



# Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

## Ενότητα 9η Άσκηση - Αλγόριθμος Kruskal

Διδάσκων  
Χρήστος Ζαρολιάγκης  
Καθηγητής  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής  
Πανεπιστήμιο Πατρών  
Email: [zaro@ceid.upatras.gr](mailto:zaro@ceid.upatras.gr)



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

**Άσκηση.** Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

Ταξινομούμε τις ακμές κατά αύξουσα σειρά κόστους.

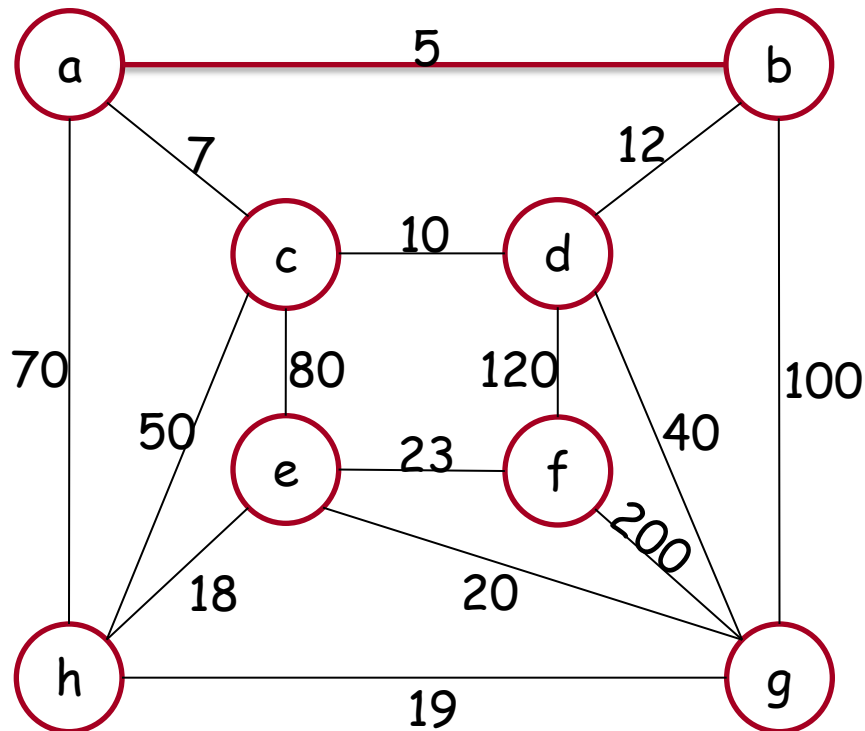
Περίπτωση 1: Αν η προσθήκη της  $e$  στο  $T$  δημιουργεί κύκλο, απορρίπτεται η  $e$  σύμφωνα με την **ιδιότητα κύκλου**.

Περίπτωση 2: Αλλιώς, εισάγεται η  $e = (u, v)$  στο  $T$  σύμφωνα με την **ιδιότητα αποκοπής**, όπου  $S =$  σύνολο των κορυφών στη συνεκτική συνιστώσα της  $u$

# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

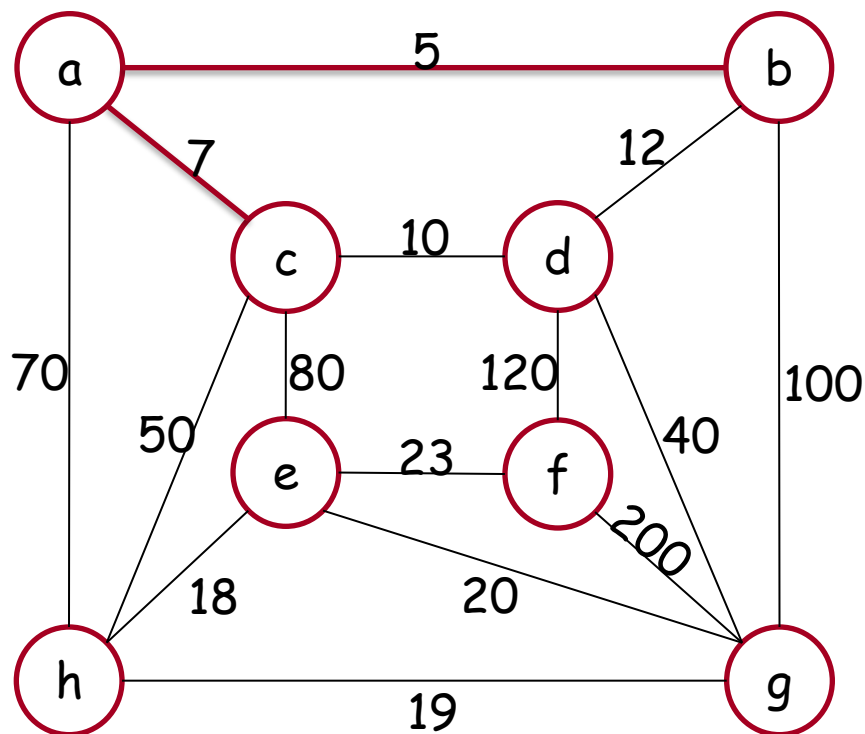
|             |             |             |              |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| a-b [5] (✓) | h-e [18] () | d-g [40] () | b-g [100] () |
| a-c [7] ()  | h-g [19] () | h,c [50] () | d-f [120] () |
| c-d [10] () | e-g [20] () | h-a [70] () | f-g [200] () |
| d-b [12] () | e-f [23] () | c-e [80] () |              |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

