Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 2η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών
Email: zaro@ceid.upatras.gr

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός του ασυμπτωτικού ρυθμού αύξησης - ασυμπτωτικά άνω και κάτω φράγματα

Περιεχόμενα ενότητας

- Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί και ιδιότητες

- Μέθοδοι ανάλυσης της χρονικής και χωρικής πολυπλοκότητας των αλογρίθμων

Ασυμπτωτικός ρυθμός αύξησης

Κίνητρο (1)

- Προσδιορισμός επακριβούς πολυωνύμου για την χρονική (ή χωρική) πολυπλοκότητα ενός προβλήματος Π, ως συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου n, δεν είναι πάντοτε εύκολος

Κίνητρο (2)

- Πρόβλημα Π – μέγεθος εισόδου n

Αλγόριθμος	Χρονική ΠΧΠ
A1	$1000 \cdot n$
A2	$200 \cdot n \cdot \log n$
A3	$10 \cdot n^2$
A4	2^n

- ***Ερώτημα:*** *Ποιος είναι ταχύτερος/αποδοτικότερος ;*

Κίνητρο (2)

- Πρόβλημα Π – μέγεθος εισόδου n

Αλγόριθμος	Χρονική ΠΧΠ
A1	$1000 \cdot n$
A2	$200 \cdot n \cdot \log n$
A3	$10 \cdot n^2$
A4	2^n

- ***Ερώτημα:*** *Ποιος είναι ταχύτερος/αποδοτικότερος ;*
- ***Απάντηση:*** εξαρτάται από το n ...

n	Αποδοτικότερος
$1 \le n \le 9$	A4
$10 \le n \le 100$	A3
$n \ge 101$	A1

Ασυμπτωτικός ρυθμός αύξησης

Συμπέρασμα.
Μας ενδιαφέρει τι γίνεται για μεγάλες τιμές του n ($n \to \infty$),
δηλ. για τιμές $n \geq n_0$ (n_0 κάποιο κατώφλι)

↓

Ασυμπτωτική πολυπλοκότητα & συμβολισμός

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός - O

O - ασυμπτωτικά άνω όρια

Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $O(f(n))$, αν $\exists$ σταθερές $c > 0$ και $n_0 \geq 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $T(n) \leq c \cdot f(n)$

Σημειολογία

$T(n) \in O(f(n))$ – αλλά για απλούστευση γράφουμε $T(n) = O(f(n))$

Παράδειγμα:

(a) $T(n) = 37n^2 + 19n + 72$

- $T(n) = O(n^2)$, και $T(n) = O(n^3)$ – αλλά $T(n) \neq O(n)$

(b) $T(n) = 100n + 2n^2 + 17n \cdot \log n + n^3/100$

- $T(n) = O(n^3)$ - αλλά $T(n) \neq O(n^2)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός - Ω

Ω - ασυμπτωτικά κάτω όρια

Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $\Omega(f(n))$, αν $\exists$ σταθερές $c > 0$ και $n_0 \geq 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $T(n) \geq c \cdot f(n)$

Σημειολογία

$T(n) \in \Omega(f(n))$ – αλλά για απλούστευση γράφουμε $T(n) = \Omega(f(n))$

Παράδειγμα:

(a) $T(n) = 37n^2 + 19n + 72$

- $T(n) = \Omega(n^2)$, και $T(n) = \Omega(n)$ – αλλά $T(n) \neq \Omega(n^3)$

(b) $T(n) = 100n + 2n^2 + 17n \cdot \log n + n^3/100$

- $T(n) = \Omega(n^3)$, και $T(n) = \Omega(n^2)$ - αλλά $T(n) \neq \Omega(n^4)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός - Θ

Θ - ασυμπτωτικά αυστηρά όρια

Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $\Theta(f(n))$ αν η $T(n)$ είναι ταυτόχρονα και $O(f(n))$ και $\Omega(f(n))$

Σημειολογία

$T(n) \in \Theta(f(n))$ – αλλά για απλούστευση γράφουμε $T(n) = \Theta(f(n))$

Παράδειγμα:

