
A	G	H	I	L	M	O	R	S	T	συγχώνευση

Συγχώνευση (merge)

Συγχώνευση. Συνδυασμός δύο εκ των προτέρων ταξινομημένων λιστών σε μία ταξινομημένη λίστα

Πώς συγχωνεύουμε αποδοτικά;

- Γραμμικός αριθμός συγκρίσεων.
- Χρησιμοποιούμε προσωρινό πίνακα.

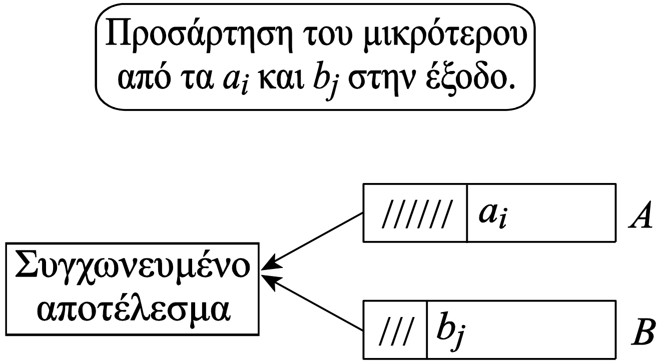


Πρόκληση για αυτούς που ενδιαφέρονται. Επί τόπου συγχώνευση. [Kronrud, 1969]

Χρησιμοποιώντας μόνο ένα σταθερό ποσό επιπλέον μνήμης

Συγχώνευση σε Χρόνο O(n)

Συγχώνευση. Συγχωνεύστε δύο ταξινομημένες λίστες $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ και $B = b_1, b_2, \ldots, b_n$ σε μια μόνο ταξινομημένη λίστα.




```
i = 1, j = 1
while (και οι δύο λίστες δεν είναι κενές) {
   if (ai ≤ bj) Προσάρτηση του ai στη λίστα εξόδου και i=i+1
   else(ai > bj) Προσάρτηση του bj στη λίστα εξόδου και j=j+1
}
προσάρτηση των υπόλοιπων στοιχείων της μη άδειας λίστας στην έξοδο
```

Ισχυρισμός. Η συγχώνευση δύο λιστών μεγέθους n παίρνει χρόνο O(n).

Απόδειξη. Μετά από κάθε σύγκριση, το μέγεθος της λίστας εξόδου αυξάνεται κατά 1.

Αλγόριθμος Mergesort – Χρονική Ανάλυση ΠΧΠ

```
MergeSort(L,1,n) {
   if L έχει μόνο ένα στοιχείο
      return το στοιχείο
   q = (1+n)/2 // Διαίρεσε τον L σε δύο μισά
   A = MergeSort(L,1,q)
   B = MergeSort(L,q+1,n)
   C = Merge(A,B)
   return C
}
```

Jon von Neumann (1945)

Εικόνα 2

A	L	G	O	R	I	T	H	M	S

A	L	G	O	R	I	T	H	M	S	διαίρεση $O(1)$
A	G	L	O	R	H	I	M	S	T	ταξινόμηση $2T(n/2)$

A	G	H	I	L	M	O	R	S	T	συγχώνευση $O(n)$

Χρονική ΠΧΠ – αναδρομική σχέση

$T(n)$ = χρονική ΠΧΠ mergesort μιας εισόδου μεγέθους n.

Αναδρομή Σχέση Mergesort

$$T(n) \leq T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + cn, \qquad c > 0 \text{ σταθερά}$$

... ή απλούστερα

$$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \qquad n \geq 2, \qquad c > 0 \text{ σταθερά}$$

$$T(n) = 0, \ n \leq 1$$

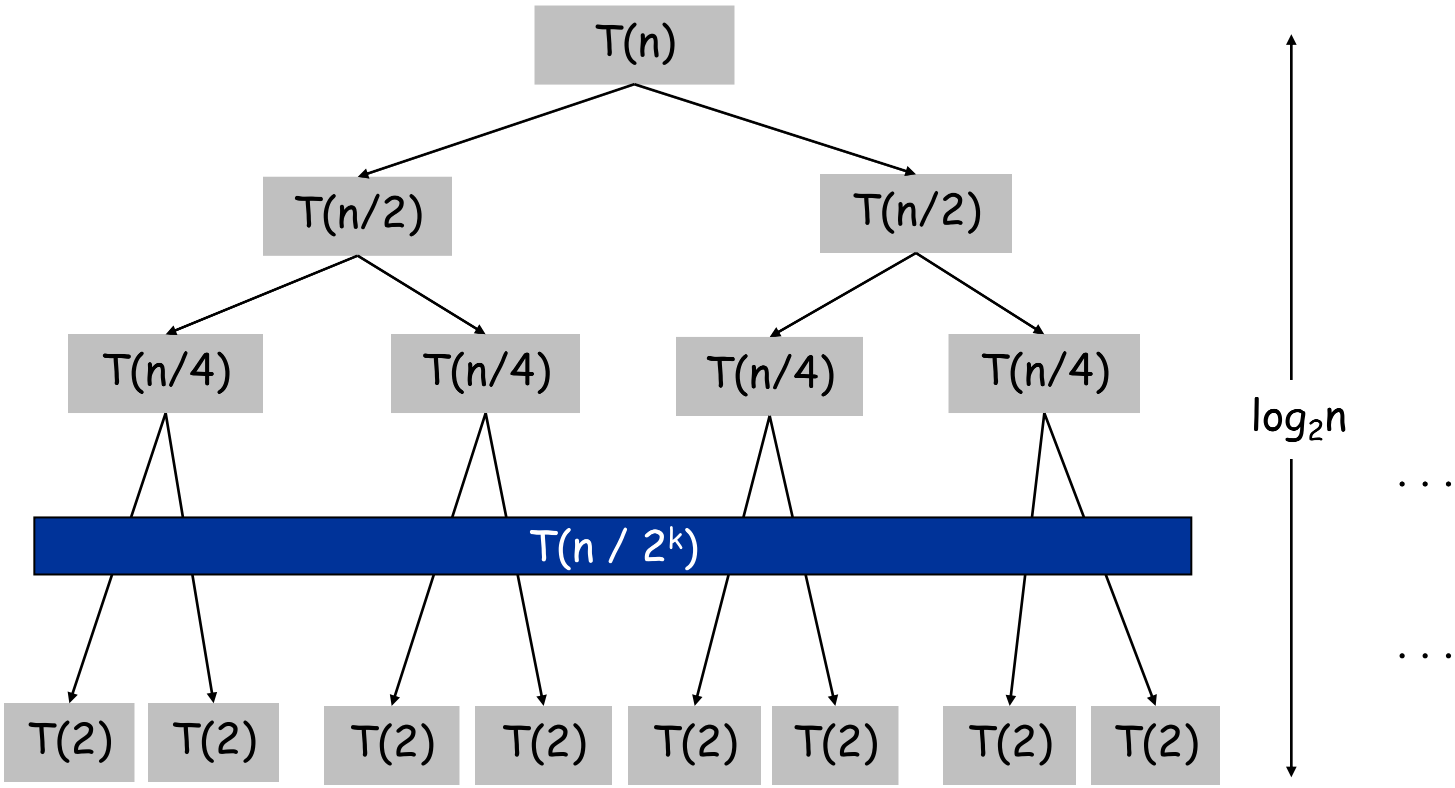
Βασικές Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

- Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής
- Επαναληπτική Μέθοδος – ανάπτυξη αναδρομής
- Μέθοδος Αντικατάστασης (ή σωστής πρόβλεψης)

Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \qquad n \geq 2, \qquad c > 0$ σταθερά

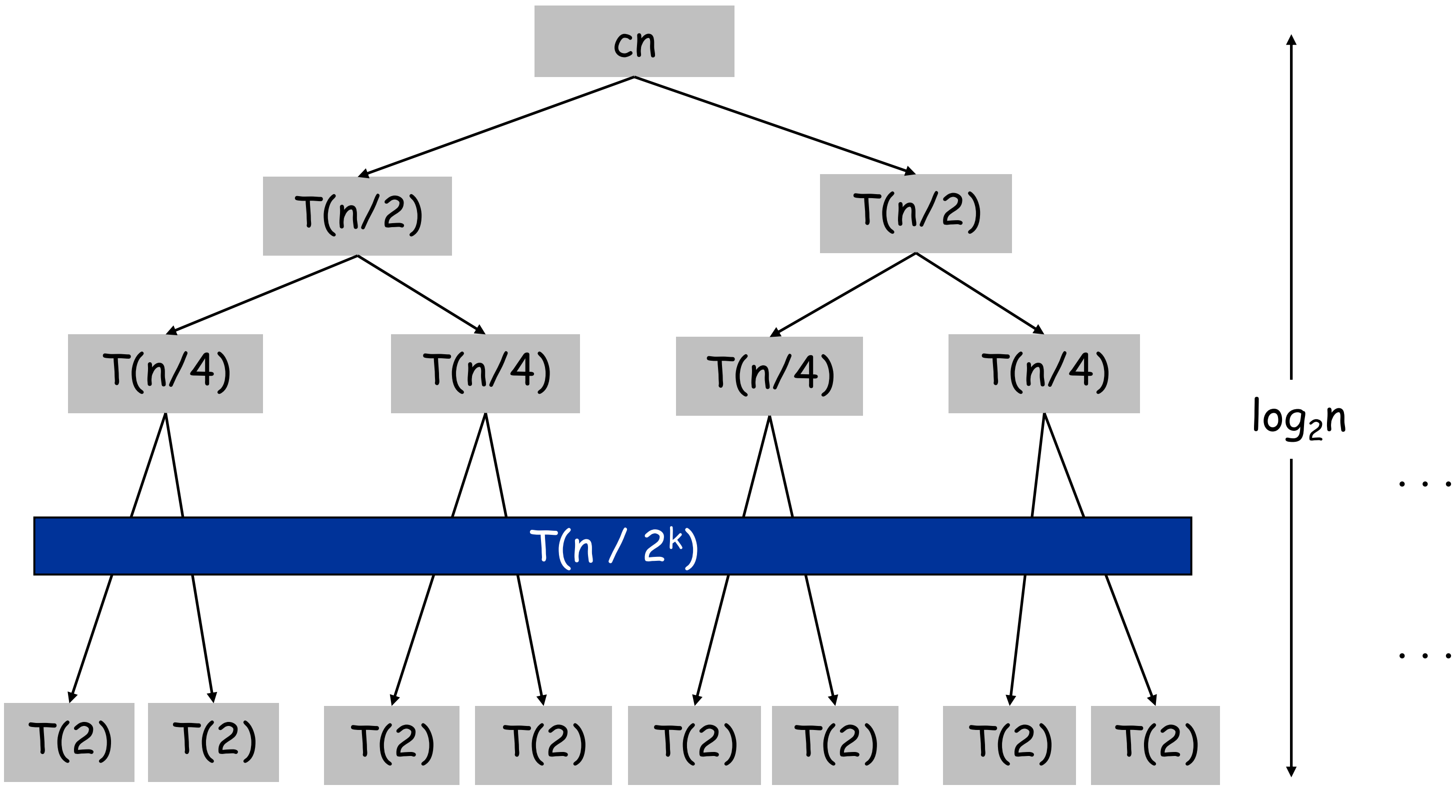
$T(n) = 0, n \leq 1$



Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) \le 2T(n/2) + cn, \quad n \ge 2, \quad c > 0$ σταθερά