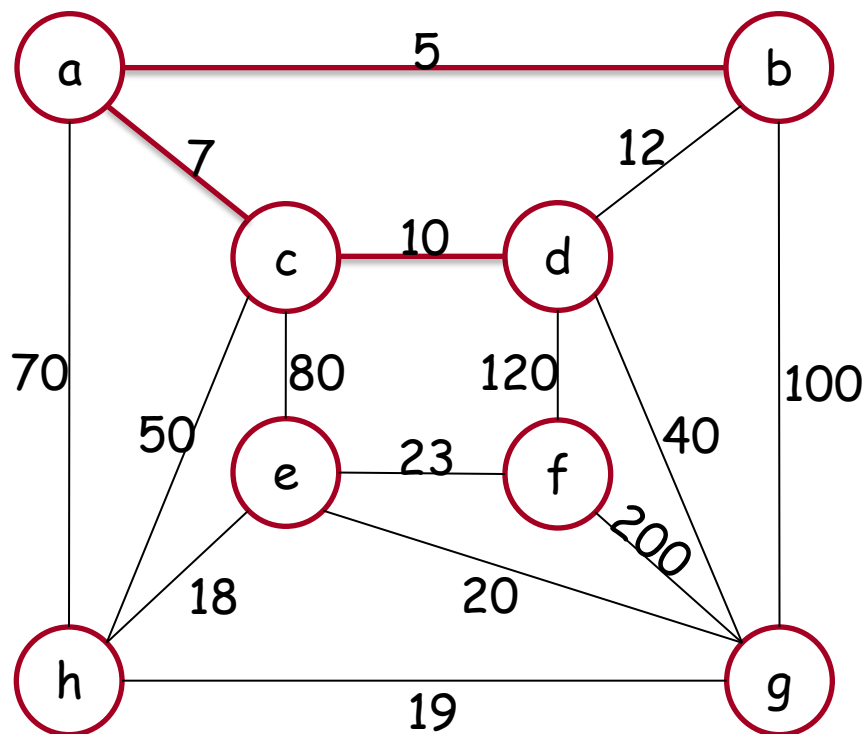
|             |             |             |              |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| a-b [5] (✓) | h-e [18] () | d-g [40] () | b-g [100] () |
| a-c [7] (✓) | h-g [19] () | h,c [50] () | d-f [120] () |
| c-d [10] () | e-g [20] () | h-a [70] () | f-g [200] () |
| d-b [12] () | e-f [23] () | c-e [80] () |              |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