(a) $T(n) = 37n^2 + 19n + 72$

- $T(n) = \Theta(n^2)$ – αλλά $T(n) \neq \Theta(n^3)$ και $T(n) \neq \Theta(n)$

(b) $T(n) = 100n + 2n^2 + 17n \cdot \log n + n^3/100$

- $T(n) = \Theta(n^3)$ - αλλά $T(n) \neq \Theta(n^4)$ και $T(n) \neq \Theta(n^2)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός - o

o - ασυμπτωτικά άνω όρια τάξης μεγέθους

Η συνάρτηση T(n) είναι o(f(n)), αν $\lim_{n \to \infty} T(n)/f(n) = 0$

Σημειολογία

$T(n) \in o(f(n))$ – αλλά για απλούστευση γράφουμε $T(n) = o(f(n))$

Παράδειγμα:

(a) $T(n) = 37n^2 + 19n + 72$

- $T(n) = O(n^2)$, αλλά $\mathbf{T(n) = o(n^3)}$

(b) $T(n) = 100n + 2n^2 + 17n \cdot \log n + n^3/100$

- $T(n) = O(n^3)$, αλλά $\mathbf{T(n) = o(n^4)}$

Προσοχή με τον Ασυμπτωτικό Συμβολισμό

Ασυμμετρία – προσεκτικοί με την απλούστευση του συμβολισμού

- $f(n) = 5n^3$, $g(n) = 3n^3$
- $f(n) = O(n^3)$ και $g(n) = O(n^3)$
- Αλλά $f(n) \neq g(n)$

▪ Ορθότερη σημειολογία με χρήση του $\in$:
  - $f(n) \in O(n^3)$ και $g(n) \in O(n^3)$

Ιδιότητες

Μεταβατικότητα

- Αν $f = O(g)$ και $g = O(h)$, τότε $f = O(h)$.
- Αν $f = \Omega(g)$ και $g = \Omega(h)$, τότε $f = \Omega(h)$.
- Αν $f = \Theta(g)$ και $g = \Theta(h)$, τότε $f = \Theta(h)$.

Προσθετικότητα

- Αν $f = O(h)$ και $g = O(h)$, τότε $f + g = O(h)$.
- Αν $f = \Omega(h)$ και $g = \Omega(h)$, τότε $f + g = \Omega(h)$.
- Αν $f = \Theta(h)$ και $g = \Theta(h)$, τότε $f + g = \Theta(h)$.

Ασυμπτωτικά όρια για κάποιες συνηθισμένες συναρτήσεις

Πολυωνυμικές. $a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d = \Theta(n^d)$, αν $a_d > 0$ (d ακέραια σταθερά).

Πολυωνυμικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n^d)$ για κάποια σταθερά d ανεξάρτητης του μεγέθους εισόδου n.

Ασυμπτωτικά όρια για κάποιες συνηθισμένες συναρτήσεις

Λογάριθμοι. $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a, b > 0.

Μπορούμε να μην δηλώσουμε την βάση

Λογάριθμοι. Για κάθε x > 0, $\log n = O(n^x)$.

Οι λογάριθμοι αυξάνονται αργότερα από οποιοδήποτε πολυώνυμο

Εκθετικές. Για κάθε r > 1 και κάθε d > 0, $n^d = O(r^n)$.

Κάθε εκθετική αυξάνεται γρηγορότερα από οποιοδήποτε πολυώνυμο

Βιβλιογραφία

1. J. Kleinberg and E. Tardos, *Σχεδιασμός Αλγορίθμων*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, *Εισαγωγή στους Αλγορίθμους*, ελληνική έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012
3. K. Mehlhorn and P. Sanders, *Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων – Τα βασικά εργαλεία*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2014
4. S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, *Αλγόριθμοι*, ελληνική έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
5. Θ. Παπαθεοδώρου, *Αλγόριθμοι: Εισαγωγικά Θέματα και Παραδείγματα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014. «Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.