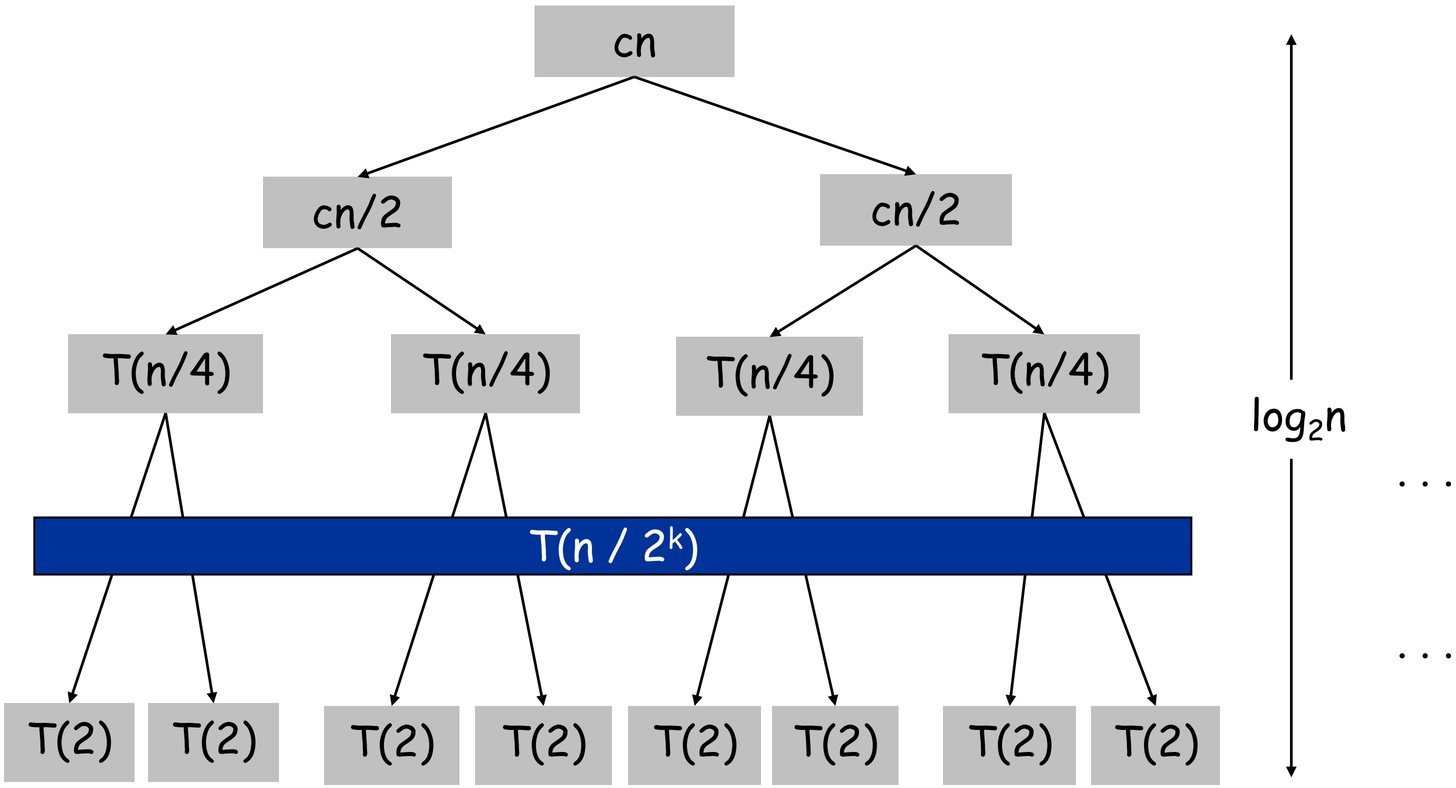
$T(n) = 0, \; n \le 1$



Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) \le 2T(n/2) + cn$, $n \ge 2$, $c > 0$ σταθερά