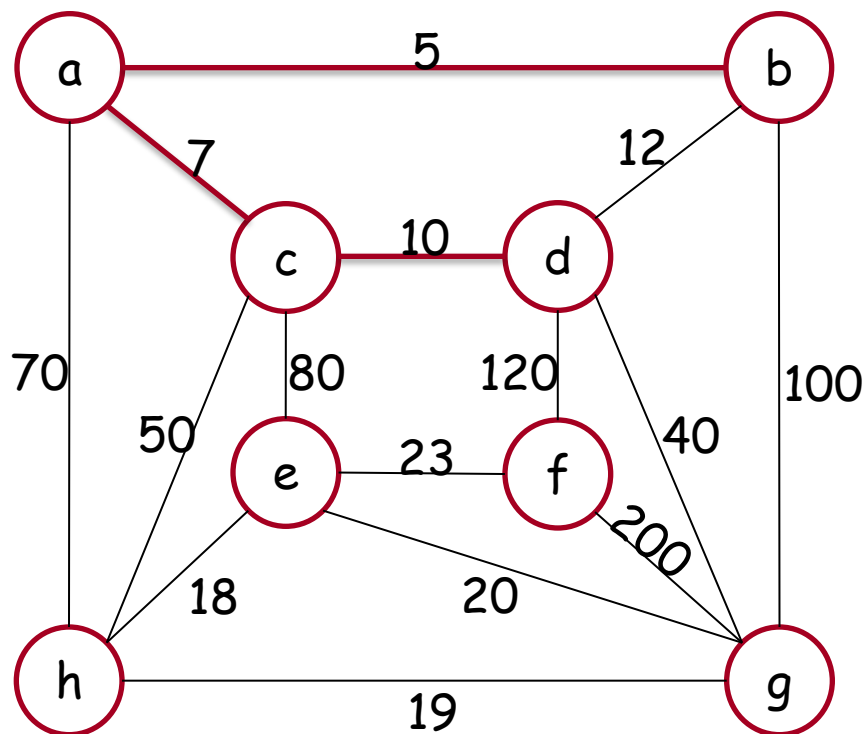
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] ( ) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] ( ) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] ( ) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] ( ) | e-f [23] ( ) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] ( ) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] ( ) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] ( ) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] ( ) | c-e [80] ( ) |               |