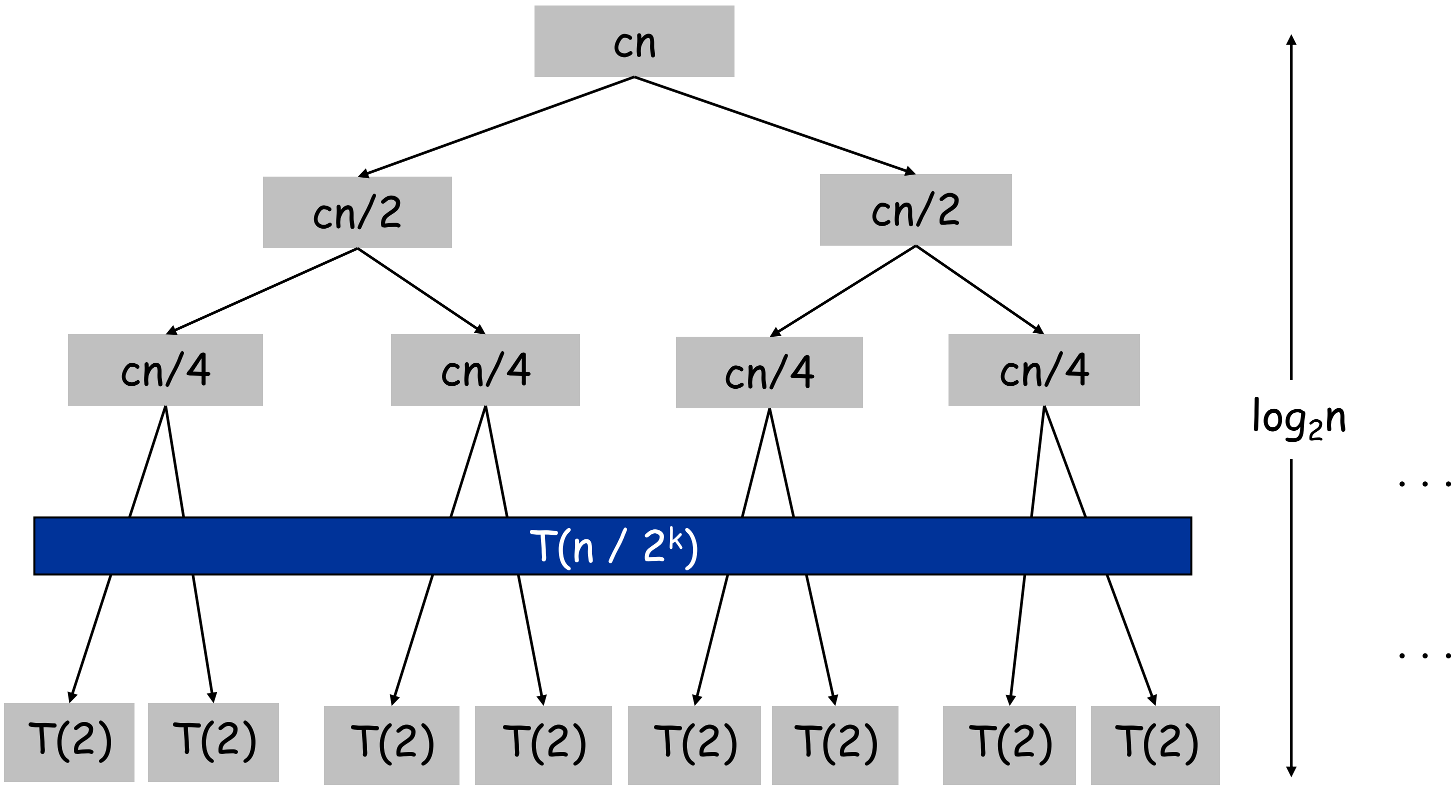
$T(n) = 0$, $n \le 1$



Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \quad n \geq 2, \quad c > 0$ σταθερά

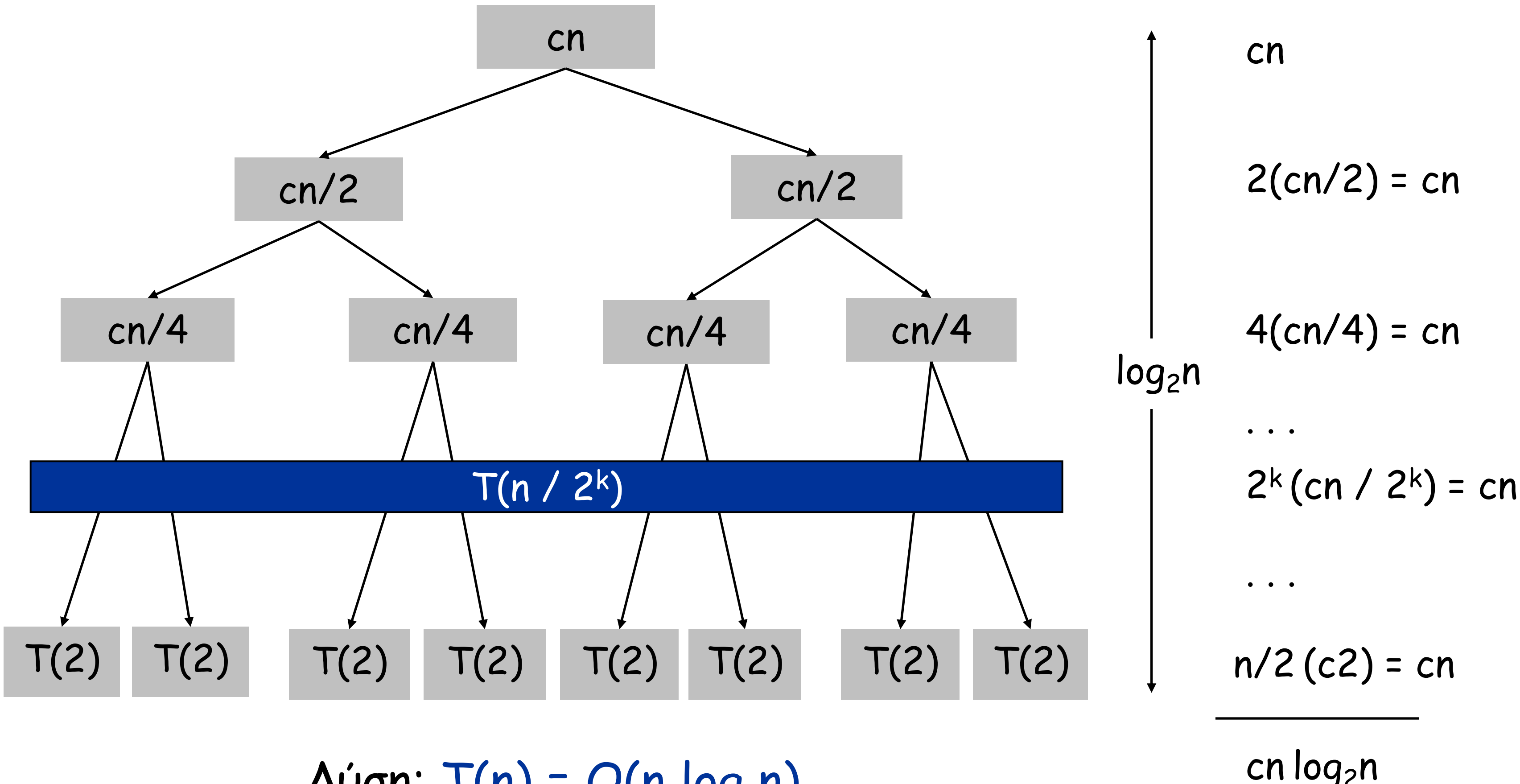
$T(n) = 0, n \leq 1$



Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) \le 2T(n/2) + cn, \qquad n \ge 2, \qquad c > 0$ σταθερά

$T(n) = 0, \; n \le 1$



Λύση: $T(n) = O(n \log n)$

Μέθοδος Αντικατάστασης (σωστής πρόβλεψης)