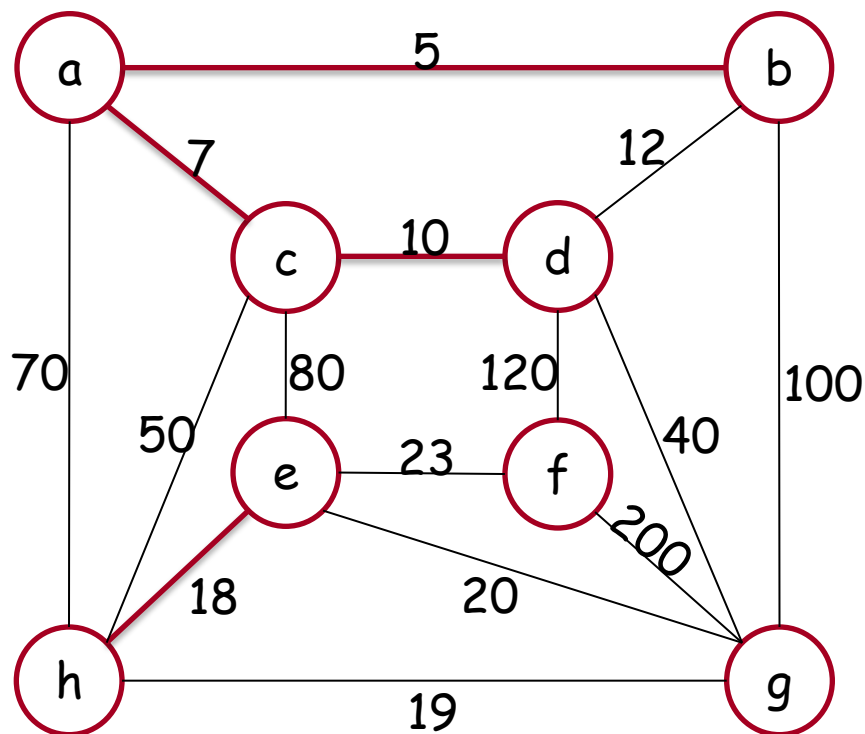




# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

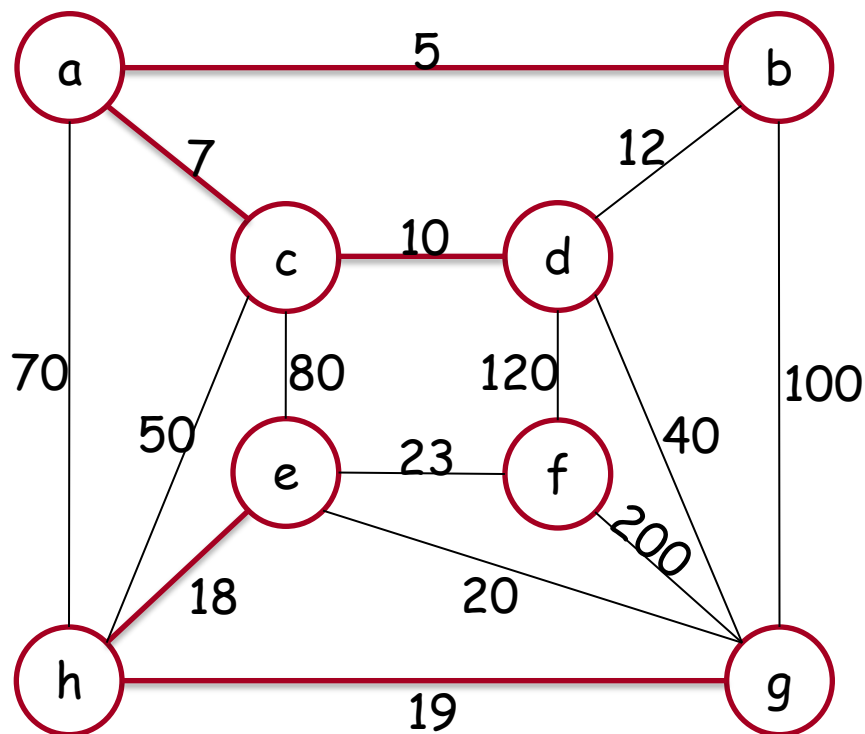
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] ( ) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] ( ) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] ( ) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

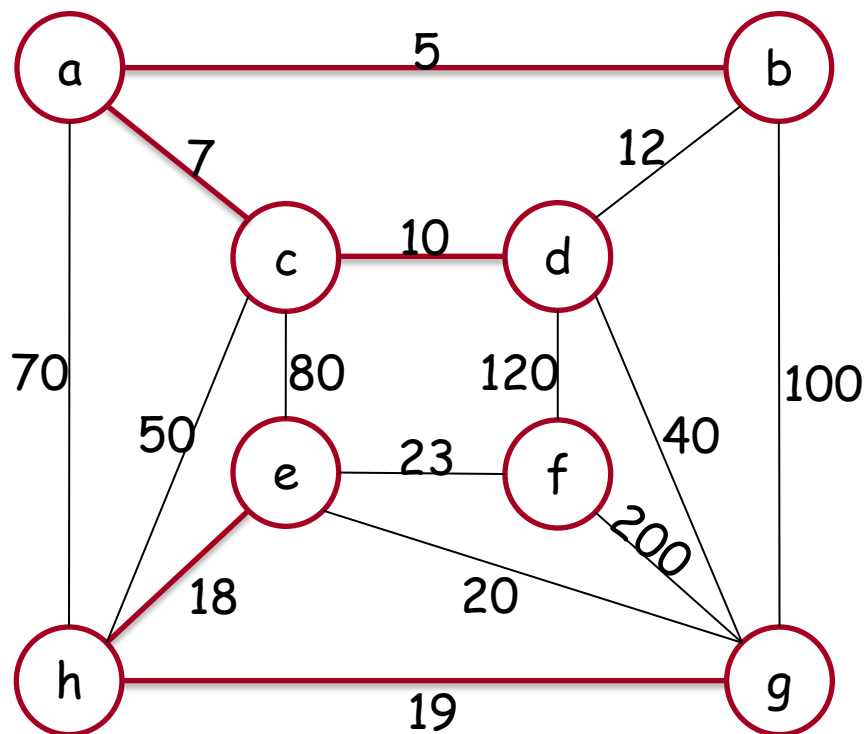
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] (✓) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] ( ) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] ( ) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