Πρόβλεψη. $T(n) = O(n \log_2 n)$, ή $T(n) \leq dn \log_2 n$, $d > 0$ σταθερά

$$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \qquad n \geq 2, \qquad c > 0 \text{ σταθερά}$$

$$T(n) = 0, \; n \leq 1$$

Απόδειξη. (με επαγωγή στο n)

- Βάση επαγωγής ($n = 1$): $T(1) = 0 \leq d\, 1 \log_2 1 = 0$
- Επαγωγική υπόθεση: $T(m) \leq dm \log_2 m$, για κάθε $m < n$
- Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $T(n) \leq dn \log_2 n$

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2T(n/2) + cn \\
&\leq 2d(n/2) \log_2(n/2) + cn \\
&= dn[(\log_2 n) - (\log_2 2)] + cn \\
&= dn[(\log_2 n) - 1] + cn \\
&= (dn \log_2 n) - dn + cn \\
&\leq dn \log_2 n, \text{ για κάθε } d \geq c
\end{aligned}$$

Μέθοδος Αντικατάστασης (σωστής πρόβλεψης)

Προσοχή με τον προσδιορισμό της σταθεράς d.

Πρέπει να προσδιοριστεί έτσι ώστε η λύση $T(n) \leq dn \log_2 n$ να ισχύει και για τις αρχικές συνθήκες (βάση αναδρομής)

$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \quad n \geq 2, \quad c > 0$ σταθερά

$T(n) = 0, n \leq 1$

Αρχική συνθήκη $T(n) = 0, n \leq 1$:

δεν παρουσιάζει πρόβλημα, γιατί $T(1) = 0 \leq d\, 1 \log_2 1 = 0$, δηλ. ισχύει για κάθε $d \geq c > 0$

Αν η αρχική συνθήκη ήταν $T(n) = 1, n \leq 1$:

$T(1) = 1 \leq d\, 1 \log_2 1 = 0$ (!), δηλ. δεν υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την $\leq$

Τότε, βλέπουμε τι γίνεται με άλλες μικρές τιμές του n (n=2,3,…)

$T(2) = 2 + 2c \leq d\, 2 \log_2 2 = 2d$, η οποία ισχύει για κάθε $d \geq c + 1$

Άρα, $T(n) \leq dn \log_2 n$ για κάθε $n \geq 2$ και για κάθε $d \geq c + 1$

Επαναληπτική Μέθοδος – ανάπτυξη αναδρομής

$T(n) \leq 2T(n/2) + cn, \quad n \geq 2, \quad c > 0$ σταθερά

$T(n) = 0, n \leq 1$

Ανάπτυξη αναδρομής.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T(n/2) + c \cdot n \\ T(n/2) &\leq 2T(n/2^2) + c(n/2) \\ T(n/2^2) &\leq 2T(n/2^3) + c(n/2^2) \\ &\vdots \\ T(n/2^{k-1}) &\leq 2T(n/2^k) + c(n/2^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow k = \log n$$

Επαναληπτική Μέθοδος – ανάπτυξη αναδρομής

$T(n) \le 2T(n/2) + cn, \quad n \ge 2, \quad c > 0$ σταθερά

$T(n) = 0,\ n \le 1$

Πολλαπλασιασμός κάθε ανισότητας με 2 και πρόσθεση.

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le 2T(n/2) + c \cdot n \\
2 \cdot T(n/2) &\le 2^2 \cdot T(n/2^2) + 2c(n/2) \\
2^2 \cdot T(n/2^2) &\le 2^3 \cdot T(n/2^3) + 2^2 c(n/2^2) \\
&\vdots \\
2^{k-1} \cdot T(n/2^{k-1}) &\le 2^k \cdot T(n/2^k) + 2^{k-1} c(n/2^{k-1})
\end{aligned}
$$

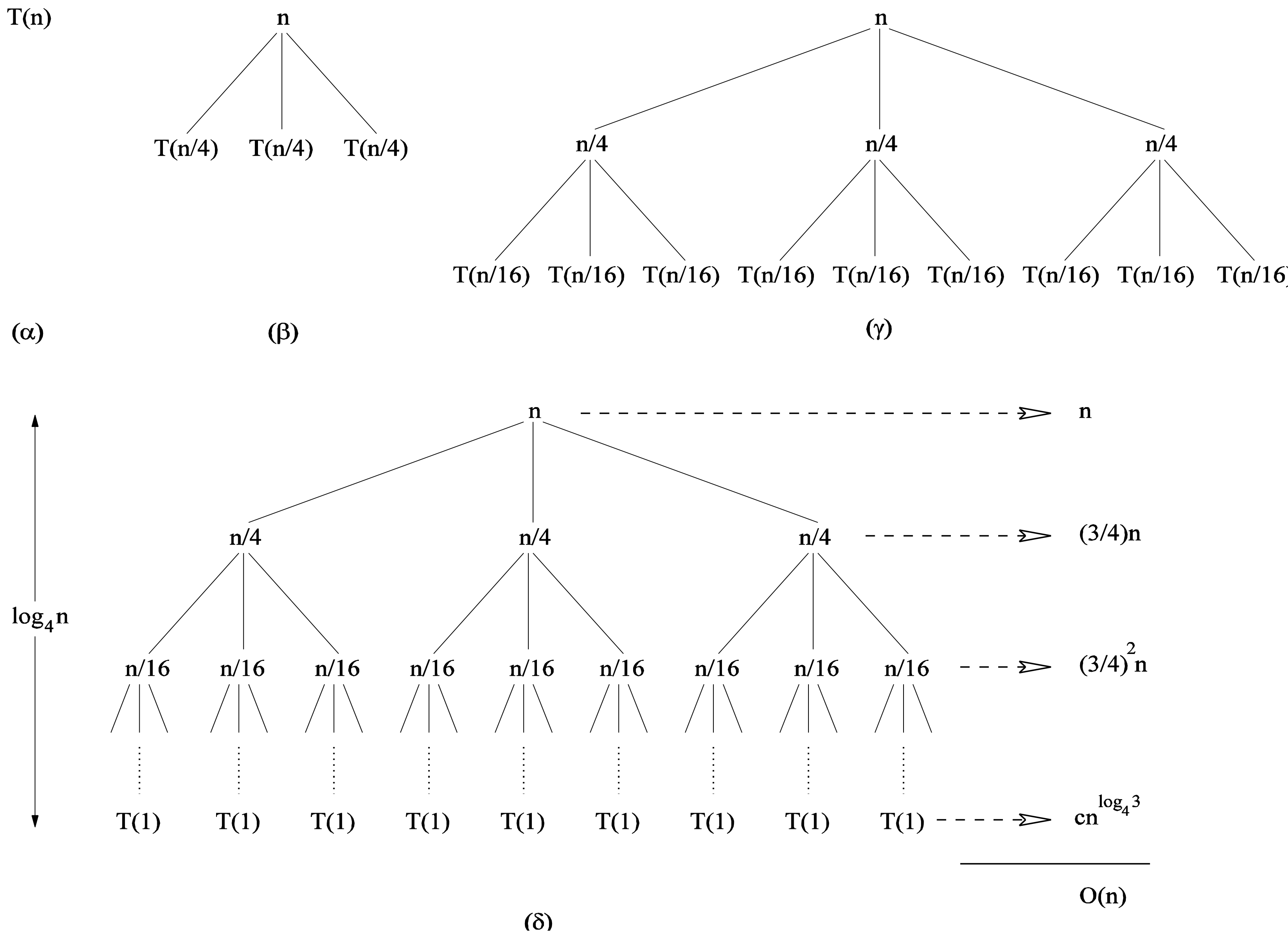
$$T(n) \le 2^k \cdot T(1) + \sum_{i=1}^{k} cn = cn \log n$$