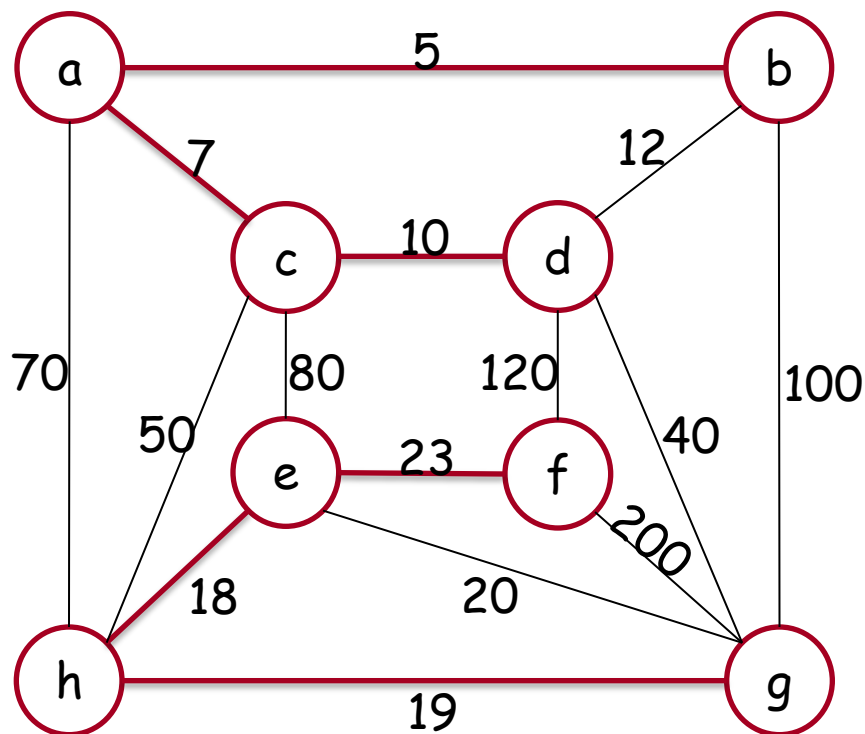
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] (✓) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] (✗) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] ( ) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

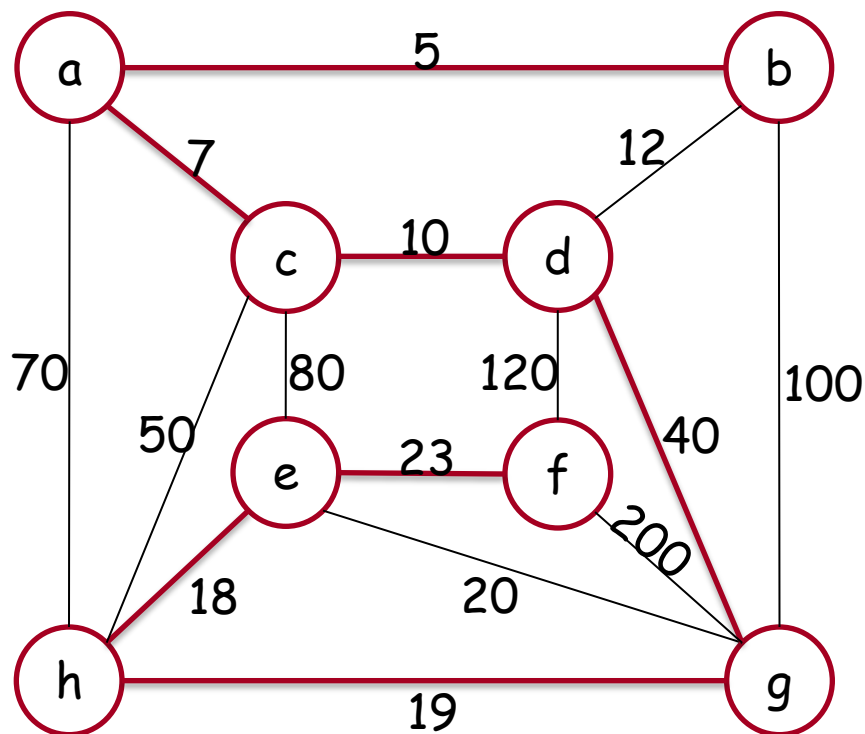
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] ( ) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] (✓) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] (✗) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] (✓) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