Άλλες Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

- Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (επιπλέον περιπτώσεις)
- Μέθοδος Αλλαγής Μεταβλητών
- Βασικό Θεώρημα

Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$



Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) = 3T(n/4) + n, \quad n \geq 2$

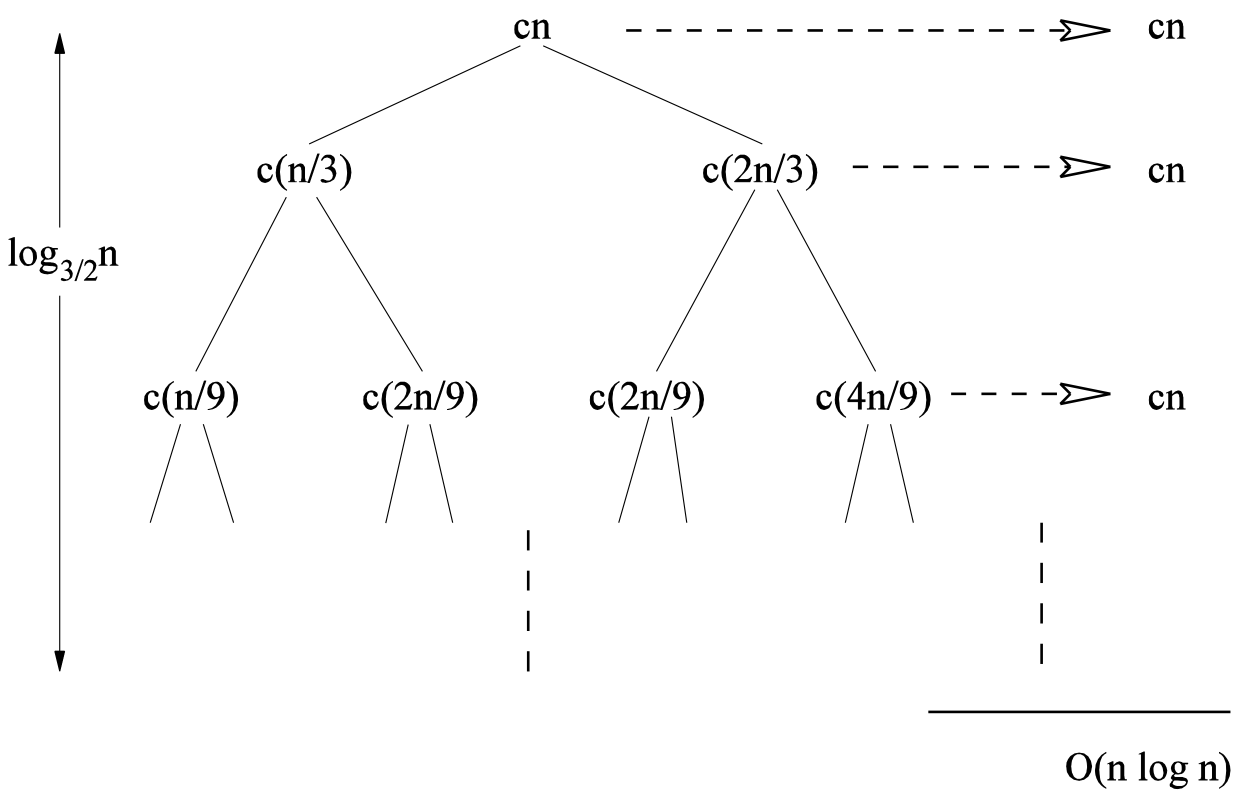
$T(1) = O(1)$

- Μέγεθος υποπροβλήματος επιπέδου i: $n/4^i$
- Αριθμός κορυφών επιπέδου i: 3^i
- «Κόστος» κορυφών επιπέδου i: $3^i \, n/4^i = n\,(3/4)^i$
- Ύψος h δένδρου αναδρομής: $n/4^h = 1$, δηλ. $h = \log_4 n$
- «Κόστος» (τελευταίου) επιπέδου h: $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= O(n^{\log_4 3}) + \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n \\
&\leq O(n^{\log_4 3}) + n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq O(n^{0.8}) + n \cdot \frac{1}{1 - 3/4} \\
&= O(n^{0.8}) + 4n \\
&= O(n)
\end{aligned}$$

Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$$



- Μέγεθος **μέγιστου** υποπροβλήματος επιπέδου i: $n\,(2/3)^i$
- Ύψος h δένδρου αναδρομής: $n\,(2/3)^h = 1$, δηλ. $h = \log_{3/2} n$
- Πρόβλεψη: $T(n) = O(n \log n)$

Μέθοδος Εκδίπλωσης Αναδρομής (δένδρο αναδρομής)

$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$

- Μέγεθος **μέγιστου** υποπροβλήματος επιπέδου i: $n\,(2/3)^i$
- Ύψος h δένδρου αναδρομής: $n\,(2/3)^h = 1$, δηλ. $h = \log_{3/2} n$
- Πρόβλεψη: $T(n) = O(n \log n)$
- Επαλήθευση: μέθοδος αντικατάστασης (επαγωγή)

$T(n) \le a\, n \log n$, για κάποια σταθερά $a > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\le a(n/3)\log(n/3) + a(2n/3)\log(2n/3) + cn \\
&= a(n/3)(\log n - \log 3) + a(2n/3)(\log n - \log(3/2)) + cn \\
&= an\log n - a[(n/3)\log 3 + (2n/3)\log(3/2)] + cn \\
&= an\log n - a[(n/3)\log 3 + (2n/3)\log 3 - (2n/3)\log 2] + cn \\
&= an\log n - an(\log 3 - 2/3) + cn \\
&\le an\log n
\end{aligned}
$$

που ισχύει για $a \ge c/(\log 3 - 2/3)$

Μέθοδος Αλλαγής Μεταβλητών

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

- Θέτουμε $m = \log n$, άρα $n = 2^m$ και $\sqrt{n} = 2^{m/2}$ ⇨

$$T(2^m) = 2\,T(2^{m/2}) + m$$

- Θέτοντας $S(m) = T(2^m)$, παίρνουμε

$$S(m) = 2\,S(m/2) + m$$

- … για την οποία ήδη γνωρίζουμε ότι $S(m) = O(m \log m)$
- Άρα,

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log\log n)$$

Βασικό Θεώρημα Αναδρομών

Έστω

$$a, b \in \mathbb{R}^+,\ b > 1,\ \gamma, \delta \in \mathbb{R}_0^+,\ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ g(n) = O(n^\gamma \log_b^\delta n),$$

$$T(n) = \begin{cases} g(1) & , n = 1 \\ aT(n/b) + g(n) & , n > 1 \end{cases}$$

Τότε,

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a} \log_b^\delta n) & , a > b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^{\delta+1} n) & , a = b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^\delta n) & , a < b^\gamma,\quad \gamma > 0 \vee \delta \geq 1 \\ O(\log_b n) & , a < 1,\quad \gamma = 0 \wedge \delta < 1 \end{cases}$$

για $n = b^k$

Παραδείγματα

- $T(n) = 2\ T(n/2) + n$
- $T(n) = 2\ T(n/2) + 1$
- $T(n) = 3\ T(n/4) + n$
- $T(n) = (1/2)\ T(4n/5) + (\log n)^{1/2}$
- $T(n) = 16\ T(n/8) + n^{2/3}$
- $T(n) = (4/3)\ T(n^{3/4}) + \log n$

Μέτρηση Αντιστροφών

Μέτρηση Αντιστροφών

Μουσική ιστοσελίδα: προσπαθεί να ταιριάξει τις προτιμήσεις σας στα τραγούδια με άλλους.

- Εσείς βαθμολογείτε n τραγούδια.
- Η ιστοσελίδα συμβουλεύεται μια βάση δεδομένων για να βρει άτομα με παραπλήσιες προτιμήσεις.

Μετρική ομοιότητας: αριθμός αντιστροφών μεταξύ δύο βαθμολογιών.

- Η βαθμολογία μου: 1, 2, …, n.
- Η βαθμολογία σου: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Τα τραγούδια i και j «αντιστρέφονται» αν $i < j$, αλλά $a_i > a_j$.

Τραγούδια

	A	B	C	D	E
Εγώ	1	2	3	4	5
Εσύ	1	3	4	2	5

<u>Αντιστροφές</u>

3-2, 4-2

Ωμή βία: έλεγξε όλα τα $\Theta(n^2)$ ζευγάρια i και j.

Εφαρμογές

Εφαρμογές.

- Θεωρία ψηφοφορίας.
- Συνεργατικό φιλτράρισμα.
- Μέτρηση του ταξινομημένου ποσοστού ενός πίνακα.
- Ανάλυση ευαισθησίας της συνάρτησης κατάταξης της Google.
- Άθροισμα βαθμού για μετα-αναζητήσεις στο διαδίκτυο.

Μέτρηση Αντιστροφών: Διαίρει και βασίλευε

Διαίρει και βασίλευε.

1	5	4	8	10	2	6	9	12	11	3	7

Μέτρηση Αντιστροφών: Διαίρει και βασίλευε

Διαίρει και βασίλευε.
- Διαίρει: διαχώρισε την λίστα σε δύο ίσα τμήματα

1	5	4	8	10	2	6	9	12	11	3	7

Διαίρει: $O(1)$.

1	5	4	8	10	2

6	9	12	11	3	7

Μέτρηση Αντιστροφών: Διαίρει και βασίλευε

Διαίρει και βασίλευε.

- Διαίρει: διαχώρισε την λίστα σε δύο ίσα τμήματα
- Βασίλευε: αναδρομικά μέτρησε τις αντιστροφές σε κάθε τμήμα

1	5	4	8	10	2	6	9	12	11	3	7

Διαίρει: O(1).