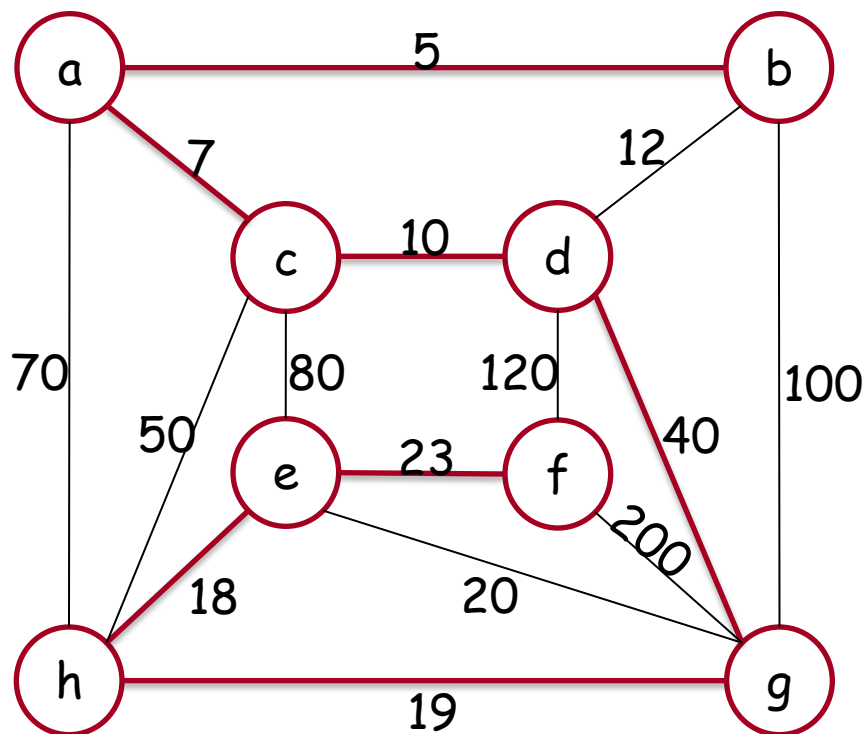
|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] (✓) | b-g [100] ( ) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] (✓) | h,c [50] ( ) | d-f [120] ( ) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] (✗) | h-a [70] ( ) | f-g [200] ( ) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] (✓) | c-e [80] ( ) |               |



# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

|              |              |              |               |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a-b [5] (✓)  | h-e [18] (✓) | d-g [40] (✓) | b-g [100] (✗) |
| a-c [7] (✓)  | h-g [19] (✓) | h,c [50] (✗) | d-f [120] (✗) |
| c-d [10] (✓) | e-g [20] (✗) | h-a [70] (✗) | f-g [200] (✗) |
| d-b [12] (✗) | e-f [23] (✓) | c-e [80] (✗) |               |



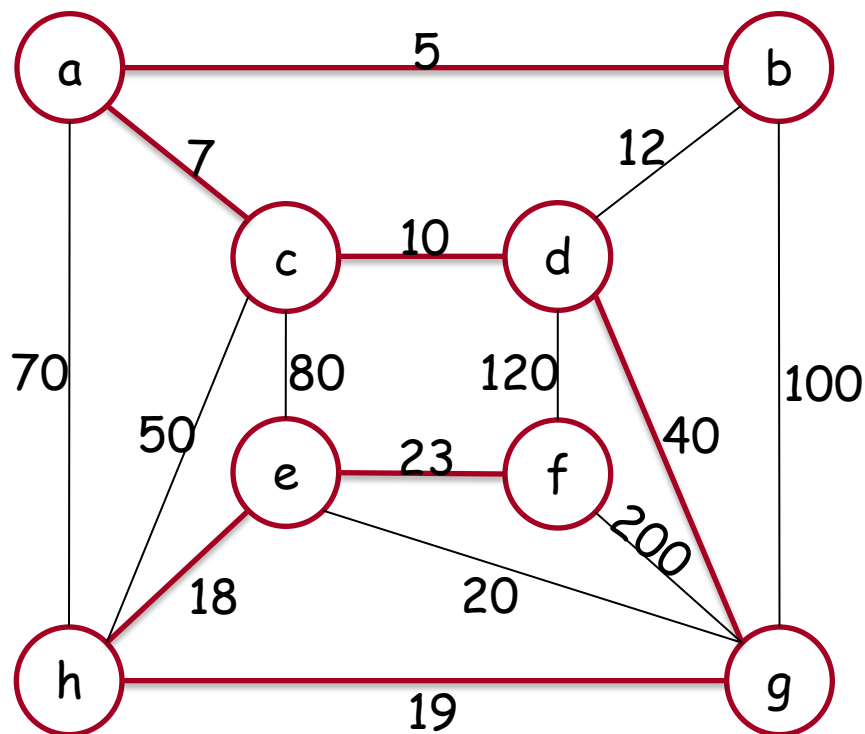
# Αλγόριθμος Kruskal - Εύρεση Ελάχιστου Γεννητικού Δένδρου

Άσκηση. Βρείτε το ελάχιστο γεννητικό δένδρο του παρακάτω γραφήματος.

Ελάχιστο Γεννητικό Δένδρο:

{ a-c, a-b, c-d, d-g, g-h, h-e, e-f }

Κόστος =  $7 + 5 + 10 + 40 + 19 + 18 + 23 = 122$



# Τέλος Άσκησης



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.  
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.