1	5	4	8	10	2

6	9	12	11	3	7

Βασίλευε: 2T(n / 2)

5 αντιστροφές μπλε-μπλε

8 αντιστροφές πράσινο-πράσινο

5-4, 5-2, 4-2, 8-2, 10-2

6-3, 9-3, 9-7, 12-3, 12-7, 12-11, 11-3, 11-7

Μέτρηση Αντιστροφών: Διαίρει και βασίλευε

Διαίρει και βασίλευε.

- Διαίρει: διαχώρισε την λίστα σε δύο ίσα τμήματα
- Βασίλευε: αναδρομικά μέτρησε τις αντιστροφές σε κάθε τμήματα
- Συνδύασε: μέτρα τις αντιστροφές όπου a_i και b_j είναι σε διαφορετικά τμήματα και επέστρεψε το άθροισμα των τριών ποσοτήτων.

1	5	4	8	10	2	6	9	12	11	3	7

Διαίρει: O(1).

1	5	4	8	10	2

5 αντιστροφές μπλε-μπλε

6	9	12	11	3	7

8 αντιστροφές πράσινο-πράσινο

Βασίλευε: 2T(n / 2)

9 αντιστροφές μπλε-πράσινο
5-3, 4-3, 8-6, 8-3, 8-7, 10-6, 10-9, 10-3, 10-7

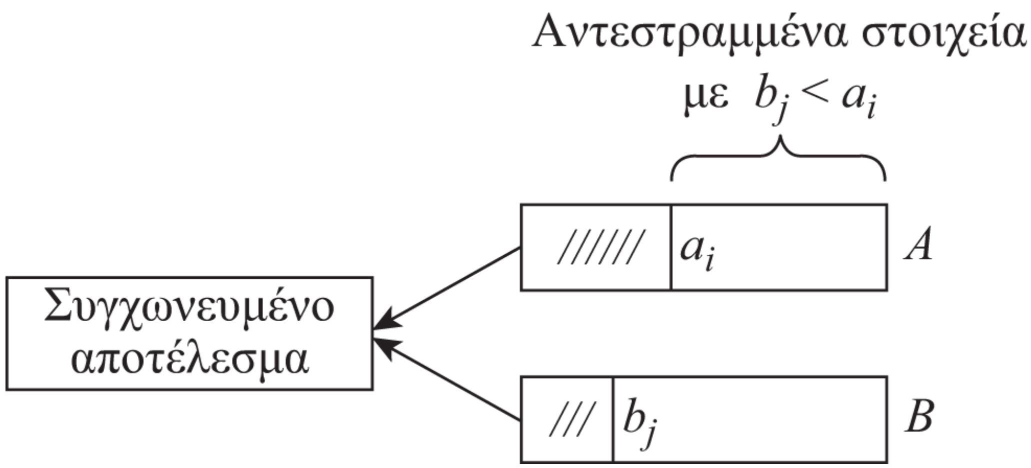
Συνδύασε: ???

Σύνολο = 5 + 8 + 9 = 22.

Μέτρηση αντιστρόφων: Συνδύασε

Συνδύασε: *συγχώνευσε και μέτρησε* τις αντιστροφές μπλε-πράσινο

- Υποθέτουμε ότι κάθε τμήμα είναι ταξινομημένο
- Μέτρησε τις αντιστροφές όπου a_i και b_j είναι σε διαφορετικά τμήματα
- Συγχώνευσε τα δύο ταξινομημένα τμήματα σε ένα ταξινομημένο πίνακα



$b_j < a_i$ ⇨ b_j είναι μικρότερο από όλα τα εναπομείναντα στοιχεία του *A* =

= αντιστροφές που αφορούν το b_j

Μέτρηση αντιστρόφων: Συνδύασε

Συνδύασε: *συγχώνευσε και μέτρησε* τις αντιστροφές μπλε-πράσινο

- Υποθέτουμε ότι κάθε τμήμα είναι ταξινομημένο
- Μέτρησε τις αντιστροφές όπου a_i και b_j είναι σε διαφορετικά τμήματα
- Συγχώνευσε τα δύο ταξινομημένα τμήματα σε ένα ταξινομημένο πίνακα

3	7	10	14	18	19

2	11	16	17	23	25
6	3	2	2	0	0

13 αντιστροφές μπλε-πράσινο: 6 + 3 + 2 + 2 + 0 + 0

μέτρησε: $O(n)$

2	3	7	10	11	14	16	17	18	19	23	25

συγχώνευσε: $O(n)$

Μέτρηση αντιστροφών: Υλοποίηση

Αρχική κατάσταση. [Merge-and-Count] Τα A και B είναι ταξινομημένα.
Τελική κατάσταση. [Sort-and-Count] Η L είναι ταξινομημένη.

```
Sort-and-Count(L) {  // η L έχει n στοιχεία
   if η λίστα L έχει μόνο ένα στοιχείο
      return 0 και την λίστα L

   Δαίρεσε την λίστα σε δύο ισομεγέθη τμήματα A και B
   (rA, A) ← Sort-and-Count(A)
   (rB, B) ← Sort-and-Count(B)
   (r , L) ← Merge-and-Count(A, B)

   return r = rA + rB + r και την ταξινομημένη λίστα L
}
```

$$T(n) \le T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n) \quad \Rightarrow \quad T(n) = O(n \log n)$$

Βιβλιογραφία

1. J. Kleinberg and E. Tardos, *Σχεδιασμός Αλγορίθμων*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*, ελληνική έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012
3. K. Mehlhorn and P. Sanders, *Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων – Τα βασικά εργαλεία*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2014
4. S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, *Αλγόριθμοι*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
5. Θ. Παπαθεοδώρου, *Αλγόριθμοι: Εισαγωγικά Θέματα και Παραδείγματα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083

Σημείωμα Αδειοδότησης

Πηγές εικόνων - Χρήση Έργων Τρίτων

Εικόνα 1: σελ. 6,

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Julius_Caesar_Coustou_Louvre.png

Εικόνα 2: σελ. 11, 14

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JohnvonNeumann-LosAlamos.gif

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.